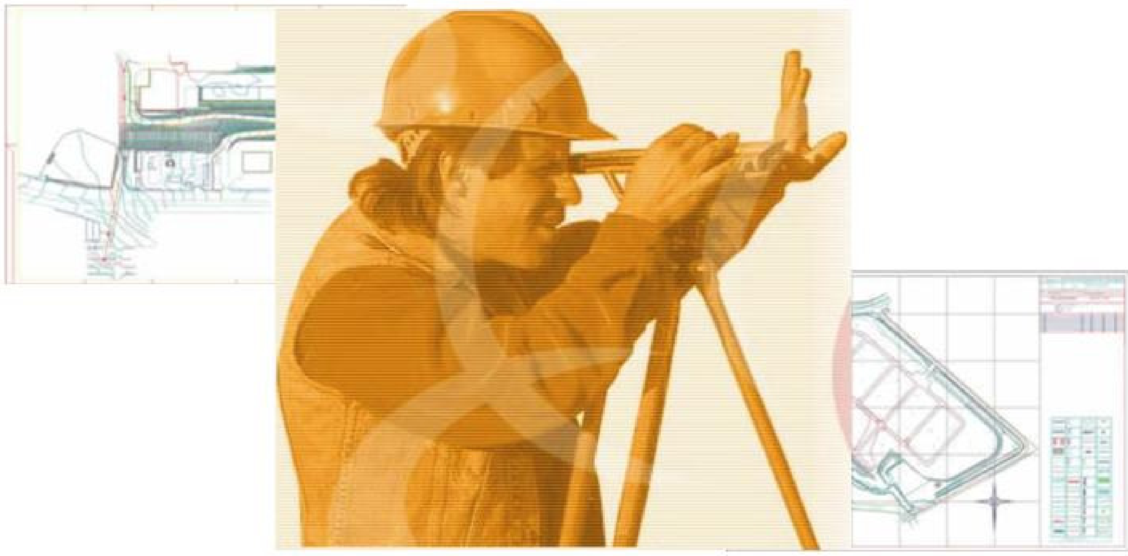
TOPOGRAFIA

Matemática Básica: Geometria



MATEMÁTICA BÁSICA

NOÇÕES DE GEOMETRIA

Antonio de Pádua M. Fragassi

TOPOGRAFIA

Matemática Básica: Geometria

SUMÁRIO

Antonio de Pádua M. Fragassi

1 - NOÇÕES DE GEOMETRIA

A palavra Geometria tem origem grega e significa medida da Terra (geo = Terra, metria = medida).

Os estudos iniciais sobre Geometria Plana estão relacionados à Grécia Antiga, também pode ser denominada Geometria Euclidiana em homenagem a Euclides de Alexandria (360 a.C. - 295 a.C.), grande matemático educado na cidade de Atenas e frequentador da escola fundamentada nos princípios de Platão.

A Geometria está apoiada sobre alguns postulados, axiomas, definições e teoremas, sendo que essas definições e postulados são usados para demonstrar a validade de cada teorema. Alguns desses objetos são aceitos sem demonstração, isto é, você deve aceitar tais conceitos porque os mesmos parecem funcionar na prática!

A geometria é o estudo das formas. Utiliza números e símbolos para descrever as propriedades dessas formas e as relações entre elas. É importante compreender a geometria, para dar resposta a questões como: Que forma tem? De que tamanho é? Caberá?

A geometria proporciona os conhecimentos necessários para encontrar a resposta a estas questões.

Para se aprender Geometria é necessário partir de três noções importantes, adotadas sem definição e por essa razão, chamadas de primitivas geométricas: Ponto, Reta e Plano

Ponto

Ponto é um ente matemático criado para tratar ou representar objetos do nosso dia-a-dia que não possuem uma grandeza definida, ou seja, são adimensionais, pois não se é possível determinar medidas (Largura, altura e comprimento) para representá-los.

