

**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**



**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TRANSPORTES  
LABORATÓRIO DE TOPOGRAFIA E GEODÉSIA**

# **SISTEMA U T M**

**Prof. Dr. Jorge P. Cintra  
São Paulo, 2003**

Copyright© 1997 - 2003 - EPUSP - PTR - LTG

# SUMÁRIO

<b>Sumário</b>	<b>pág</b>
<b>Apresentação</b>	<b>i</b>
	<b>iii</b>
<b>CAPÍTULO I - GEODÉSIA E GEOMETRIA DO ELIPSÓIDE</b>	<b>1</b>
1.1. Geodésia	1
1.2. Forma da Terra, Geóide, Elipsóide	2
1.3. Elipsóide de referência	3
1.4. Elipsóide no Brasil	6
1.5. Elementos do elipsóide	7
1.5.1 Sistema de coordenadas	7
1.5.2 Raios de curvatura sobre o elipsóide	8
<b>CAPÍTULO II - SISTEMAS DE PROJEÇÃO CARTOGRÁFICA</b>	<b>13</b>
2.1 Sistema de Projeção	13
2.2 Classificação das projeções	13
2.2.1 Classificação quanto à propriedade que conservam	14
2.2.2 Classificação quanto ao método construtivo	14
2.2.3 Classificação quanto ao tipo de superfície de projeção adotada	16
2.2.4 A classificação quanto à posição relativa da superfície de projeção ou à orientação do eixo dessa superfície	16
2.3 Designação	16
2.4 Seleção do sistema de projeção	17
<b>CAPÍTULO III - REPRESENTAÇÕES CONFORMES</b>	<b>19</b>
3.1 Indicatriz de Tissot (sentido físico)	19
3.2 Equações de representação conforme	20
<b>CAPÍTULO IV - Sistema U.T.M.</b>	<b>23</b>
4.1 Breve histórico e especificações	23
4.2 Relações fundamentais	26
4.3 Dedução das equações de transformação	26
4.4 Fórmulas de transformação de coordenadas geodésicas $(\Phi, \lambda)$ em plano retangulares UTM (N,E) - Problema direto	29
4.4.1 Exemplo: Marco municipal do IGG (Cidade Universitária - SP)	31
4.4.2 Exemplo: Marco geodésico	31
4.4.3 Exemplo: Outro marco (exemplo fornecido pelo IBGE)	31
4.5 Fórmula de transformação de coordenadas - UTM (planos retangulares, N, E) para geodésicas $(\Phi, \lambda)$ - Problema inverso	32
4.5.1 Exemplos para teste	33
4.6 Observação sobre fórmula e precisão	34

<b>CAPÍTULO V - CONVERGÊNCIA DE MERIDIANOS</b>	<b>37</b>
5.1 Sentido físico	37
5.2 Análise do sinal da convergência meridiana ( $\gamma$ )	38
5.3 Equações para o cálculo da convergência meridiana	39
5.4 Para teste tem-se o seguinte exemplo	40
<b>CAPÍTULO VI - FATOR ESCALA</b>	<b>41</b>
6.1 Sentido físico	41
6.2 Fórmulas a serem utilizadas em um programa computacional	42
<b>CAPÍTULO VII - PROBLEMAS TÍPICOS</b>	<b>45</b>
7.1 Introdução	45
7.2 Monografia de pontos	45
7.3 Mudança de elipsóide de referência	46
7.4 Reduções nas distâncias	47
7.5 Reduções angulares	48
7.6 Transporte de coordenadas elipsóidicas	50
7.7 Transporte de coordenadas UTM	50
7.8 Roteiro simplificado para instalação de marcos de referência para obras de engenharia	50

## Apresentação:

Um mapa e especificamente uma planta topográfica é uma representação plana da superfície da terra. Mas como esta não é planificável, necessariamente a representação sobre o papel apresentará deformações.

Surge assim o problema de estabelecer uma lei de correspondência (projeção) entre a superfície da terra e sua representação, controlando as deformações. O sistema UTM (Universal Transverso de Mercator) é precisamente um método de estabelecer essa correlação. Por suas propriedades, é o que se emprega com maior frequência nos trabalhos científicos e particularmente nos mapas e plantas topográficas utilizados nos projetos de engenharia.

Quem tenha trabalhado com mapas terá encontrado na legenda como estas: Projeção Universal Transversa de Mercator; datum vertical: Imbituba (Santa Catarina); datum horizontal: SAD-69; origem da quilometragem UTM: equador e meridiano de 45° W Gr., acrescidas as constantes: 10.000 km e 500 km, respectivamente; convergência meridiana do centro da folha: 53'50"; fator escala = 0,9997. Além disso, terá se defrontado com uma quadrícula que não é paralela às margens da folha e com uma graduação que foge aos padrões normais.

Esses dados e os respectivos números têm assustado mais de um engenheiro, ou paralisado a execução de projetos. Com estas páginas procuramos, pelo menos, dar uma primeira informação sobre o tema; uma notícia sobre alguns aspectos importantes.

Para tratar do Sistema de Projeção UTM necessitamos previamente de algumas breves noções sobre Geodésia, geometria do elipsóide e sistemas de projeção. Procuraremos tratar os assuntos de maneira breve e concisa, omitindo deduções de fórmulas ou simplesmente indicando o caminho da demonstração, quando for o caso.

São Paulo, agosto de 2003 (10ª edição).

## **CAPÍTULO I - GEODÉSIA E GEOMETRIA DO ELIPSÓIDE;**

### **1.1. Geodésia**

A geodésia pode ser definida como a ciência que procura determinar a geometria da superfície terrestre. Pode ser dividida em Geodésia teórica que estuda a determinação do geóide e do elipsóide, bem como a amarração entre ambos e Geodésia aplicada, que visa uma descrição da superfície terrestre.

Uma boa analogia da relação entre a Geodésia e a Topografia pode ser vista na construção de edifícios de concreto, que possuem uma estrutura resistente (lajes, vigas, pilares, fundações) e as partes complementares, de fechamento e acabamento (paredes, portas, janelas). A Geodésia procura então determinar vértices de amarração dispostas em cadeias que varrem todo o território e que possuem coordenadas bem determinadas e precisas; a topografia e a cartografia preenchem os espaços intermediários, sustentando-se nos vértices geodésicos, e amarrando todos os acidentes geográficos e edificações (rios, caminhos, rodovias, montanhas, lagoas) na rede existente, de maneira a poder produzir mapas confiáveis e sem deformações exageradas.

A Geodésia, segundo alguns autores pode ser dividida em:

- a) Geodésia esferoidal ou geométrica - trata da geometria do geóide e do elipsóide.
- b) Geodésia física - trata da gravimetria, enquanto é útil para efetuar a amarração entre o geóide e o elipsóide, através da determinação de pontos de ligação (datum, plural: data).
- c) Geodésia astronômica - trata dos métodos de determinação da latitude, longitude e azimutes verdadeiros.
- d) Geodésia por satélite - trata da determinação da forma da terra e da posição de pontos (coordenadas) através de satélites.

Podemos apontar os seguintes problemas típicos da G. que nos ajudam a compreender sua natureza e objetivos:

- 1 - o conhecimento da figura da terra (forma e dimensões)
- 2 - o estudo do elipsóide como superfície de referência.
- 3 - como resolver problemas geométricos sobre o elipsóide: métodos, fórmulas, aproximações
- 4 - como representar o elipsóide no papel (plantas, mapas): sistemas de projeção em levantamentos cartográficos e topográficos

5 - unificação de redes geodésicas para um território e para todo o planeta (elipsóide internacional)

6 - estudo do campo gravitacional da terra, medição da força da gravidade e desvio da vertical em pontos concretos

7 - determinação de altitudes e cotas e da diferença de nível dos mares

8 - estudo de movimento da crosta terrestre

9 - procedimentos de campo para solucionar esses problemas (trabalhos geodésicos fundamentais)

10 - através dos sistemas de projeção: estabelecer referenciais para projetos de engenharia, notadamente para as obras de grande porte.

## **1.2. Forma da Terra, Geóide, Elipsóide**

A superfície e a forma da Terra são elementos indetermináveis matematicamente, pela sua complexidade e irregularidade locais. No entanto, é necessário trabalhar com aproximações para poder construir mapas e plantas. Como se sabe, a hipótese da Terra esférica é suficiente para os trabalhos topográficos. Em geodésia costumam-se utilizar duas outras aproximações: o geóide e o elipsóide.

O geóide é definido como a superfície de nível que coincide com a superfície dos oceanos em repouso, estendida idealmente sob os continentes, de modo que as linhas verticais cruzem perpendicularmente esta superfície em todos os pontos. Depende portanto do campo gravitacional da Terra e da distribuição de massas no seu interior modifica-se sensivelmente nas proximidades de montanhas e depressões; pode-se falar então em ondulações do geóide. O tratamento matemático do geóide é um problema complexo e que se resolve ponto a ponto. Para trabalhar com uma representação matematicamente tratável recorre-se ao elipsóide.

O elipsóide é uma figura geométrica determinada através de parâmetros e que se utiliza como uma aproximação do geóide (e portanto da superfície da Terra) mediante as seguintes condições:

a) a coincidência do centro do elipsóide com o centro de gravidade (centro de massa) da terra;

b) a coincidência do plano equatorial do elipsóide com o plano do equador terrestre (ambos perpendiculares à linha dos pólos;)

c) procurar minimizar os desvios com relação ao geóide.

Para conseguir a condição indicada em c), efetuam-se ligações entre o geóide e o elipsóide, que se verificam em pontos conhecidos como data (plural de datum) geodésicos. Em cada um deve-se determinar a distância entre as duas superfícies (em geral em torno de 30 m, com um máximo de 150 m) e o desvio da vertical, que é o ângulo entre a vertical (normal ao geóide) e a normal ao elipsóide. Ajusta-se o elipsóide, tomando-se os parâmetros (a) e (e) como incógnitas a determinar através do processo dos mínimos quadrados com relação ao afastamento vertical. Em função dos data considerados surgem diferentes figuras de referência, e é por isso que se constata a existência de diversos elipsóides, com diferentes parâmetros. Atualmente trabalha-se na unificação dos elipsóides, visando determinar um só para todo o mundo, através da utilização de satélites e técnicas apropriadas (por exemplo, VLBI, GPS).

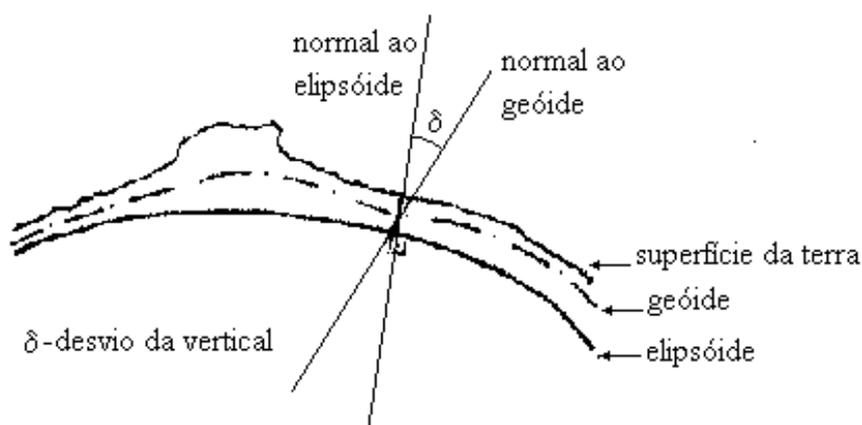


Figura 1.1 - figuras da Terra

### 1.3. Elipsóide de referência

A terra pode então ser aproximada por um elipsóide de revolução gerado por uma elipse que gira em torno do eixo dos pólos.

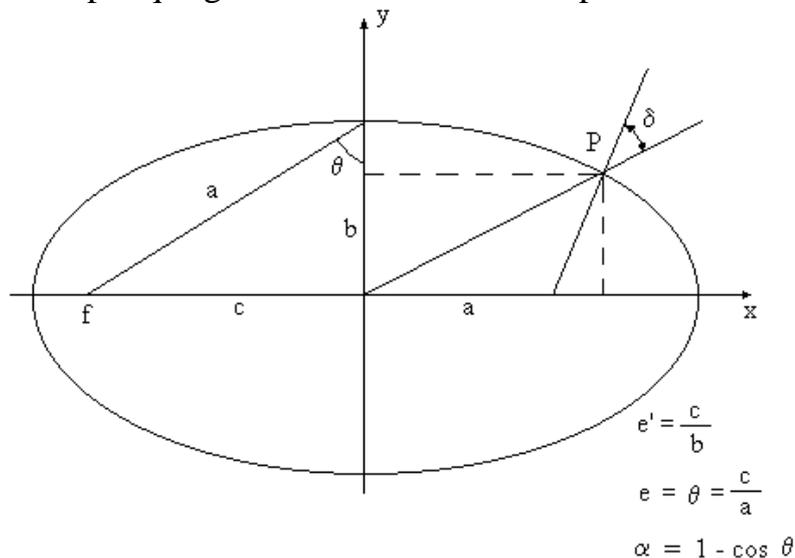


Figura 1.2 - Esquema do elipsóide terrestre

Podemos então definir os seguintes parâmetros:

1 - semi-eixo maior (equatorial) :  $a$

2 - semi-eixo menor (polar) :  $b$

3 - achatamento :  $\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$  (1)

ou 1ª excentricidade  $e = \frac{c}{a}$  (2)

2ª excentricidade  $e' = \frac{c}{b}$  (3)

sendo  $c^2 = a^2 - b^2$  (4)

A partir dessas relações fundamentais podem ser obtidas outras, que costumam ser úteis nas deduções matemáticas:

$$(5) \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$(6) \quad e'^2 = \frac{a^2}{b^2} - 1$$

$$(7) \quad (1 - e^2) \cdot (1 + e'^2) = 1$$

$$(8) \quad (1 - \alpha)^2 = (1 - e^2) = \frac{1}{(1 + e'^2)}$$

$$(9) \quad e^2 = 2 \cdot \alpha - \alpha^2$$

$$(10) \quad e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \quad \text{ou} \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

$$(11) \quad a = \frac{b}{1 - \alpha} = b \cdot \sqrt{1 + e'^2}$$

$$(12) \quad b = a \cdot (1 - \alpha) = a \cdot \sqrt{1 - e^2}$$

Através de medições sobre a superfície da terra, foram estabelecidos valores para os parâmetros de referência, sendo que para caracterizar o elipsóide basta escolher dois valores, em geral o semi-eixo maior ( $a$ ) e o achatamento  $\alpha$ , que pode ser definido pelo seu inverso  $f = 1/\alpha$ .

Newton, através de deduções teóricas, concluiu que a terra deveria ser um elipsóide achatado nos pólos. No século seguinte, os irmãos Cassini, através de medições incorretas, pensaram que o achatamento se dava ao longo do equador.

O procedimento para verificar o achatamento consiste em medir arcos de meridiano correspondentes a uma certa diferença de latitude (um grau, por exemplo) e por simples regra de três obter o raio da Terra na região de medição. Para dirimir a questão, que acabou confirmando as predições de Newton, organizaram-se duas expedições que mediram arcos do meridiano próximo ao equador (Quito) e próximo ao pólo (Lapônia). O raio menor obtido no equador provou que a Terra é achatada nos pólos.

Muitas outras expedições científicas mediram arcos de meridiano para determinar os parâmetros do elipsóide. A seguir, no quadro 1, apresentamos alguns dos valores mais importantes.

ano	designação	semi-eixo maior (a)	achatamento ( $f = \frac{1}{a}$ )
(1) 1910	Hayford (Internacional)	6.378.388,00	1 / 297,00
(2) 1967	Associação Geodésica Internacional SAD-69	6.378.160,00	1 / 298,25
(3) 1984	WGS 84 WorldGeodetic System	6.378.137,00	1 / 298,25722

#### 1.4. ElipsóidenoBrasil

O elipsóide de Hayford (1) foi adotado em muitas ocasiões no Brasil, por exemplo na representação que se denomina "Córrego Alegre".

Na verdade, essa designação se refere ao ponto geodésico fundamental da rede, que é o vértice CÓRREGO ALEGRE (Minas Gerais) da cadeia de triangulação do paralelo de 20<sup>o</sup> S. Toda a rede brasileira referida a esse "datum", e os parâmetros eram os do elipsóide internacional de Hayford.

Em tempos posteriores, procurou-se a adaptação de um elipsóide a toda a América do Sul, e os estudos levaram a adoção do PSAD - 56 (Provisional South American Datum of 1956), com origem no vértice "LA CANOA", na Venezuela, e os parâmetros continuaram sendo os do elipsóide de Hayford.

Essa adaptação não ficou muito boa e se passou a um novo vértice, o ASTRO-CHUÁ, correspondente ao vértice CHUÁ, na mesma cadeia do CÓRREGO ALEGRE, e cujas coordenadas foram determinadas astronômica. Por convenção adotou-se para esse vértice uma distância nula entre o geóide e o elipsóide (desnível ou ondulação geoidal), bem como um desvio da vertical nulo. Ver tabela 1.1. Forçou-se assim a condição de tangência entre o geóide e o elipsóide, que continuou sendo o de Hayford.

Tabela 1.1 - Córrego Alegre

$$\begin{aligned}\Phi_G &= 19^\circ 50' 15,14'' \text{ S} \\ \lambda_G &= 48^\circ 57' 42,75'' \text{ W} \\ N &= \delta = 0 \\ A_G &= 128^\circ 21' 48,96'' - \text{Chapadadas Areias} \\ a &= 6.378.388 \text{ m} \\ f &= 1 : 297,00\end{aligned}$$

A seguir, foi feito um detalhado estudo gravimétrico na região do vértice CHUÁ e determinaram-se também as novas coordenadas desse mesmo ponto físico, agora denominado simplesmente CHUÁ, e adotou-se o elipsóide da Associação Geodésica Internacional. O ajuste mostrou-se uma nova adaptação, não só para o Brasil mas para toda a América do Sul, que em 1969 já havia adotado esse elipsóide, que recebeu o nome de SAD-69 (South American Datum of 1969).

Concluindo o ajustamento, em 1978, o SAD-69 com origem em CHUÁ, passou a ser adotado oficialmente no Brasil como novo datum (tabela 1.2). No entanto, como são muitos os vértices de triangulação, de 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> ordem, muitas coordenadas e inclusive mapas continuam sendo referenciados ao CÓRREGO ALEGRE (Hayford). Em decorrência disso, um dos problemas que se encontra com frequência é o da mudança de elipsóide, isto é, passar todas as coordenadas de um sistema para outro.

Tabela 1.2 - Chuá

$$\begin{aligned}\Phi_G &= 19^\circ 41' 41,6527'' \text{ S} \\ \lambda_G &= 48^\circ 06' 04,0639'' \text{ W} \\ A_G &= 271^\circ 30' 04,05'' - \text{Uberaba} \\ N &= 0 \\ a &= 6.378.160 \text{ m} \\ f &= 1 : 298,25\end{aligned}$$

Atualmente, com o advento de satélites projetados para isso, (sistemas TRANSIT, NAVSTAR GPS) definiu-se um novo elipsóide para todo o mundo, o World Geodetic System, conhecido como WGS-84. Todas as coordenadas obtidas através de satélites (processo que vem se difundindo muito e cujo custo vem caindo bastante) ficam referidas a esse novo elipsóide.

Atualmente, temos muitas coordenadas de pontos no Brasil referidas a esse novo sistema já que o método é mais simples e eficiente, e não necessita estar interligado à rede existente. Será necessário dentro em breve a adoção de um referencial geocêntrico para o Brasil. (em fase de estudos).

\* Obs.: O elipsóide triaxial possui um interesse meramente teórico já que complica enormemente os cálculos e não resolve o problema final que é o geóide, figura da Terra, que pode ser referido a qualquer elipsóide seja ele de revolução ou não (triaxial).

## 1.5. Elementos do elipsóide

### 1.5.1 Sistema de coordenadas

De acordo com a figura 1.3 podemos definir as seguintes linhas e ângulos.

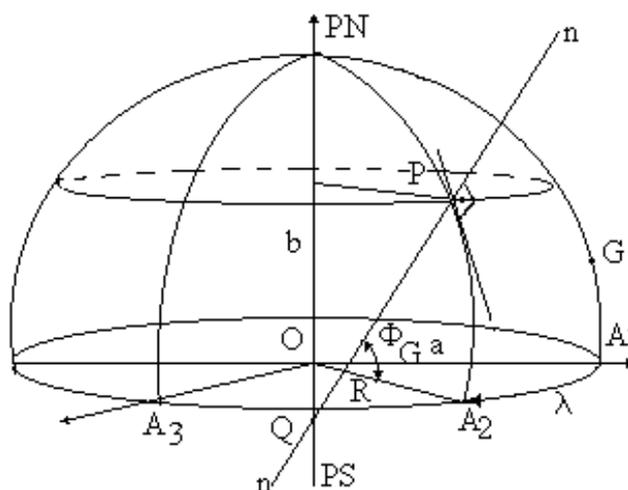


Figura 1.3

- seção normal** - é qualquer seção que contenha a normal ao elipsóide no ponto P. Em outras palavras, é a linha de intersecção entre o elipsóide e qualquer plano que contenha a normal nn (esse plano pode girar em torno de nn).
- seção meridiana** - é uma particular seção normal, aquela que contém o eixo menor b, ou seja, o eixo dos pólos PN PS.
- grande normal N** - é o segmento PQ da normal, que vai do ponto P na superfície da Terra até o encontro Q da normal com o eixo dos pólos.
- pequena normal N'** - é o segmento PR da normal, que vai do ponto P ao plano do equador.
- meridianos geodésicos** - correspondem aos meridianos da Terra, definindo-se como seções perpendiculares ao equador que contém o eixo dos pólos; são seções meridianas (elipses) em diversos pontos, por exemplo, na figura 1.3:  $PNA_1$ ,  $PNA_2$ ,  $RNA_3$ .

- f) **paralelos geodésicos** - são círculos definidos por planos paralelos ao equador que cortam o elipsóide. Num elipsóide triaxial seriam elipses.
- g) **longitude** - é o ângulo com aresta  $P_N P_S$ , entre o meridiano local e o meridiano de origem (Greenwich)  $P N A_1$  na figura 1.3 e representado pela letra L.
- h) **latitude geodésica ou elipsóide** - é o ângulo da normal ao elipsóide no ponto, com o plano do equador. Em geral é calculado através da equação do elipsóide e se representa por  $\Phi_G$ .
- i) **latitude geográfica ou astronômica** - é o ângulo da vertical (normal ao geóide) com o equador. Em geral é determinada por visada a astros e referenciada por instrumentos que se orientam pelo fio de prumo (vertical gravimétrica). Representa-se por  $\Phi_A$ .
- j) **desvio da vertical** - é o ângulo ( $\delta$ ) entre a vertical ( $\Phi_A$ ) e a normal ao elipsóide ( $\Phi_G$ ), como mostrado na figura 1.1.

### 1.5.2 Raios de curvatura sobre o elipsóide

De acordo com a figura 1.4 podemos apresentar as seguintes grandezas:

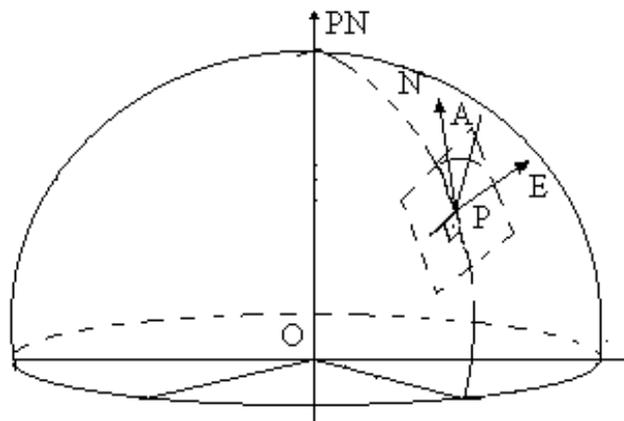


Figura 1.4 - raios de curvatura no elipsóide

#### a) Raio de curvatura na seção meridiana - M

Como vimos, a seção meridiana que contém um ponto P qualquer, denominada também meridiano geodésico, é uma linha sobre o elipsóide que contém a normal ao elipsóide no ponto e passa pelos pólos. Contém a linha NS. É uma elipse, cujo raio de curvatura pode ser definido em cada ponto pela equação:

$$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 f)^{\frac{3}{2}}}$$

onde:

$a$  = semi-eixo maior

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 2 \cdot a - a^2 \quad (\text{primeira excentricidade ao quadrado})$$

$\Phi$  = latitude do local; para efeitos práticos  
pode-se confundir as latitudes elipsóidicas  
com astronômicas

b) **Raio de curvatura na seção transversa** - N

A seção transversa é aquela que contém a normal no ponto P e é perpendicular à linha NS; contém portanto a linha EW. É uma linha que possui em cada ponto um raio de curvatura que pode ser definida pela equação.

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 f}}$$

c) **Relação entre M e N** ( $N \geq M$ )

Dividindo-se N por M chega-se à seguinte relação:

$$\frac{N}{M} = 1 + e'^2 \cdot \cos^2 f = 1 + v^2$$

com:

Donde  $N \geq M$  (sempre)

\* no equador  $\Phi = 0^\circ$ ,  $\cos \Phi = 1$ ,  $N = a$   
 $\text{sen} \Phi = 0$   $M = a(1 - e^2)$

\* no polo  $\Phi = 90^\circ$ ,  $\cos \Phi = 0$ ,  $N = M = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$   
 $\text{sen} \Phi = 1$

d) **Raio de uma seção qualquer, de azimute A**

Para uma seção normal qualquer, que faça um azimute A, com linha NS, o raio de curvatura pode ser calculado pelo Teorema de Euler:

$$\frac{1}{R_A} = \frac{\text{sen}^2 A}{N} + \frac{\text{cos}^2 A}{M} \quad \text{ou}$$

$$R_A = \frac{M \cdot N}{N \cdot \text{cos}^2 A + M \cdot \text{sen}^2 A}$$

O que fornece um resultado intermediário entre o raio máximo (N) e o raio mínimo (M).

e) **Raio médio de curvatura**  $R_m = \sqrt{M \times N}$

Tem o sentido físico de uma média geométrica dos raios em todas as direções (0 a 360°) e pode ser entendido como o raio de uma esfera que constitui o elipsóide no ponto.