Por exemplo:

"A marca de uma ponta de lápis bem fina no papel dá a idéia do que é um ponto"

As estrelas apresentadas no céu podem ser consideradas como pontos.

Costuma-se representar pontos por letras maiúsculas do nosso alfabeto.

• P

Toda figura geométrica é considerada um conjunto de pontos.

Para pensar.

Quais outros objetos que poderíamos tratar como entidades puntiformes? Dê alguns exemplos.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

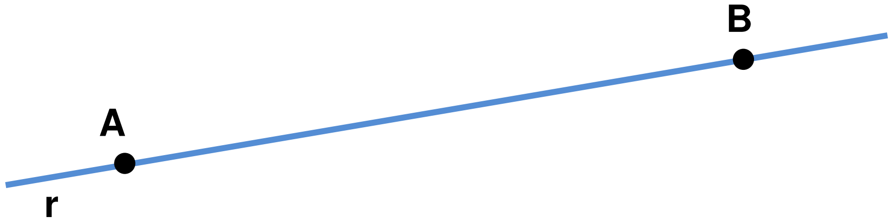
____

Reta

Uma linha corresponde ao deslocamento de um ponto. Esse deslocamento poderá gerar linhas com desenvolvimento curvo ou reto. Uma reta corresponde ao deslocamento de um ponto cuja direção permanece constante, ou seja, corresponde ao conjunto de pontos que obedecem a um critério específico, isto é, não mudam de direção. Quando existe mudança de direção, tem-se uma curva.

Uma linha traçada com régua é uma reta. Se imaginarmos agora uma linha reta sem começo, meio, fim ou espessura, teremos a compreensão da idéia de reta definida pela matemática. As retas são representadas por letras minúsculas do nosso alfabeto.

Se definirmos dois pontos distintos (A) e (B), podemos dizer que estes pontos definem uma única reta (r), ou seja, existe apenas uma única reta entre todas as possibilidades possíveis que passa pelo ponto (A) e (B) simultaneamente.



Podemos obter alguns exemplos de retas quando observamos o nosso ambiente. Por exemplo, um fio de cabelo esticado poderia ser tratado como uma reta.

Um raio de luz poderia ser tratado como uma reta.

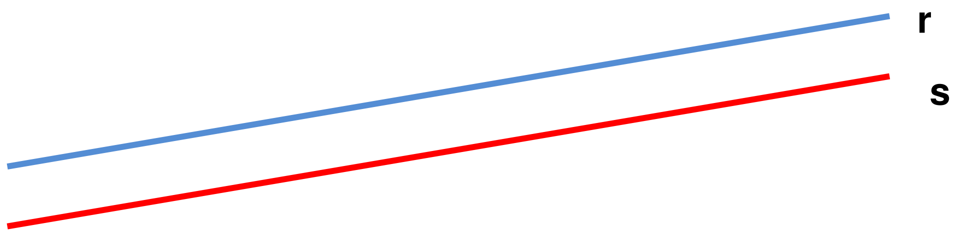
Um raio lazer muito fino poderia ser considerado como uma reta

Para pensar.

Quais outros objetos que poderíamos tratar como uma reta? Dê alguns exemplos.

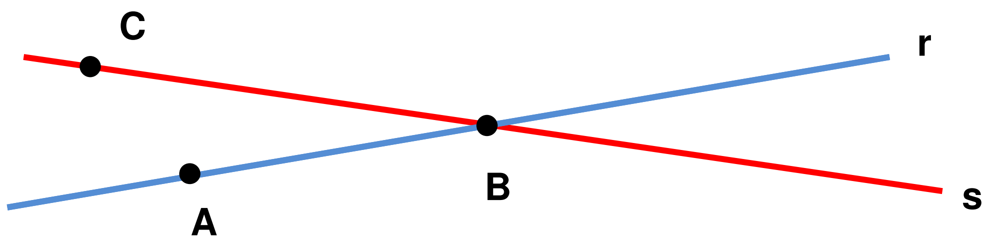
As retas existentes em um plano apresentam particularidades quando verificado o posicionamento relativo de uma em relação às outras. Dessa observação podemos dizer que as retas poderão ser paralelas ou concorrentes.