Utilizando a fórmula do raio de uma seção qualquer e realizando uma adequada integração (0 a 2π) com um incremento de ângulo δA tem-se a fórmula:

$$R_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M \cdot NdA}{N \cdot \text{cos}^2 A + M \cdot \text{sen}^2 A}$$

o resultado é:

$$R_m = \sqrt{M \cdot N}$$

ou

$$R_m = \frac{a \cdot \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 f}$$

f) **Raio de um paralelo**  $R_p = N \cdot \text{cos} \Phi$

Pode ser deduzido facilmente da figura 1.5

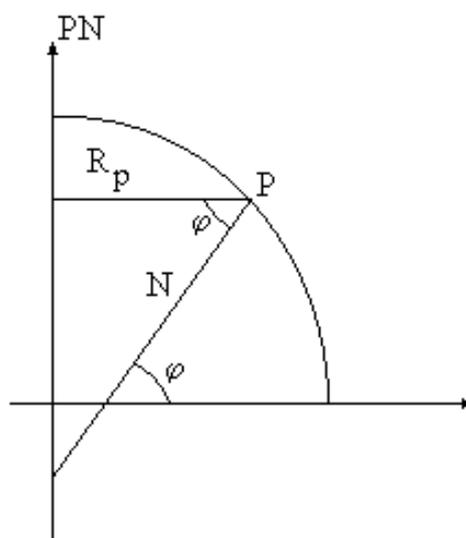


Figura 1.5 - raio de um paralelo

$$R_p = N \cos\Phi$$

Obs.: Como se pode ver, os elementos definidos acima dependem do elipsóide escolhido ( $a$ ,  $e^2$  ou  $\alpha$ ), e da latitude do ponto ( $\Phi$ ), que por sua vez pode estar em função da determinação astronômica da latitude no datum de origem (Chua, Córrego Alegre, WGS84, etc)



## CAPÍTULO II - SISTEMAS DE PROJEÇÃO CARTOGRÁFICA

### 2.1 Sistema de Projeção

Numa esfera nem o elipsóide é planificável. No entanto, para os projetos de engenharia, necessitamos de uma representação plana de pontos e figuras existentes sobre a superfície da Terra. Trata-se pois de estabelecer uma lei de correspondência entre elementos do elipsóide e suas representações planas, e que minimize as distorções, inevitáveis pela própria natureza do problema.

Sistema de projeção é então, neste contexto, o modo como se correlacionam os pontos da superfície da terra com suas representações planas. Deve-se chegar a uma equação matemática, com ou sem uma representação geométrica, que estabeleça uma forma de calcular  $x$  e  $y$  em função de  $\Phi$  e  $\lambda$ , e vice-versa, conforme apontamos esquematicamente na figura 2.1.

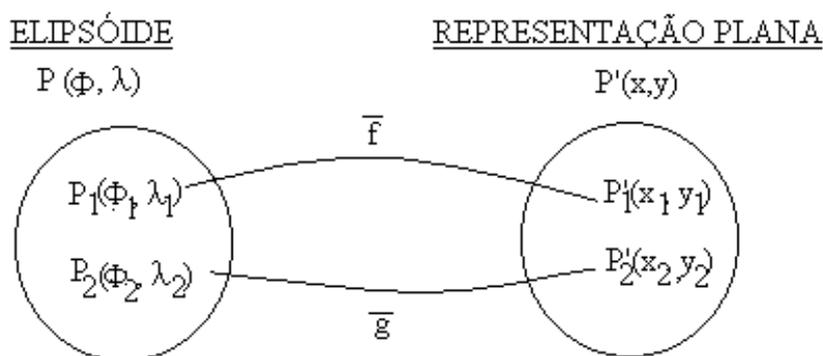


Figura 2.1 - sistema de projeção

$\bar{f}(f, f')$  e  $\bar{g}(g, g')$  = leis matemáticas

transformação direta

$$x = f(\Phi, \lambda)$$

$$y = f'(\Phi, \lambda)$$

transformação inversa:

$$\Phi = g(x, y)$$

$$\lambda = g'(x, y)$$

Queremos obter, em resumo, as funções,  $f, f', g$  e  $g'$ .

### 2.2 Classificação das projeções

Existem diversas maneiras de classificar as projeções, cada uma de acordo com um critério adotado. Veremos algumas delas, na medida em que são úteis para nosso objetivo.

### 2.2.1 Classificação quanto à propriedade que conservam

Pelo próprio processo, não se podem conservar todas as propriedades ao mesmo tempo. Assim temos:

- a) **projeções equidistantes** - não apresentam deformações lineares em uma ou algumas direções. Podem ser meridianas, transversais ou azimutais caso a equidistância seja do longo dos meridianos, paralelos ou ao longo de círculos máximos, respectivamente.
- b) **projeções equivalentes** (ou equiáreas) - não deformam as áreas, dentro de certos limites de extensão.
- c) **projeções conformes** (ou ortomórficas) - não **deformam ângulos** e portanto mantém a forma, também dentro de certos limites de extensão.
- d) **projeções afiláticas** - não conservam nenhuma propriedade, mas minimizam as deformações em conjunto (ângulos, áreas, distâncias).

### 2.2.2 Classificação quanto ao método construtivo:

- a) **geométricas** - são as que se baseiam em princípios geométricos projetivos e existe um significado físico para a projeção. Podem ser perspectivas quando adotam um ponto de vista (PV) e traçam raios visuais pelos pontos da superfície da terra, que determinam as projeções sobre o plano ou pseudo-perspectivas, quando utilizam o recurso de um artifício, por exemplo, adotar um PV móvel.

As perspectivas por sua vez dividem-se em gnômica ou central (quando o PV é o centro da terra), etereográfica (PV situado no infinito) e cenográfica (PV é um ponto qualquer, a uma distância finita). Esses casos são representados na figura 2.2.

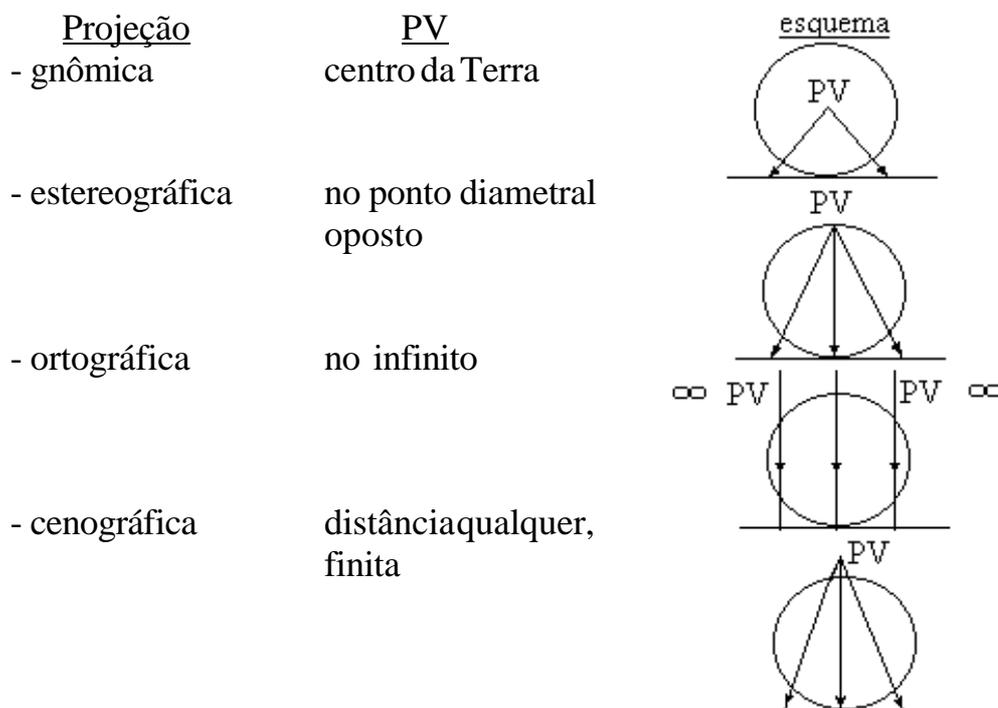


Figura 2.2 - Projeções Perspectivas

Um exemplo de projeção pseudo-perspectiva é a cilíndrica equatorial estereográfica, em que o PV se movimenta ao longo do equador, situando-se sempre no anti-meridiano do ponto a projetar.

b) **analíticas** - são as que se baseiam em leis de correspondência matemática, e não possuem um significado geométrico. Podem ser simples (regulares) ou modificadas (irregulares).

As simples baseiam-se em leis matemáticas provenientes de condições previamente estabelecidas. Por exemplo, a cilíndrica equatorial conforme, impõe as condições geométricas para manter a forma dos elementos ( $dx = dy$ ) e a equidistante azimutal impõe as relações para que não haja deformação nas distâncias ( $ds = dS / E$ ).

As modificações surgem por transformações a partir das simples. Por exemplo, a equivalente de Bonne é derivada da cônica equidistante meridiana.

c) **convencionais** - são as que se baseiam em princípios projetivos arbitrários, por convenção, para deduzir uma expressão matemática.

Por exemplo, a de Mollweide impõe que os paralelos sejam retas, os meridianos, elipses e a quadrícula apresente equivalência.

2.2.3 Classificação quanto ao tipo de superfície de projeção adotada

a) **planas** ou **azimutais** (zenitais) - são aquelas em que a superfície de projeção é um plano, tangente ou secante à superfície. O nome azimutal deriva-se do fato de que os azimutes se mantêm (conforme).

b) **por desenvolvimento** - são as que adotam uma superfície de projeção desenvolvível, e de acordo com esta dividem-se em:

- cônicas (ou policônicas)
- cilíndricas
- poliédricas

2.2.4 A classificação quanto à posição relativa da superfície de projeção ou à orientação do eixo dessa superfície

A figura 2.3 esclarece as classificações que se seguem.

Nas superfícies planas a posição do ponto de tangência pode originar as seguintes denominações, polares (tangência no pólo), equatoriais ou meridianas (no equador) e horizontais ou oblíquas (num ponto qualquer).

Nas superfícies por desenvolvimento, o eixo vertical, coincidente com a linha dos pólos, dará origem à designação normal para as cônicas e equatorial para as cilíndricas. O eixo horizontal dará origem às designações transversa (ou meridiana) tanto para as cônicas como para as cilíndricas. O eixo situado numa posição qualquer dará origem aos nomes horizontal, para as cônicas e oblíqua para as cilíndricas.

### 2.3 Designação

Para dar nomes as projeções deve-se seguir, em princípio, as seguintes regras:

- 1) enunciar em primeiro lugar a natureza da superfície de projeção (plana, cônica, cilíndrica).
- 2) a seguir a posição do eixo (ponto) com relação à linha dos pólos (polar, normal, transversa).
- 3) finalmente, acrescentar a propriedade que conservam, se for analítica (conforme, equidistante, equiárea) ou a posição do ponto de vista, se for geométrica (gnômica, esteográfica, ortográfica).

No entanto, por simplificação e por força do uso, muitas vezes a projeção é mais conhecida pelo nome do autor do que pela designação científica. Assim, a cilíndrica equatorial conforme é conhecida como de Mercator e a cônica azimutal equivalente leva o nome de Lambert.

A isso acrescenta-se o fato de que as irregulares sempre recebem o nome de seu criador.

#### 2.4 **Seleção do sistema de projeção**

A escolha de uma ou outra forma de projeção dependerá fundamentalmente da finalidade que se pretende, da região a representar e sua forma, e dos erros aceitáveis.

Assim os planisféricos para estudo de países e seus limites, visualização geral do relevo, representação de climas, correntes marítimas, vegetação, cidades, etc, não necessitam de uma exatidão muito grande, o que possibilita um amplo leque de escolha.

Países alongados numa direção podem escolher superfícies de tangência ao longo dessa linha, que minimizam as deformações.

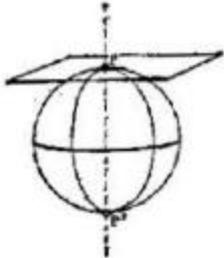
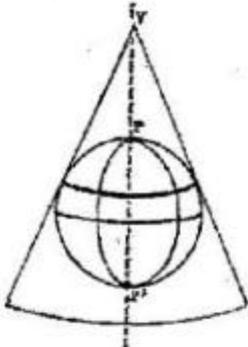
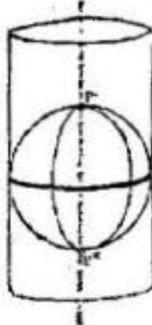
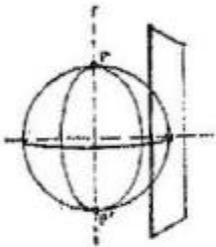
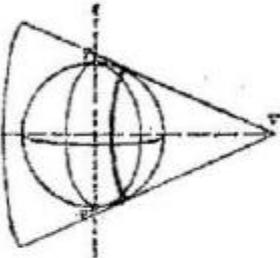
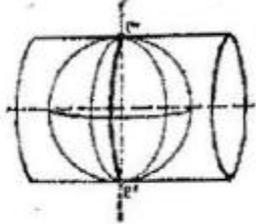
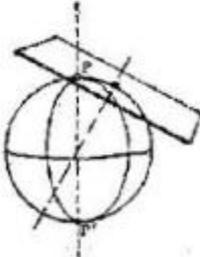
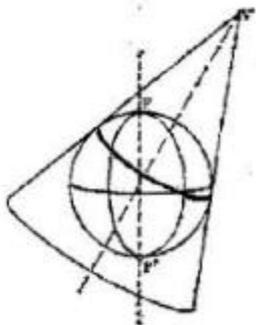
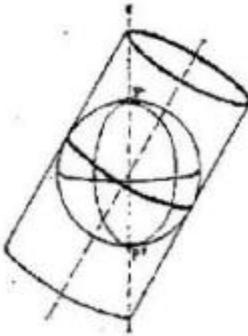
Cartas para navegação (marinha, aeronáutica) exigem maior precisão e fundamentalmente a manutenção de ângulos para o estabelecimento dos planos de vôo/rumo e por isso pode-se adotar uma projeção conforme.

Os atlas celestes devem conservar as formas, para que se reconheçam as estrelas com facilidades; daí surgem projeções conformes, geralmente estereográficas.

Para projetos e ante-projetos de engenharia, em que se necessita conhecer a escala, e a precisão é algo importante, adotam sistemas conformes, principalmente o UTM (Universal Transverso de Mercator) e o L.T.M (Local Transverso de Mercator) que é uma variante do primeiro.

Concluindo, o sistema UTM é Universal já que é aplicável em toda a extensão do globo terrestre; é Transverso porque o eixo do cilindro é perpendicular à linha dos pólos, e recebe o nome de Mercator em honra ao primeiro idealizador desse tipo de projeção, o holandês Gerhard Kremer (1512 - 1594), cujo nome latinizado é Gerardus Mercator.

Trata-se pois de uma projeção cilíndrica de eixo equatorial (transversa, que mantém a forma das figuras (conforme), sendo que a tangência do cilindro se mantém ao longo dos meridianos. Isso numa primeira aproximação já que, para minimizar os erros, adota-se um cilindro secante, como veremos mais adiante.

PLANAS	CÔNICAS	CILINDRICAS
 <p data-bbox="300 678 655 748">POLAR - plano tangente no pólo</p>	 <p data-bbox="655 678 1011 748">NORMAL - eixo do cone paralelo ao eixo da Terra</p>	 <p data-bbox="1011 678 1359 748">EQUATORIAL - eixo do cilindro paralelo ao eixo da Terra</p>
 <p data-bbox="300 1137 655 1205">EQUATORIAL - plano tangente no equador</p>	 <p data-bbox="655 1137 1011 1205">TRANSVERSA - eixo do cone perpendicular ao eixo da Terra</p>	 <p data-bbox="1011 1137 1359 1205">TRANSVERSA - eixo do cilindro perpendicular ao eixo da Terra</p>
 <p data-bbox="300 1603 655 1671">HORIZONTAL - plano tangente em um ponto qualquer</p>	 <p data-bbox="655 1603 1011 1671">HORIZONTAL - eixo do cone inclinado em relação ao eixo da Terra</p>	 <p data-bbox="1011 1603 1359 1671">OBLÍQUA - eixo do cilindro inclinado em relação ao eixo da Terra</p>

Fonte: Cartografia - Noções Básicas. Mucio Piragibe Ribeiro de Bakker, DHN, 1965

Figura 2.3 - Tipos de projeções

## CAPÍTULO III - REPRESENTAÇÕES CONFORMES

Como vimos, recebe o nome de projeção conforme toda aquela que mantém a forma de pequenas figuras, isto é, dado um elemento geométrico (um círculo, um quadrado) sobre a superfície da Terra, sua representação na carta conservará a mesma forma sem alterar, portanto, os ângulos. Pode haver, no entanto, uma alteração de escala.

### 3.1 Indicatriz de Tissot (sentido físico)

A existência de deformações era conhecida desde os inícios da cartografia, já que não se pode planificar uma esfera sem deformar a superfície. No entanto a determinação matemática envolve o cálculo diferencial que foi desenvolvido por Newton e Leibniz em fins do século XVII.

Tissot, cientista francês de século XIX, foi o primeiro que classificou as deformações de maneira racional. Examinou, para isso, as variações de um pequeno círculo desenhado sobre a superfície da Terra e sua transformada em um sistema de projeção. O resultado dessa transformação será genericamente uma elipse.

De acordo com a propriedade que cada tipo de projeção apresenta, a elipse assumirá uma determinada forma, de acordo com a figura 3.1.

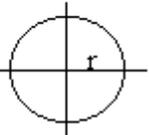
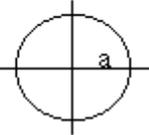
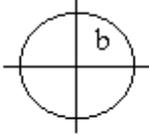
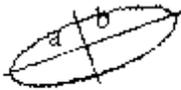
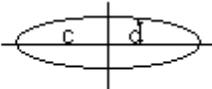
<u>Na Terra</u>	<u>Na Projeção</u>	<u>Tipo de Projeção</u>
1. 		conforme, com $a \neq r$
círculo de raio r	círculo de raio a	
2.		conforme (outra), com $b \neq a$
	círculo de raio b	
3.		equivalente $\pi ab = \pi r^2$
	elipse de semi-eixos a e b	
4.		equivalente (outra) $\pi cd = \pi r^2$
	elipse de semi-eixos c e d	

Figura 3.1 - Representação gráfica de elipse de Tissot

Na projeção conforme, para a manutenção das formas, os ângulos devem-se conservar, como se vê na figura 3.2

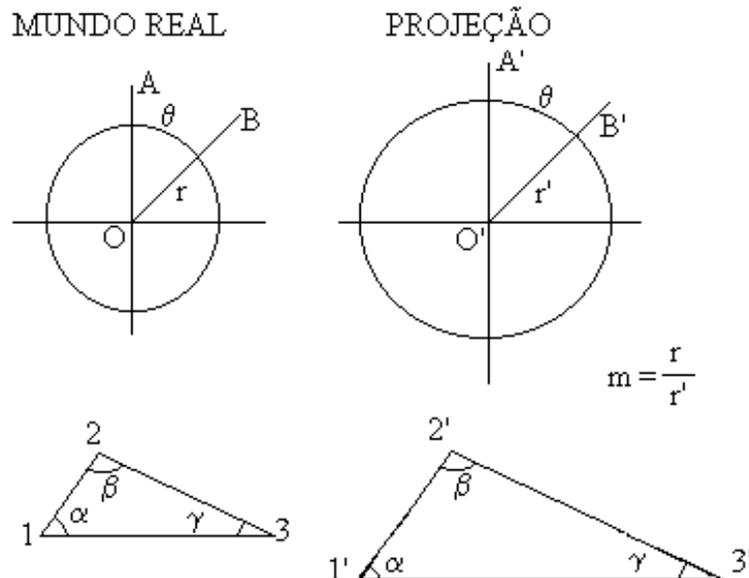


Figura 3.2 - Projeção conforme

Essa projeção recebeu também outros nomes de acordo com quem a estudou: ortomórficas (Germain), autogonais (Tissot) e isogônicas (Fiorini). Ao longo de linhas privilegiadas as distâncias podem ser mantidas, sendo que nas outras direções surjam deformações que podem ser conhecidas e controladas em função da região (dimensões, afastamento de uma linha base), em que se aplica a projeção. Conhecendo-se o fator de escala pode-se introduzir as correções apropriadas para o comprimento de cada distância.

Os meridianos e paralelos cruzam-se ortogonalmente, como se pode deduzir da manutenção das formas.

As vantagens desse tipo de representação sobre os demais sistemas é tão nítida que seu uso vem sendo cada vez mais generalizado.

### 3.2 Equações de representação conforme

Uma vez visto o sentido físico da transformação de um círculo numa elipse, podemos perguntar-nos sobre sua expressão matemática. Para isso recorre-se ao cálculo diferencial, da maneira que esboçaremos a seguir.

Tomam-se figuras e curvas elementares sobre o elipsóide e suas correspondentes na representação plana (figura 3.3) e procura-se correlacionar umas com as outras, através de equações matemáticas. A lei de correlação inicialmente é geral, e a seguir impõem-se as condições de conformidade.

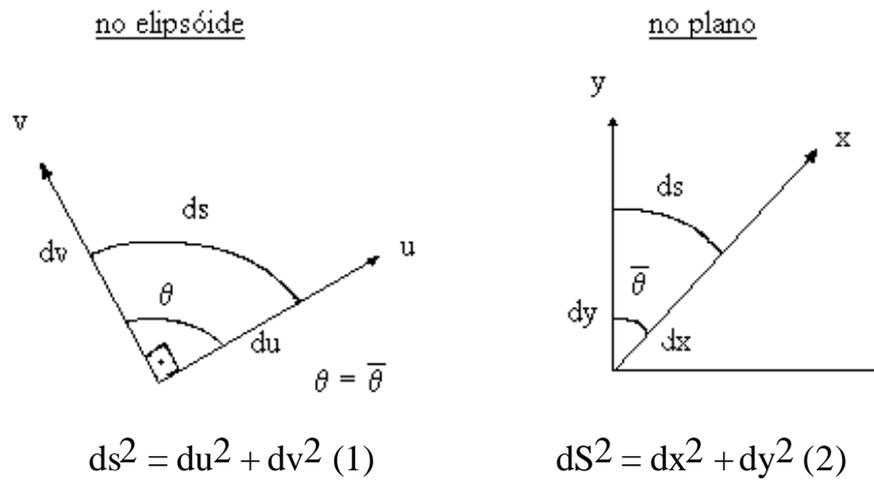


Figura 3.3 - Relações de conformidade

As relações apresentadas valem para elementos infinitesimais e as linhas  $x$  e  $y$  denominam-se transformadas de  $u$ ,  $v$ . Na realidade  $u$  e  $v$  são elementos calculados em função de  $\Phi$  e  $\lambda$  (latitude e longitude). Na representação conforme teremos  $q = \bar{q}$ .

Através da expressão das diferenciais totais de  $x$  e  $y$  pode-se calcular  $dS$ , em função dos seguintes coeficientes:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$$

$$ds^2 = Edu^2 + 2F du dv + Gdv^2 \quad (3)$$

A seguir, considerando um círculo de raio unitário sobre o elipsóide, encontra-se a equação que representa sua transformada; que é uma elipse de semi-eixos  $a$  e  $b$  e que permite os estudos matemáticos.

A dedução das relações matemáticas com a condição adicional da conformidade se faz através da escala de ampliação  $m$ , da seguinte maneira. Toma-se um triângulo infinitesimal ( $du$ ,  $dv$ ,  $ds$ ) e considera-se o ângulo  $z$ , de acordo com a figura 3.4.

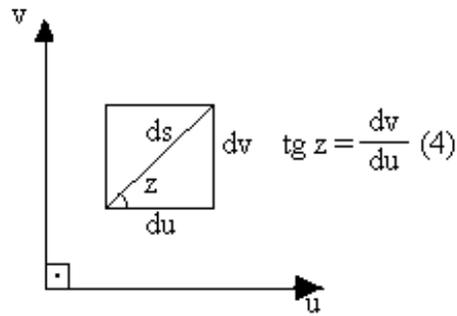


Figura 3.4

Por definição, a escala de ampliação  $\underline{m}$  vale:

$m = \frac{dS}{ds}$ , que elevada ao quadrado e tendo em conta

$$(1) \text{ e } (3) \text{ fornecerá: } m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{E du^2 + 2F dudv + du^2}{du^2 + dv^2}$$

Dividindo o numerador e o denominador por  $du^2$  virá:

$$m^2 = \frac{E + 2F \operatorname{tg} z + G \operatorname{tg}^2 z}{1 + \operatorname{tg}^2 z} \quad (5)$$

Para que a representação seja conforme, é necessário que  $\underline{m}$  (escala de ampliação) seja constante ao longo de um círculo qualquer, para qualquer valor de  $z$ . Assim, para que  $\underline{m}$  independa de  $z$ , em (5) devemos ter:

$$F = 0$$

$$E = G = m^2 \quad m^2 = \frac{E + E \operatorname{tg}^2 z}{1 + \operatorname{tg}^2 z} = E$$

Na representação conforme, a indicatriz é um círculo com um raio que se relaciona com o original através da escala de ampliação  $m$ . Um quadrado ( $du = dv$ ) é representado por um quadrado  $dx = dy$ , se escolhermos um sistema conveniente. O sistema mais espontâneo seria o constituído pelos meridianos e paralelos, mas este não é simétrico, isto é, o arco correspondente a um ângulo ( $1^\circ$ , por exemplo) nos meridianos é diferente do arco correspondente ao mesmo ângulo no paralelo. Assim, existe um sistema apropriado (chamado rede isométrica) que tornaria as variáveis simétricas, mas não é do caso estudá-lo devido à brevidade destas páginas.

## CAPÍTULO IV - SISTEMA UTM

### 4.1 Breve histórico e especificações

O Sistema Universal Transverso de Mercator em sua forma mais atual foi calculado por J.H. Lambert, mas já havia sido utilizado sob a denominação de Gauss desde 1866 para calcular a triangulação de Hanover (Alemanha). As aproximações sobre a esfera, feitas na época, tem uma expressão matemática simples, mas as coisas se complicam um pouco quando se utiliza o elipsóide, já que este deve ser resolvido por aproximações e desenvolvimentos em série.

Em 1912 surge o sistema Gauss-Kruger, em que os cálculos são logarítmicos e necessitam o cálculo de outros termos através de tabelas incômodas. Entre as duas grandes guerras mundiais diversos países da Europa e a ex-URSS adotaram essa projeção para a confecção de seus mapas militares.

Em 1950, os EUA propuseram uma combinação para abranger a totalidade das longitudes, e o sistema recebeu a denominação atual: Projeção Universal Transversa de Mercator (U.T.M.).