As retas paralelas são aquelas em que não existem pontos comuns ou aquelas que mantêm uma mesma distância entre si.



Diz-se que r é paralela a s ou r // s

As retas concorrentes são aquelas que se encontram em um ponto.

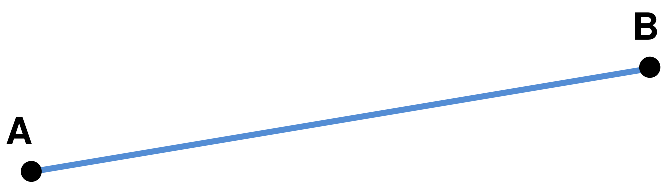


Diz-se que r é concorrente com s em (B).

Quando observamos uma reta e especificamos apenas um de seus pontos criamos um ente geométrico chamado de semi-reta. Na linguagem comum costuma-se dizer que semi-reta é uma parte da reta que tem apenas o começo ou origem estabelecida. Na semi-reta “r” abaixo, o ponto A corresponde ao seu início.

Semi-reta r

Quando observamos uma reta e especificamos dois pontos distintos pertencente a esta, criamos um ente geométrico chamado de segmento de reta. Segmento quer dizer parte ou pedaço. Segmento de reta é a parte da reta compreendida entre esses dois pontos, que são chamados extremos. Na linguagem comum costuma-se dizer que segmento é uma parte da reta que tem começo e fim. No segmento AB representado abaixo, os pontos A e B são os extremos.



Segmento de reta AB

Plano

Um plano corresponde a um ente geométrico e equivale ao conjunto de todas as possibilidades de retas e pontos. Em matemática, um plano é um objeto geométrico infinito a duas dimensões.

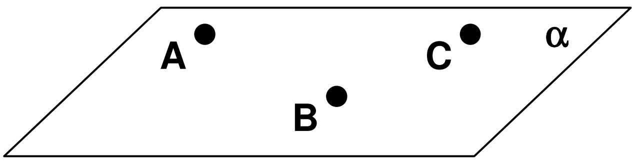
Os planos são representados por letras gregas minúsculas. Por exemplo: α(alfa),β (beta) e γ(gama).

Podemos obter alguns exemplos de planos quando observamos o nosso ambiente. Por exemplo, uma mesa pode ser considerada um plano.

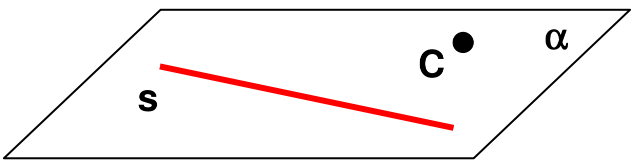
A capa do caderno.

Um plano pode ser unicamente determinado por um destes objetos:

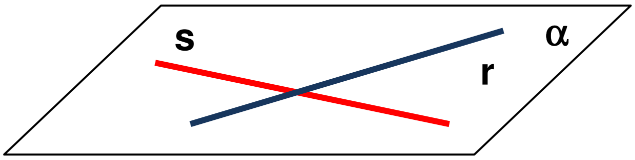
- três pontos não-colineares (não estão numa mesma reta);



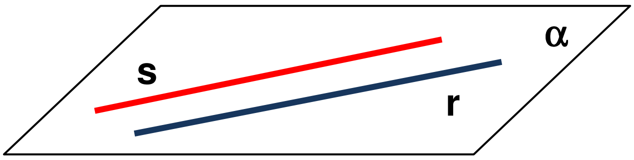
- uma reta e um ponto fora desta reta;



- duas retas concorrentes (duas retas que se cruzam num único ponto);