As especificações desse sistema, válido universalmente, hoje em dia, podem ser acompanhadas na figura 4.1 e são as seguintes:

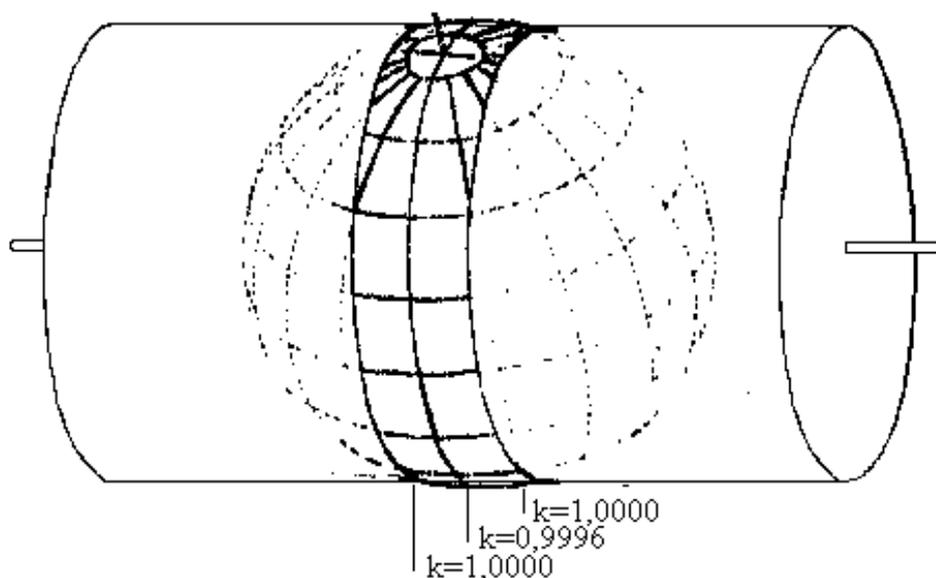


FIGURA 4.1 - Esquema da projeção UTM - esfera e cilindro secante

1) Projeção cilíndrica, conforme, de acordo com os princípios de Mercator-Gauss, com uma rotação de  $90^\circ$  do eixo do cilindro, de maneira a ficar contido no plano do equador (transversa). Essa configuração resultaria numa tangência entre o cilindro e a esfera ao longo de um meridiano.

Mas a seguir, adotam-se duas hipóteses suplementares que alteram ligeiramente essa imagem geométrica.

2) A adoção de um elipsóide de referência (em vez da Terra esférica), que inicialmente foi um para cada país ou grupo de países, mas que agora se vem procurando unificar através de um elipsóide internacional cujos parâmetros vêm sendo determinados com maior precisão (SAD-69, NWL-90, WGS-84, etc.).

3) Um fator de redução de escala  $K_0 = 1 - \frac{1}{2500} = 0,9996$  que corresponde a tomar um cilindro reduzido desse valor, de forma a tornar-se secante ao esferóide terrestre. Isso diminui o valor absoluto das deformações, e em lugar de termos uma só linha de verdadeira grandeza ( $K = 1$ ) e deformações sempre positivas (ampliações) passamos a ter duas linhas de deformação nula ( $k = 1$ ) com redução no interior ( $k < 1$ ) e ampliação no exterior ( $k > 1$ ).

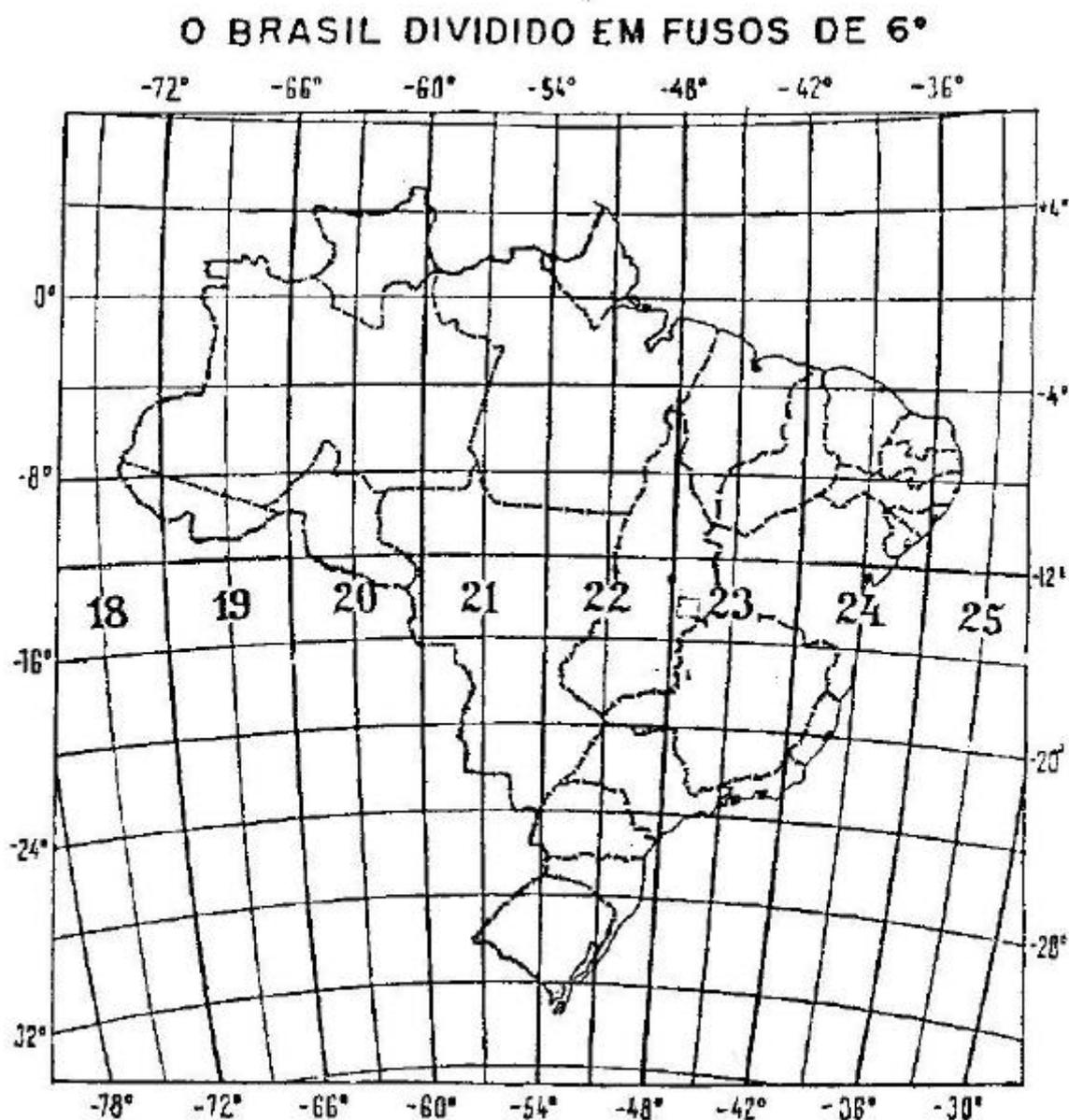
4) A adoção de 60 cilindros de eixo transversal, obtidos através da rotação do mesmo no plano do equador de maneira que cada um cubra a longitude de  $6^\circ$  ( $3^\circ$  para cada lado do meridiano central), mantendo as deformações dentro de limites aceitáveis. Essa largura já havia sido calculada pelo francês Tardi, em torno de 1930. Os fusos são numerados de 1 a 60, a partir do antimeridiano de Greenwich, sendo que os correspondentes ao nosso território estão representados na figura 4.2. Pela simetria do elipsóide de revolução, os cálculos são idênticos para todos os cilindros/fusos e os resultados são válidos para toda a terra. Como observação pertinente, o sistema LTM (Local Transversa de Mercator) segue todas essas especificações de 1) a 4), alterando somente o campo de aplicação para  $1^\circ$  em longitude em vez de  $6^\circ$ .

5) Em latitude os fusos são limitados ao paralelo de  $80^\circ N$  e  $S$  pois acima desse valor as deformações se acentuam muito. As regiões polares são representadas então por outro tipo de projeção, a Estereográfica Polar Universal.

OBS.:

1. Para calcular a longitude do meridiano central (MC) em função do fuso (F), pode-se utilizar a fórmula  $MC = 183 - 6.F$ . Para encontrar os limites do fuso, basta somar e subtrair  $3^\circ$ .

2. Para calcular o meridiano central (MC) em função da longitude (L) de um ponto, pode-se utilizar a fórmula  $MC = 6 \text{ INT}(L/6 + 0,5)$  ou, o que é a mesma coisa,  $MC = 6 \text{ INT}((L + 3) / 6)$ .



Fonte: Manual Técnico - Coordenadas planas sistema UTM, Diretoria do Serviço Geográfico, Rio de Janeiro, 1959

Figura 4.2 - Os fusos UTM do Brasil

6) Na representação plana, que se obterá pela abertura e planificação do cilindro, a origem das coordenadas (cruzamento do equador com o meridiano central) será acrescida em cada fuso das constantes 10.000.000 metros (só para o hemisfério sul) no eixo das ordenadas (NS) e de + 500.000 metros no eixo das abcissas (EW). Isto se faz para evitar coordenadas negativas que surgiriam na vertical no hemisfério sul e na horizontal à esquerda de qualquer meridiano central.

## 4.2 Relações fundamentais

Para resolvermos as equações práticas de transformação de coordenadas, de  $\Phi$  e  $\lambda$  para  $x$ ,  $y$  (N, E) e a inversa, necessitamos primeiro estabelecer algumas relações fundamentais, que simplesmente indicaremos, sem entrar em detalhes de dedução.

### a) no elipsóide

1 - comprimento de um arco elementar de meridiano:

$$dB = dm = M \cdot d$$

(obtido a partir da relação  $s = \theta \cdot R$ )

2 - comprimento de um arco elementar de paralelo:

$$dp = r \cdot d\lambda = N \cdot \cos \Phi \cdot d\lambda$$

3 - comprimento de um arco qualquer

$$ds^2 = dm^2 + dp^2, \text{ donde:}$$

$$ds = N \cdot \cos \phi \sqrt{\left(\frac{M d\phi}{N \cdot \cos \phi}\right)^2 + d\lambda^2}$$

### b) Na representação plana

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

### c) escala de ampliação

$$k^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{N^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot (dL^2 + dI^2)}, \text{ onde}$$

$$dL = \frac{M \cdot d\phi}{N \cdot \cos \phi} \text{ foi obtida através da latitude isométrica } L \text{ que vale:}$$

$$L = \frac{M}{N \cdot \cos \phi}$$

## 4.3 Dedução das equações de transformação

Indicaremos, somente a grande rasgos, os passos fundamentais dessa dedução, para que se tenha uma noção de sua origem.

a) **desenvolvimento em série**

O primeiro artifício a que se recorre é à teoria das variáveis complexas.

( $i = \sqrt{-1}$ , etc.) e se reescreve a escala de ampliação:

$$k^2 = \frac{(dx+idy) \cdot (dx-idy)}{N^2 \cdot \cos^2 f \cdot (dL+idI) \cdot (dL-idI)} =$$

$$= \frac{d(x+iy) \cdot d(x-iy)}{N^2 \cdot \cos^2 f \cdot d(L+iI) \cdot (L-iI)}$$

Como se trata de uma projeção conforme, essa escala  $m$  deve independe do azimute  $A$ , de uma direção qualquer, e para isso devemos ter:

$$x + iy = f(L + iI) \quad (f = \text{função de })$$

Desenvolvendo essa função em series de Taylor, teremos:

$$x + iy = f(L) + i\Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial L} + \frac{i^2}{2!} \Delta\lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} + \frac{i^3}{3!} \Delta\lambda^3 \frac{\partial^3 f}{\partial L^3} + \frac{i^4}{4!} \Delta\lambda^4 \frac{\partial^4 f}{\partial L^4} + \frac{i^5}{5!} \Delta\lambda^5 \frac{\partial^5 f}{\partial L^5} + \dots$$

Tendo em conta o valor das diferentes potências de  $i$  e igualando separadamente as partes reais e imaginárias chega-se a:

$$(1) x = f(L) - \frac{\Delta\lambda^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} + \frac{\Delta\lambda^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial L^4} - \frac{\Delta\lambda^6}{6!} \frac{\partial^6 f}{\partial L^6} + \dots \quad (1)$$

$$(2) y = \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial L} - \Delta\lambda^3 \frac{\partial^3 f}{\partial L^3} + \Delta\lambda^5 \frac{\partial^5 f}{\partial L^5} - \dots \quad (2)$$

b) **cálculo da função L e suas derivadas**

Essas expressões ficam resolvidas se conseguirmos uma expressão analítica para  $f(L)$  pois então podemos calcular as sucessivas derivadas de  $f(L)$  com relação a  $L$ :  $\frac{\partial f}{\partial L}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial L^2}$ , etc.