- duas retas paralelas distintas

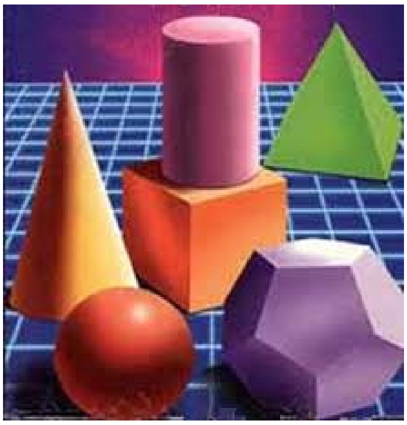


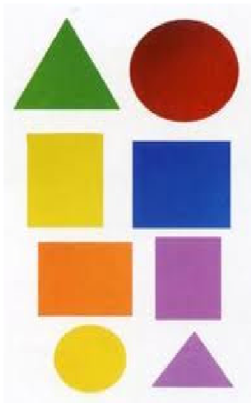
Para pensar.

Quais outros objetos que poderíamos tratar como um plano. Dê alguns exemplos.

2 - FIGURAS GEOMÉTRICAS

O ente geométrico PONTO definido anteriormente podem ser organizados ou agrupados de tal sorte que formam as figuras geométricas. Assim, as figuras geométricas são formadas por conjuntos de pontos. Esses agrupamentos são classificados de acordo com a forma que o objeto se apresente. A seguir são mostradas algumas figuras geométricas possíveis de serem obtidas.





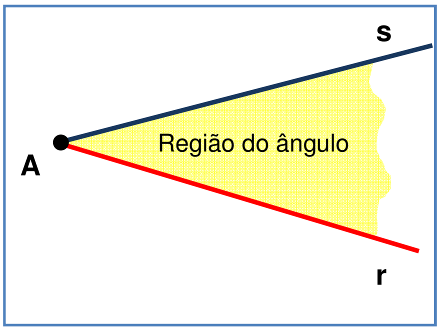
Assim, ângulos, triângulos, círculos, cubos e cilindros são figuras geométricas formadas por conjuntos de pontos.

As figuras geométricas podem ser planas ou espaciais. As planas, como o próprio nome induz, são todas aquelas figuras criadas sobre um plano. As figuras espaciais, também denominadas sólidos geométricos, são figuras criadas no espaço tridimensionais ou 3D.

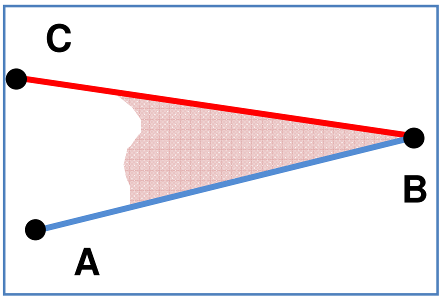
2.1 - FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

Sobre um plano podemos dispor de um conjunto de pontos organizados para formar diversas figuras planas. O próprio plano é uma organização elementar dos pontos, bem como as retas, as semi-retas e os seguimentos de reta também o são. Trataremos aqui as principais figuras planas possíveis de serem criadas com conjuntos de pontos, ou seja: os ângulos e os polígonos.

2.1.1 - ÂNGULOS



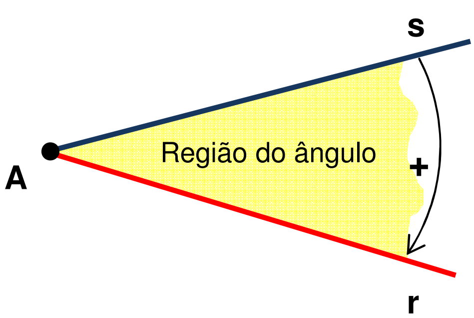
Ângulo é a região de um plano concebida pela abertura de duas semi-retas que possuem uma origem em comum, chamada vértice do ângulo. A abertura do ângulo é uma propriedade invariante e é medida em radianos, grados ou graus.

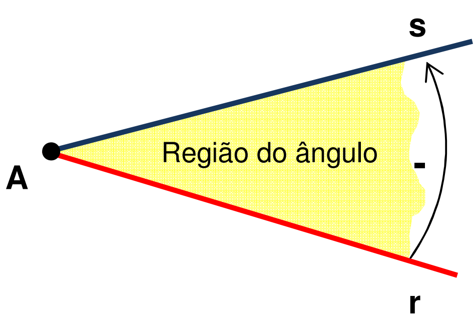


Podem ser usadas três letras, por exemplo, ABC para representar um ângulo, sendo que a letra do meio B representa o vértice, a primeira letra A representa um ponto do primeiro segmento de reta (ou semi-reta) e a terceira letra C representa um ponto do segundo segmento de reta (ou semi-reta).

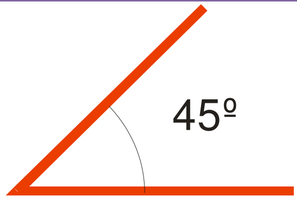
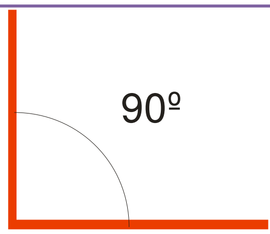
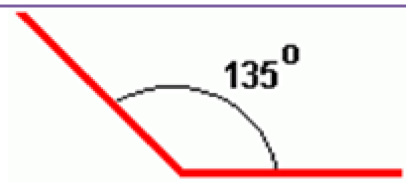
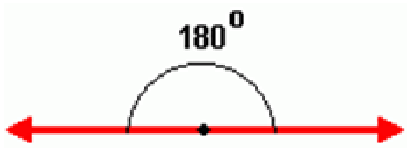
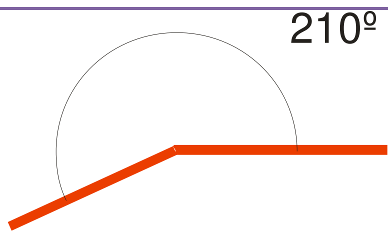
Usamos a notação < para um ângulo, como por exemplo: <ABC, ou utilizamos uma letra maiúscula do alfabeto grego (Α, Β, Θ, Χ, Δ, Ε, Φ, Γ, ...).

Um ângulo dever ter uma orientação definida. Podemos contar os ângulos no sentido horário ou anti-horário, dependendo do referencial adotado. Na matemática, os ângulos no sentido anti-horário são positivos e os ângulos horários são negativos. Entretanto, na topografia essa orientação se dá ao contrário. Assim, temos que saber como contar os ângulos em ambos os casos.





Com relação às suas medidas, os ângulos podem ser classificados como: reto, agudo, obtuso e raso.

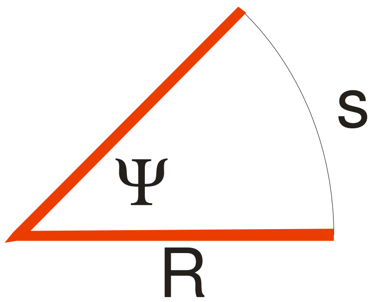
Ângulo	Características	Gráfico
agudo	Ângulo cuja medida é maior do que 0º e menor do que 90º. Ao lado temos um ângulo de 45º.	
reto	Um ângulo reto é um ângulo cuja medida é exatamente 90º. Assim os seus lados estão localizados em retas perpendiculares.	
obtuso	É um ângulo cuja medida está entre 90º e 180º. Na figura ao lado temos o exemplo de um ângulo obtuso de 135º.	
raso	Ângulo que mede exatamente 180º, os seus lados são semi-retas opostas. Neste caso os seus lados estão localizados sobre uma mesma reta.	
côncavo	É um ângulo cuja medida é maior entre 180º e menor do que 360º. Na figura ao lado temos o exemplo de um ângulo obtuso de 210º.	