Isso pode ser feito impondo as demais condições do Sistema: que  $x$  seja contado a partir do equador, para o norte ou para o sul e que  $y$  seja contado a partir do meridiano central, e então vemos que:

a) para  $\Phi = 0$  e  $\Delta\lambda = 0$  devemos ter  $x = 0$  e  $y = 0$  (origem)

b) para  $\Phi \neq 0$  e  $\Delta\lambda = 0$  devemos ter  $x = B$  (arco de meridiano, contado a partir do equador)  
e  $y = 0$

Que levadas a (1) e (2) fornecem que  $f(L) = B$ , o que em princípio soluciona nosso problema, já que o arco de meridiano se calcula pela fórmula

$$B = \int_0^{\Phi} dm$$

Por outro lado, sabemos que  $dB = dm = Md\Phi$  ou  $\frac{dm}{d\Phi} = M$  e

$\frac{d\Phi}{dL} = \frac{N \cos \Phi}{M}$ , relações que nos permitem calcular as sucessivas derivadas  $f(L)$ . Por exemplo, a primeira derivada se calcula:

$$\frac{df(L)}{\partial L} = \frac{\partial B}{\partial L} = \frac{\partial B}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial L} = \frac{\partial m}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial L} = M \frac{N \cos \Phi}{M} = N \cos \Phi$$

Calculando as sucessivas derivadas podemos introduzi-las nas expressões (1) e (2), sendo que antes fazemos as seguintes simplificações de notação:

Resulta então:

$$\frac{N}{M} = 1 + v = 1 + n, \text{ com } n = e' \cos \Phi \quad (n = v)$$

$$\text{tg } \Phi = t$$

$$(N) \frac{x}{k_0} = B - N \text{sen} \Phi \cos \Phi \frac{\Delta \lambda^2}{2} + \frac{\Delta \lambda^4}{4} N \text{sen} \Phi \cos^3 \Phi (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4) - \dots$$

$$(E) \frac{y}{k_0} = \Delta \lambda N \cos \Phi + \frac{\Delta \lambda^3}{6} N \cos^3 \Phi (1 + n^2 - t^2) + \frac{\Delta \lambda^5}{120} N \cos^5 \Phi (5 - 18t^2 + t^4) + \\ + 14n^2 - 58t^2n^2 + 13n^4 + 2t^4n^2$$

### c) cálculo do arco de meridiano B

Para calcular B utilizamos a integral elíptica  $B = \int_0^{\Phi} dm$  onde

$$dm = Md\Phi = \frac{a(1 - e^2)d\Phi}{(1 - e \cdot \text{sen} \Phi)^{3/2}}$$

Essa integral não possui primitiva e do seu desenvolvimento em serie resulta na seguinte expressão:

$$B = a(A_0\Phi - A_2\text{sen}2\Phi + A_4\text{sen}4\Phi - A_6\text{sen}6\Phi)$$

com:

a - semi-eixo maior do elipsóide

$\Phi$  - latitude em radianos

$$A_0 = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6$$

$$A_2 = \frac{3}{8}(e^2 + \frac{1}{4}e^4 - \frac{15}{256}e^6)$$

$$A_4 = \frac{15}{256}(e^4 + \frac{3}{4}e^6)$$

$$A_6 = \frac{35}{3072}e^6$$

Essa fórmula, desenvolvida por Bomford, despreza os termos de ordem 8 ( $A_8$  e  $e^8$ ) e fornece a precisão de mm, que é mais do que suficiente. Os coeficientes  $A_0$ ,  $A_2$ ,  $A_4$  e  $A_6$  dependem exclusivamente do valor de  $e$ , ou de  $e^2 = \alpha(2 - \alpha)$  e portanto são constantes para um determinado elipsóide.

Para determinar as equações finais, devemos lembrar que além de limitar o número de termos das séries, deve-se utilizar o cilindro secante e não tangente (multiplicar por  $K_0 = 0,9996$ ) e que se somam as constantes 500.000 em  $y$  e 10.000.000 em  $x$  (para  $\Phi < 0$ ).

Então:

$$E = 500.000 + 0,9996.y$$

$$N = 0,9996.x (+ 10.000.000)$$

#### 4.4. Fórmulas de transformação de coordenadas geodésicas (F, l) em plano retangulares UTM (N,E) - Problema direto

As fórmulas desenvolvidas anteriormente funcionam perfeitamente, mas para a programação em calculadoras é preferível utilizar outras que simplificam a notação e facilitam o cálculo em cadeia. São as fórmulas utilizadas por manuais americanos, compiladas por T. Vincenty (TM 5.241-18).

$$* N = S_0 + S (+ 10.000.000 \text{ para } \Phi < 0)$$

$$* E = E_0 + 500.000$$

onde  $S_0 = B \cdot K_0$  (primeiro termo da série, arco de meridiano reduzido)

$\Delta S =$  outros termos da série

$$S_0 = A \frac{a}{1-\alpha} K_0 \{ \Phi - B \cos^2 \Phi \operatorname{tg} \Phi [1 + C \cos^2 \Phi (D \cos^2 \Phi - 1)] \}$$

valor para o SAD-69

<u>com:</u>	a - semi-eixo maior do elipsóide	6.378.160,00m
	$\alpha = 1 - b/a$ achatamento	f = 298,25
		$\alpha = 1/f$
	$K_0$ = fator escala no meridiano	$1 - \frac{1}{2500} = 0,999$
	$\Phi$ - latitude em radianos	
	$A = 1 - \frac{q}{4}(12 + q(31 \cdot q - 21))$	0,994976 985
	$B = \frac{q}{4}(12 + q(15 + 13q))$	0,005048373
	$C = \frac{5}{72}q(36 - 67q)$	0,004211273265
	$D = \frac{28q}{9}$	0,0052243679
	$q = (2f - 1)^{-1}$	0,001679261125

com: a,  $\alpha$ ,  $k_0$  e  $\Phi$  - já definidos anteriormente

$$t = \operatorname{tg} \Phi$$

$$p = \Delta \lambda \cos \Phi$$

com  $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$  em radianos

$\lambda_0$  = meridiano central do fuso

$$n^2 = e'^2 \cos^2 \Phi$$

$$\text{com } e'^2 = \frac{2f-1}{f^2-2f+1}$$

$$v = \sqrt{1+n^2}$$

#### 4.4.1) **Exemplo: Marco municipal do IGG (Cidade Universitária - SP)**

Dados:

$$\Phi = -23^{\circ} 33' 40,202077'' \text{ (Sul)}$$

$$\lambda = -46^{\circ} 44' 02,0460'' \text{ (WGr - a oeste de Greenwich)}$$

$$\lambda_0 = -45^{\circ} \text{ (WGr) (fuso 23)}$$

Resultados:

$$N = 7.393.277,200 \text{ m}$$

$$E = 323.030,998 \text{ m}$$

#### 4.4.2) **Exemplo: Marco geodésico**

Dados:

$$\Phi = -10^{\circ} 04' 38,748''$$

$$\lambda = -65^{\circ} 18' 57,219''$$

$$\lambda_0 = -63^{\circ}$$

Resultados

$$N = 8.885.124,771 \text{ m}$$

$$E = 246.182,478 \text{ m}$$

#### 4.4.3) **Exemplo: Outro marco** (exemplo fornecido pelo IBGE)

$$\Phi = -16^{\circ} 23' 30,7554''$$

$$\lambda = 54^{\circ} 51' 22,1918''$$

$$\lambda_0 = 57^{\circ}$$

Resultados:

$$N = 8.186.501,118 \text{ m}$$

$$E = 728.965,993 \text{ m}$$

#### 4.5 Fórmula de transformação de coordenadas - UTM (planos retangulares, N, E) para geodésicas ( F, l ) - Problemainverso

Seguindo uma dedução bastante análoga à anterior, chega-se a fórmula final, apropriada para os cálculos computacionais, e também elas derivadas dos manuais do U.S Army.

Deve-se proceder da seguinte maneira:

##### a) Cálculopreliminar(latitudauxiliar F<sub>f</sub>)

$$\Phi_f = W + F \cos^2 W (1 + g \cos^2 W (1 + H \cos^2 W))$$

onde: 
$$W = \frac{(N - N_0)(1 - \alpha)}{K_0 A a}, \text{ em radianos}$$

N - coordenada norte, fornecida

$N_0 = 10.000.000$  (p/ o hemisfério sul)

0 (p/ o hemisfério norte)	<u>valores no SAD-69</u>
$K_0 =$ fator escala	0,9996
$\alpha =$ achatamento = 1/f	1 / 298,25
a = semi-eixo maior	6.378.160,00
$A = 1 - q/4.(12 + q.(31.q - 21))$	0,994976985
$F = 1 - A + 0,14 \times 10^{-9}$	0,0050230134
$G = 3,5.q. (1 - q/0,3269)$ ou $7q/2 (1 - 51q/156)$	0,005847222098
H = 1,388.G	0,008115944272
$q = (2f - 1)^{-1}$ ou $(\frac{2}{\alpha} - 1)^{-1}$	0,001679261125

## b) fórmulas

Chamando ainda  $t = \operatorname{tg}\Phi$   
 e  

$$Q = \frac{v}{a} \frac{(1-\alpha)}{k_0} (E - E_0)$$

$$v = \sqrt{1+n^2}$$

com:  $n^2 = e'^2 \cos^2 \Phi_f$

NoSAD-69

$$e'^2 = \frac{e^2}{1+e^2}$$

0,0067396608

E - coordenada Este, fornecida

$$E_0 = 500.000 \text{ m}$$

a,  $K_0$ ,  $\alpha$  já definidos anteriormente

Temos finalmente, em radianos:

$$\Phi = \Phi_f + \frac{tQ^2}{2} (-1 - n^2 + \frac{Q^2}{12} (5 + 3(t^2(1 - n^2(2 + 3n^2)) + n^2(2 - n^2))) - \frac{Q^2}{2} (4 + 3t^2(2 + t^2)))$$

$$\Delta\lambda = \frac{Q}{\cos\Phi_f} (1 - \frac{Q^2}{6} (1 + 2t^2 + n^2 - \frac{Q^2}{20} (5,05 + 4t^2(7 + 6t^2))))$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

## 4.5.1) Exemplos para teste:

Marco 1Dados

$$N = 7.469.610,04 \text{ m (hemisfério Sul)}$$

$$E = 691.653,17 \text{ m}$$

$$\lambda_0 = 45^\circ \text{ (WGr)}$$

Resultados

$$\Phi = -22^\circ 52' 13,227''$$

$$\lambda = -43^\circ 07' 54,822''$$

Marco 2Dados

$$N = 464.281,61 \text{ m (hemisfério Norte)}$$

$$E = 745.159,24 \text{ m}$$

$$\lambda_0 = -63^\circ$$

Resultados

$$\Phi = 4^\circ 11' 50,214''$$

$$\lambda = -60^\circ 47' 29,340''$$

#### 4.6 Observação sobre fórmula e precisão

As fórmulas são genéricas, mas as constantes devem ser determinadas para cada elipsóide em função de seus parâmetros ( $a$  e  $\alpha$ ). Alguns programas apresentados ao final (anexos) pressupõem que se adota o SAD-69 e assim, caso se pretenda utilizar outro, é preciso tomar o cuidado de recalculas constantes.

As fórmulas costumam variar bastante - também as que apresentaremos a seguir em função dos desenvolvimentos em série e do número de termos levados em consideração e também em função de algumas simplificações que se fazem em determinadas passagens, por ex.,

A precisão depende do número de termos adotado e em geral é fortemente condicionada pelo cálculo do primeiro coeficiente, que é o mais significativo. Por exemplo, o comprimento de arco de meridiano.

Faltando em termos gerais, e sem considerar as determinações por satélite e VLBI, as coordenadas geográficas ( $\Phi$ ,  $\lambda$ ) são determinadas astronomicamente e estão sujeitas a desvios médios da ordem de 0,01 a 0,02", sem falar no acúmulo de erros devido ao transporte na rede geodésica. De maneira que esse valor equivale a um erro linear de aproximadamente 50 centímetros na superfície da Terra, o que significa que as coordenadas plano-retangulares (N, E) tem um significado convencional no que diz respeito às frações de metro.

De tudo isso segue-se que o milímetro é absolutamente ilusório nos cálculos. Podem e devem ser levados em conta para evitar propagações de erros e com meio de verificar a exatidão das formulas, mas nunca como um índice de precisão.

A correspondência entre a precisão de  $(\Phi, \lambda)$  e  $(N, E)$  pode ser avaliada sabendo que um arco de 1" corresponde a aproximadamente 30 m (30,86) sobre a superfície da Terra. Então, para obter 0,001" precisamos a precisão de 3 mm (e vice-versa). Mas afinal das contas, como dizia alguém, "pode-se concluir que as coordenadas de vértices com precisão de milímetros, então erradas nos decímetros.

Finalmente, vale a pena dizer que foi publicada recentemente pelo IBGE uma tabela para o cálculo dessas coordenadas.

É um trabalho muito útil para a verificação e ajuste de fórmulas - como o foram as tabelas do passado - mas acreditamos que já estamos entrando em outra era, e as 280 páginas de números poderiam ter sido substituídas por 6 (seis) de um programa computacional adequado, que além disso não cairá em desuso pela adoção futura de outro elipsóide.



## CAPÍTULO V - CONVERGÊNCIA DE MERIDIANOS

### 5.1 Sentido físico

Na projeção UTM, o meridiano central de cada fuso e o equador são retas, ao passo que os meridianos (convergem nos pólos) e os paralelos são curvas, como se pode concluir examinando as equações de transformação.

$$x = N = B(\Phi) + \frac{\Delta\lambda^2}{2!} N \operatorname{sen}\Phi \cos\Phi + \frac{\Delta\lambda^4}{4!} N \operatorname{sen}\Phi \cos^3\Phi(\dots) \quad (5.1)$$

$$y = E = \Delta\lambda N \cos\Phi + \frac{\Delta\lambda^3}{3!} N \cos^3\Phi(\dots) \quad (5.2)$$

Fazendo  $\Phi$  constante na primeira,  $N$  torna-se função de  $\Delta\lambda$ , sendo uma função parabólica com termos ao quadrado e à quarta (e mais), e assim os paralelos transformados ( $\Phi$  constante) apresentam-se simétricos com relação ao equador. Basta ver que:

$$N(\Delta\lambda) = N(-\Delta\lambda) \text{ pois } (\Delta\lambda)^{2n} = (-\Delta\lambda)^{2n}$$

Fazendo  $\Delta\lambda$  constante na segunda,  $E$  torna-se função de  $\cos\Phi$ , em potências ímpares, e os meridianos transformados são simétricos com relação ao meridiano central, pois  $E(\Phi) = -E(-\Phi)$ .

A representação esquemática é a que se vê na figura 5.1.

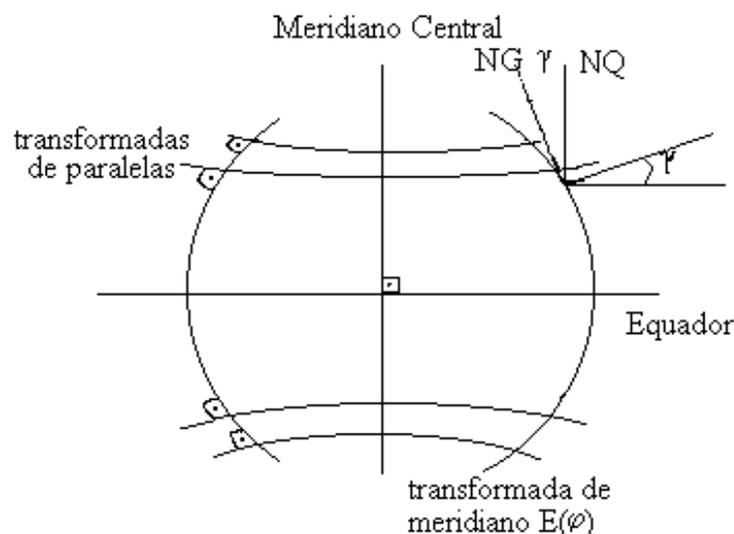


Figura 5.1 - Convergência de meridiano ( $\gamma$ ) e rede transformada de meridianos e paralelos.

Como a projeção é conforme, os ângulos se mantêm e então as transformadas de meridianos e paralelos cruzam-se ortogonalmente.

A concavidade de cada curva é função do quadrante em que se encontra e se pode enunciar a regra de que a transformada geodésica apresenta concavidade voltada para o meridiano central (meridianos) ou para o pólo do hemisfério em que se encontra (paralelos).

Chama-se então convergência de meridiano o ângulo  $\gamma$  que a tangente a um meridiano, num determinado ponto, faz com uma paralela ao meridiano central. Pode-se dizer que é também o ângulo que o norte geográfico (tangente à transformada de meridiano) faz com o norte da quadrícula (paralelo ao meridiano central, vertical da folha).

Por decorrência o ângulo  $\gamma$  é também o ângulo que a tangente ao paralelo transformado faz com uma paralela ao equador.

## 5.2 Análise do sinal da convergência meridiana (g)

Pode-se analisá-lo facilmente tomando um vértice em cada quadrante e traçando o norte da quadrícula (NQ - vertical) e o norte geográfico (NG - tangente à transformada de meridiano).

Quando NG estiver à direita de NQ (voltado para E, no sentido do horário) será positivo e quando NG estiver à esquerda (voltado para W, sentido anti-horário)  $\gamma$  será negativo. Com relação aos quadrantes o sinal é contrário ao da tangente trigonométrica; é o que se pode ver na figura 5.2.

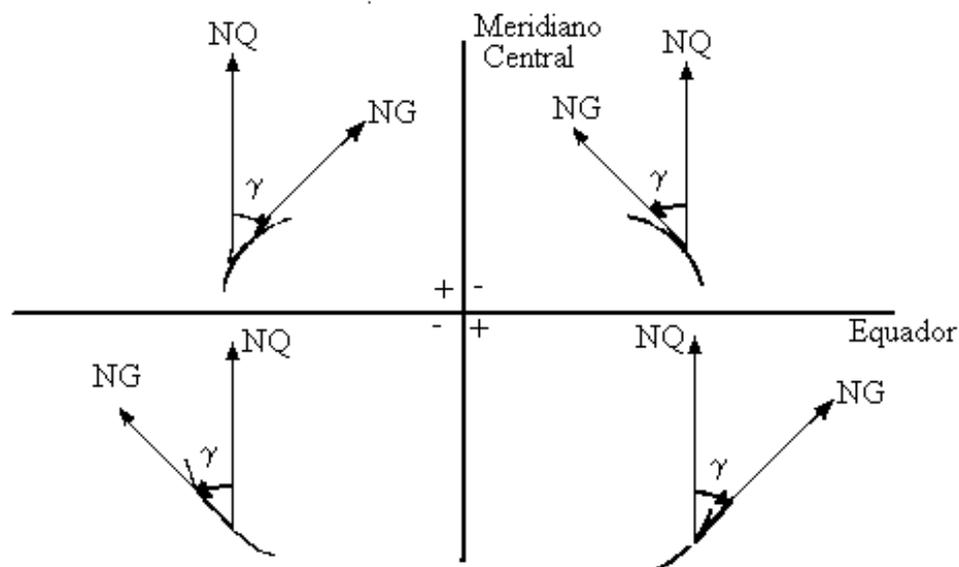


Figura 5.2 - Sinal de  $\gamma$

Há uma distinção teórica e também uma diferença de valor numérico entre a convergência de meridiano sobre o elipsóide e esta que estamos analisando, que a rigor se denomina convergência plana de meridianos. No entanto, dentro dos limites usuais de projeção, podemos confundir as duas quantidades.

### 5.3 Equações para o cálculo da convergência meridiana

Como anteriormente indicaremos somente os principais passos da dedução, que se inicia pela consideração da figura 3.3.

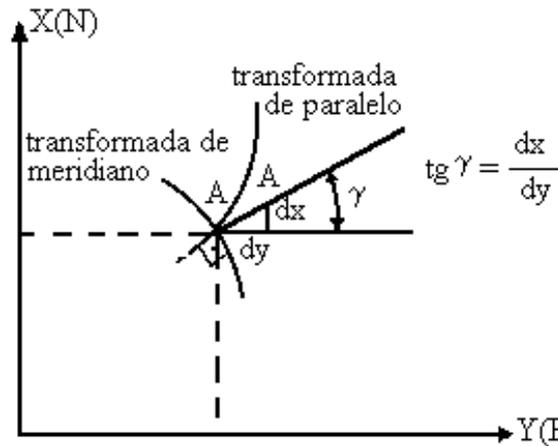


Figura 5.3 - Convergência de meridiano

$$\text{Assim, temos: } \operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy} = \frac{dx / d\lambda}{dx / d\lambda} \quad (5.3)$$

Para calcular o numerador e o denominador basta derivar as equações de x e y (5.1 e 5.2) com relação a  $\lambda$ ;

donde se tem:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta\lambda N \operatorname{sen} \Phi \cos \Phi + \Delta\lambda^3 / 6 \cdot N \operatorname{sen} \Phi \cos \Phi + (\dots)}{N \cos \Phi + \frac{\Delta\lambda^2}{2} N \cos^3 \Phi + (\dots)} \quad (5.4)$$

Expressão que pode ser simplificada, dividindo tudo por  $N \cos \Phi$ , reduzindo o número de termos nas séries, etc.

Além disso, desenvolvendo  $\gamma$  em série tem-se:

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \gamma + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \gamma \dots \quad (5.5)$$

Trabalhando (5.4) e (5.5) vem finalmente a fórmula prática de cálculos, com  $\gamma$  expresso em radianos e em função de  $\Phi$  e  $\lambda$ :

$$\gamma = \Delta\lambda \operatorname{sen} \Phi + \frac{\Delta\lambda^3}{3} \operatorname{sen} \Phi \cos^2 \Phi (1 + 3n^2 + 2n^4) + \frac{\Delta\lambda^5}{15} \operatorname{sen} \Phi \cos^4 \Phi (2 - t^2)$$

com  $t = \operatorname{tg} \Phi$

$$n^2 = e'^2 \cos^2 \Phi \quad e'^2 = 0,0067396608$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2}$$

Por outro lado, para o cálculo de  $\gamma$  em função das coordenadas planas ( $N_1$   $E_1$ ), recorre-se a outros artifícios como exprimir  $\Delta\lambda$  em função das coordenadas planas desse ponto e substituir  $\text{sen}\Phi$  por  $\text{sen}(\Phi_1 - (\Phi_1 - \Phi))$ , edesenvolvê-lo em série.

Trabalhando matematicamente as expressões chega-se a:

$$g = \frac{E'_1}{N_1} t_1 \left[ 1 - \frac{E_1^2}{3N_1^2} (1 + t_1^2 - n_1^2 - 2n_1^4) + \frac{E_1^4}{N_1^4} \frac{(2 + 5t_1^2 + 3t_1^4)}{15} \right]$$

com  $t = \text{tg}\Phi$

$$n^2 = e'^2 \cos^2 \Phi_1$$

$$E'_1 = E_1 - 500,000$$

$$N_1 = a(1 - e^2 \text{sen}^2 \Phi_1)^{\frac{1}{2}}$$

SAD-69:

$$e'^2 = 0,0067396608$$

$$a = 6.378.160,00$$

$$e^2 = 0,00669451491$$

#### 5.4 Para teste tem-se o seguinte exemplo

Encontra-se abaixo a fórmula vista anteriormente e, reagrupada para facilitar o cálculo:

$$\gamma^{\text{rd}} = \Delta\lambda^{\text{rd}} \text{sen}\Phi \left[ 1 + \frac{1}{3} (\Delta\lambda \cos\Phi)^2 (1 + 3n^2 + 2n^4 + \frac{1}{5} (\Delta\lambda \cos\Phi)^2 (2 - t^2)) \right]$$

Dados:  $\Phi = -16^\circ 23'30,7554''$

$$\lambda = 54^\circ 51'22,1918'' \quad (\text{W})$$

$$\lambda_0 = 57^\circ \quad (\text{W})$$

Resultado:  $\gamma = 0^\circ 36' 18,962''$

## CAPÍTULO VI - FATOR ESCALA

### 6.1 Sentido físico

Sendo a projeção conforme, a escala de representação ou fator escala  $m$ , independe da direção, mas varia de ponto a ponto, já que não é possível manter diversas propriedades ao mesmo tempo.

No esquema de um cilindro transverso tangente à esfera, o fator escala é igual à unidade ao longo do meridiano de tangência e cresce simetricamente para ambos os lados. É o que se esquematiza na figura 6.1.

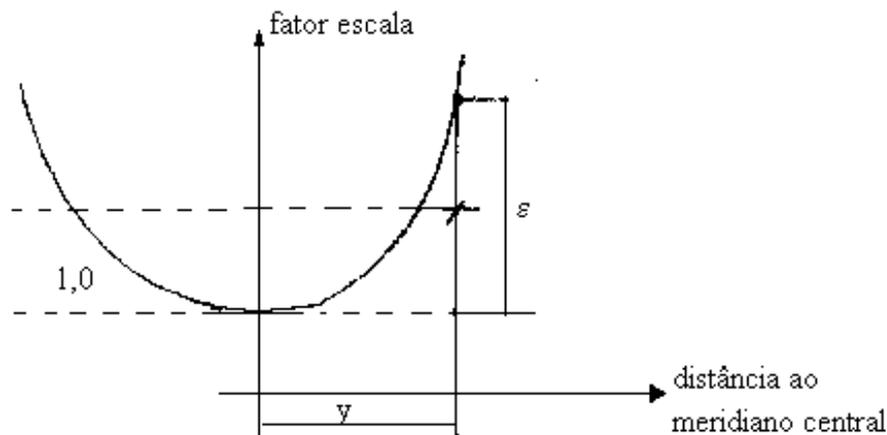


Figura 6.1

No esquema de um cilindro secante existem duas linhas de verdadeira grandeza, sendo que o fator escala é menor do que 1,0 na região interna (redução) e maior do que a unidade no exterior (ampliação), conforme se esquematiza na figura 6.2.

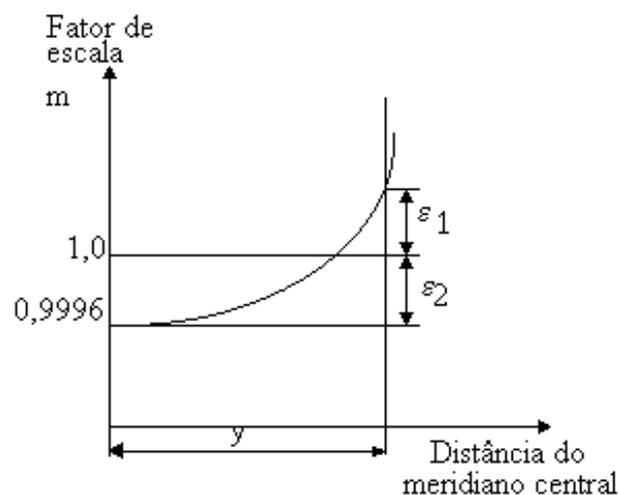


Figura 6.2

Como se pode notar o segundo esquema minimiza as distorções em valor absoluto. Um erro  $E$  que ocorre a uma distância  $y$  do meridiano central na primeira hipótese, transforma-se em  $E_1 = E - E_2$ .