O ângulo reto (90º) é provavelmente o ângulo mais importante, pois o mesmo é encontrado em inúmeras aplicações práticas, como no encontro de uma parede com o chão, os pés de uma mesa em relação ao seu tampo, caixas de papelão, esquadrias de janelas, etc...

Um ângulo de 360 graus é o ângulo que completa o círculo. Após esta volta completa este ângulo coincide com o ângulo de zero graus, mas possui a grandeza de 360 graus (360º).

Para medirmos um ângulo podemos utilizar de três unidades distintas, a saber: Graus, Radianos e Grados. O Sistema de medida em radianos é o utilizado no sistema internacional (SI). Entretanto, o sistema em Graus é o mais popular na área de engenharia e principalmente na Engenharia de Agrimensura.

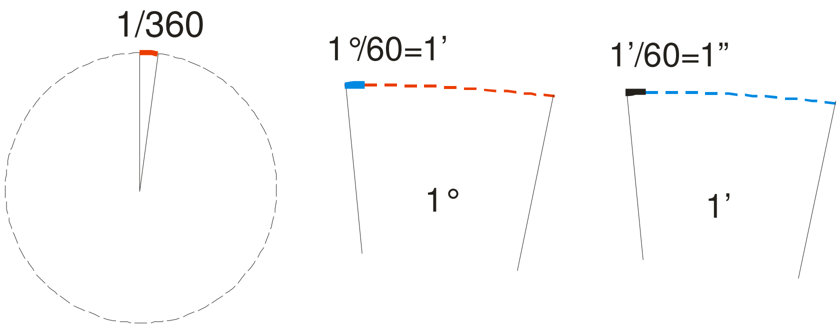
No sistema de radianos, o comprimento da circunferência é dividido pelo raio da circunferência estabelecendo uma razão entre essas medidas. Se estabelecermos uma circunferência de raio R poderemos desenvolver um arco com comprimento s, que estará associado ao ângulo Ψ. O valor de Ψ em radiados é obtido por:



$$\Psi_{\text{RAD}} = \frac{s}{R}$$

Para uma circunferência completa, temos que o ângulo associado corresponderá a 2π Radianos.

A medida em graus de um ângulo é o comprimento de um arco baseado na divisão de uma circunferência associada em 360 partes iguais. A parte unitária obtida dessa divisão corresponde ao Grau. O símbolo de graus é um pequeno círculo sobrescrito °. O Grau por sua vez é subdividido em 60 partes menores denominados de minutos. O minuto por sua vez é novamente subdividido em 60 partes menores denominadas de segundos.



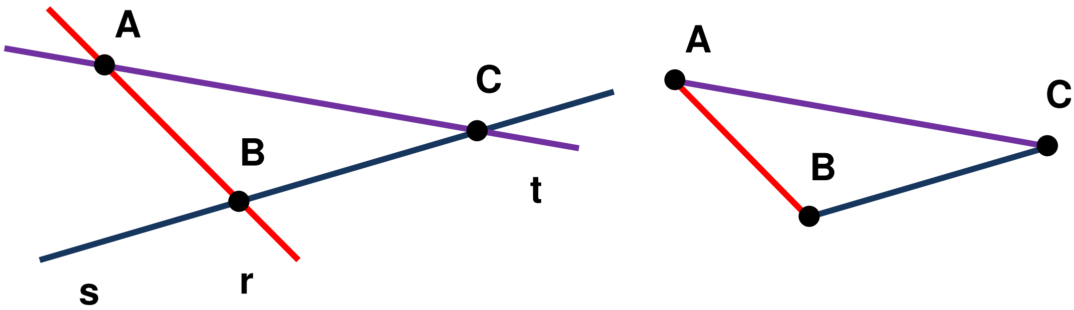
O grado é o comprimento de um arco baseado na divisão de uma circunferência associada em 400 partes iguais.