O fator escala  $m$ , pode ser definido como sendo um número (dado por uma expressão calculada num ponto) que multiplicado pela distância sobre o elipsóide fornece a distância em planta.

$$k = k_0 \left(1 + \frac{E_1^2}{2MN}\right) \quad d_p = k \cdot d$$

$$k = k_0 \left(1 + \frac{y^2}{2R_m^2}\right)$$

com  $K_0 = 0,9996$  (SAD-69)

$F = E_1$  afastamento do meridiano central

$$R_m = \sqrt{M \cdot N} = 6,371 \text{ Km}$$

Essa equação, uma parábola do 2º grau, permite uma boa aproximação do fator escala. Para que se tenha uma sensibilidade física da fórmula, apresentamos a seguinte tabela:

Y	(Km)m	aumento por Km
0	1 - 0,000400	-0,400 m
100	1 - 0,000275	-0,275 m
180	1,000000	0,000 m
200	1 + 0,000100	+0,100 m
300	1 + 0,000720	+0,720 m
400	1 + 0,001600	+1,600 m

## **6.2 Fórmulas a serem utilizadas em um programa computacional**

A seguir, apresentamos fórmulas que podem ser utilizadas para se desenvolver um programa de cálculo para o fator de escala:

$$K = K_0 \cdot f \quad K_0 = 0,9996$$

$$f = 1 + \frac{\Delta\lambda^2 \cos^2 \Phi}{2} (1 + n^2) + \frac{\Delta\lambda^4 \cos^4 \Phi}{24} (5 - 4t^2 + 14n^2 + 13n^4 - 28t^2n^2 + 4n^6 - 48t^2n^4 - 24t^2n^6) + \frac{\Delta\lambda^6 \cos^6 \Phi}{720} (61 - 148t^2 + 16t^4)$$

ou em função das coordenadas plano retangulares:

$$k = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{E_1'}{N_1} \right) (1 + n_1^2) + \frac{1}{24} \left( \frac{E_1'}{N_1} \right)^2 (1 + 6n_1^2)$$

$$1 + \frac{1}{2} \left( \frac{E_1'}{N_1} \right) \left[ (1 + n_1^2) + \frac{1}{12} \left( \frac{E_1'}{N_1} \right)^2 (1 + 6n_1^2) \right]$$

$$k = 0,9996 \left\{ 1 + \frac{\Delta x^2 \cos^2 \Phi}{2} \left[ 1 + n^2 + \frac{\Delta x^2 \cos^2 \Phi}{12} (5 - 4t^2) \right] \right\}$$



## **CAPÍTULO VII - PROBLEMAS TÍPICOS**

### **7.1 Introdução**

Para que se tenha uma idéia de alguns problemas mais comuns, apresentamos a seguir casos típicos, sem ter a pretensão de esgotá-los e, na maior parte dos casos, sem dar a solução matemática mas somente o sentido físico dos problemas.

Omitimos também, os levantamentos de campo, que também exigiriam mais de um capítulo, para uma explicação razoável.

### **7.2 Monografia de pontos**

São os problemas já tratados e bem descritos:

#### **a) transformação de coordenadas**

- problema direto: geodésicas ( $\Phi$  e  $\lambda$ ) em UTM (N,E)
- problema inverso: UTM (N,E) em geodésicas ( $\Phi$  e  $\lambda$ )

#### **b) Cálculo de convergência meridiana**

- através das coordenadas geodésicas ( $\Phi$  e  $\lambda$ )
- através das UTM (N,E)

#### **c) Cálculo do fator escala**

- através das coordenadas geodésicas ( $\Phi$  e  $\lambda$ )
- através das UTM (N,E)

Obs.: Existe, a rigor um fator escala para cada ponto. Em pequenas distâncias pode-se tornar um fator uniforme, o do centro da região. Mas para bases longas, pode ser necessário utilizar uma "média" de maior precisão para determinar m:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{k_1} + \frac{4}{k_3} + \frac{1}{k_2} \right)$$

onde os  $m_i$ , calculados pelas fórmulas apresentadas, são os fatores de escala nos pontos:

$k_1$  - num dos extremos da base

$k_2$  - no outro extremo

$k_3$  - no ponto médio

### 7.3 Mudança de elipsóide de referência

#### a) mudança de figura geométrica

Para a mesma rede de vértices, com coordenadas calculadas e ajustadas a partir de um datum origem, pode-se substituir a figura geométrica primitiva ( $a_1, \alpha_1$ ) por uma outra ( $a_2, \alpha_2$ ), o que corresponde a aplicar as mesmas fórmulas de transformação, com as mesmas coordenadas ( $\Phi_j, \lambda_j$ ) mas alterando os parâmetros do elipsóide.

#### b) Mudanças de datum vertical

Corresponde a alterar o marégrafo de referência, por exemplo, passar da referência Torres (RS) para Imbituba (SC). Alteram-se portanto os valores das cotas ortométricas/dinâmicas da rede geodésica.

Essa alteração costuma refletir-se indiretamente, nos parâmetros de transformação de elipsóide.

#### c) mudança da datum horizontal

Corresponde a tomar um novo vértice como origem do sistema (cadeia nacional de triangulação de 1ª ordem), com coordenadas geodésicas determinadas astronômica, com grande precisão. Ou então, pode-se determinar novamente, com maior precisão, as coordenadas geodésicas de um mesmo ponto físico.

Em qualquer dos casos, o resultado final são novas coordenadas geodésicas, ( $\Phi$  e  $\lambda$ ) para os marcos da rede.

Como exemplo de data origem temos Chuá, Astro-Chuá, Córrego Alegre, La Canoa, etc.

\* Nas mudanças de elipsóide costuma-se utilizar as equações deduzidas por Molodensky, onde os parâmetro de transformação  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  devem ser determinados por um estudo especial que utiliza o método dos mínimos quadrados aplicados a uma série de vértices em que se conhecem as coordenadas nos dois sistemas.

#### 7.4 Reduções nas distâncias

Tendo sido medida uma distância  $s$ , em campo, através de trena, diastímetro ou distanciômetro eletrônico, podem ser necessárias as seguintes correções ou reduções conforme o que se deseja:

a) correção de fatores meteorológicos - para os distanciômetros. Alguns possuem botões para introdução automática da correção.

b) redução ao horizonte - para as distâncias medidas na inclinada. Corresponde ao valor horizontal da distância, considerando-se como tendo sido medida na altitude média da base. Denomina-se também redução ao plano topográfico.

c) redução ao nível médio dos mares - Dada uma distância medida sobre a terra (arco curvo) na altitude  $h_m$ , corresponde a encontrar a distância equivalente na altitude  $h = 0$  (nível médio dos mares), que contém as mesmas verticais nos extremos da base.

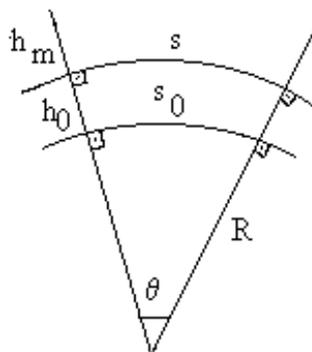


Figura 7.1

d) redução ao geóide e ao elipsóide - São reduções semelhantes à anterior (c), em que se passa de uma distância sobre a superfície real para outras duas superfícies (geóide e elipsóide) situadas abaixo.

Implicam no conhecimento dessas duas outras superfícies de referência, sua forma geométrica e amarração com a superfície da terra, na região de medição.

O geóide, se bem estudado e conhecido, pode ser referido ao elipsóide através de cartas de curvas de iso-alturas do geóide sobre um elipsóide de referência, também conhecidas como ondulações do geóide.

Diferentes aproximações calculam um raio médio no elipsóide ( $\sqrt{M.N}$ ) e tomam a esfera média local com esse raio.

Pode-se também calcular o raio de curvatura na direção em que a base foi medida.

e) **redução corda - arco**

Corresponde a passar da distância medida (um arco sobre uma superfície) à corda que une os dois extremos em linha reta.

f) **redução à planta UTM**

Corresponde a multiplicar a distância pelo fator de escala para poder lançá-la na projeção plana UTM.

### 7.5 **Reduções angulares**

Tendo sido determinado o azimute  $A$  de uma direção, por processo astronômico ou por transporte de direções, pode ser necessária alguma das seguintes reduções, conforme o que se deseja:

a) **azimute magnético** - relaciona-se com o azimute elipsóidico através da declinação magnética. Um aponta para o norte verdadeiro e outro para o magnético (variável com o local e com o tempo). Em geral, no uso mais comum, parte-se do magnético e soma-se a declinação magnética para obter uma aproximação do norte verdadeiro. É um processo utilizado somente em levantamentos de pouca responsabilidade.

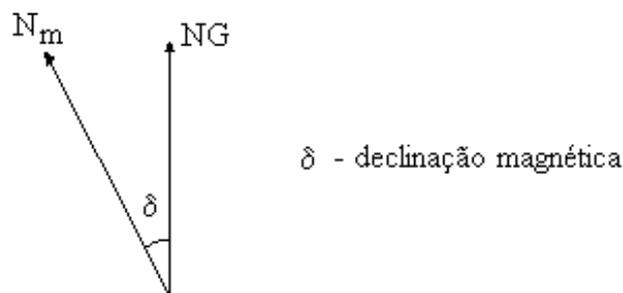


Figura 7.2

b) **azimute da quadrícula**

Relaciona-se com o azimute elipsóidico através da convergência de meridiano ( $\gamma$ ). Basta somar ou subtrair  $\gamma$  para passar de um a outro.

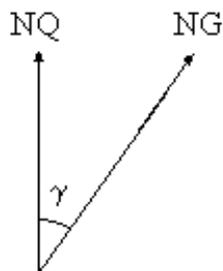


Figura 7.3

c) **azimute projetado ou da carta (t)**

É o azimute que uma linha qualquer ab (projetada de AB) faz com o meridiano central ou com o norte da quadrícula.

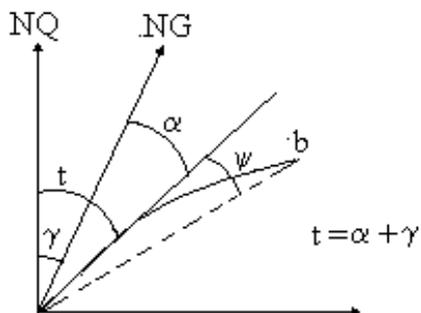


Figura 7.4

d) **redução angular ( \psi ) arco-corda**

Em alguns casos de maior precisão, é preciso levar em conta também a redução  $\psi$  (cfr.p. ex. a figura anterior), que se calcula pela fórmula:

$$\psi = \left(\frac{N}{M} - 1\right) \frac{s^2 \operatorname{sen} 2A}{8N^2}$$

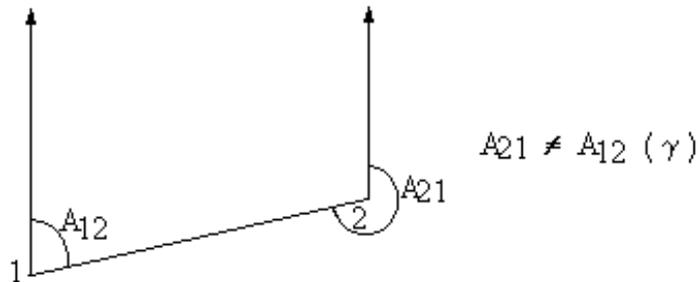
ou

$$\psi = \frac{3,44 \times 10^4 \times \Delta N (2E'_1 + E'_2)}{MN}$$

## 7.6 Transporte de coordenadas elipsóidicas

### a) Problema direto

Dados  $\Phi_1, \lambda_1, A_{12}$  e  $S_{12}$  (azimute e distância elipsoidal), calcular as coordenadas  $\Phi_2, \lambda_2$  do ponto 2. e  $A_{21}$ .



### b) Problema inverso

Dados  $(\Phi_1, \lambda_1)$  e  $(\Phi_2, \lambda_2)$  calcular  $s_{12}, A_{12}$  e  $A_{21}$  e  $\gamma$ .

## 7.7 Transporte de coordenadas UTM

### a) Problema direto

Dadas as coordenadas  $(N_1, E_1)$ ,  $s_{12}, A_{12}$ , calcular as coordenadas  $N_2, E_2$  do ponto 2.

### b) Problema inverso

Dadas as coordenadas  $(N_1, E_1)$  e  $(N_2, E_2)$ , calcular  $s_{12}, A_{12}, A_{21}$  e  $\gamma$ .

\* Estes problemas podem ser aplicados em pontos isolados ou, o que é mais comum, em poligonais, realizando-se os cálculos em sequência. Para poligonais fechadas, volta-se ao ponto de partida. Planilhas especiais facilitam o cálculo.

## 7.8 Roteiro simplificado para instalação de marcos de referência para obras de engenharia

- levantamento de plantas, mapas e marcos existentes junto aos órgãos responsáveis (EMPLASA, IGC, IBGE,...);
- reconhecimento "in loco" dos marcos (de 1ª, 2ª ou 3ª ordem) mais próximos de obra em questão e obtenção de suas coordenadas;
- planejamento da instalação de marcos nas proximidades da obra e do transporte de coordenadas. Esquema (triangulação, poligonação);

- implantação dos marcos, visadas, medições de ângulos e distâncias;
- tratamento dos dados de campo (redução angulares e lineares) e transporte de coordenadas.
- de posse de marcos conhecidos, na obra, sistema de coordenadas locais para locação de pontos e projetos.

Obs. final: futuramente este capítulo deverá ser mais desenvolvido com a apresentação de fórmulas, planilhas, exemplos de cálculo e programas de computação.