Com base nas colocações anteriores podemos chegar à seguinte relações entre as unidades de medidas angulares:

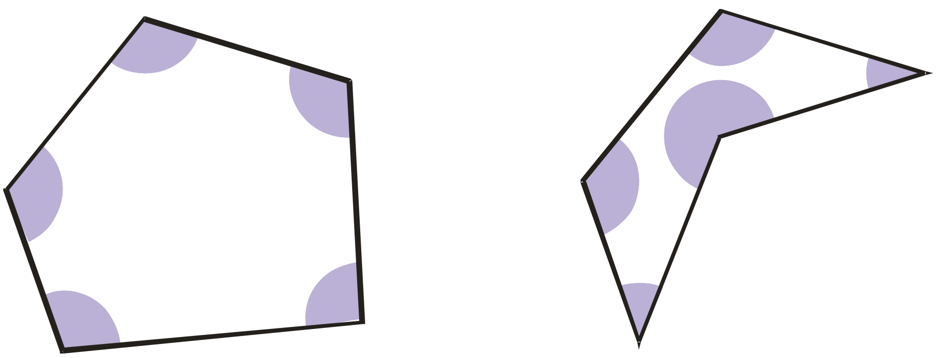
$$360° = 2\pi \text{ radianos} = 400 \text{ grados}$$

2.1.2 - POLÍGONOS

A organização de segmentos de retas permite que criemos figuras geométricas denominadas de polígonos. Assim, polígono é uma figura plana formada por três ou mais segmentos chamados lados de modo que cada lado tem interseção com somente outros dois lados próximos, sendo que tais interseções são denominadas vértices do polígono e os lados próximos não são paralelos. A região interior ao polígono é muitas vezes tratada como se fosse o próprio polígono. A figura a seguir mostra o encontro de três retas distintas, "r", "s" e "t", formando um polígono de três lados que passa a ser definido pelos seguimentos de retas $\overline{AB},\ \overline{BC}\ e\ \overline{DC}$.



Os polígonos podem ser classificados em função da observância dos seus lados e dos ângulos formados pelos seus lados. Com respeito aos ângulos do polígono estes podem ser classificados em convexos e côncavos. Os polígonos convexos apresentam ângulos menores do que 180°. Na figura a seguir, o primeiro polígono é convexo e o segundo é côncavo.

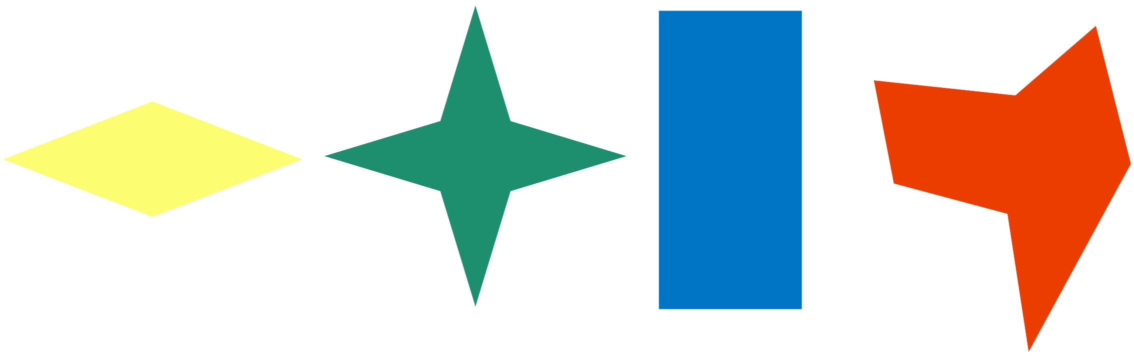


Polígono Convexo Polígono Côncavo

Observando tanto os ângulos como os lados de um polígono, podemos classificar estes em regulares e irregulares.

Os polígonos regulares apresentam ângulos e medidas dos lados iguais.

Os polígonos irregulares apresentam ângulos distintos e/ou lados distintos.



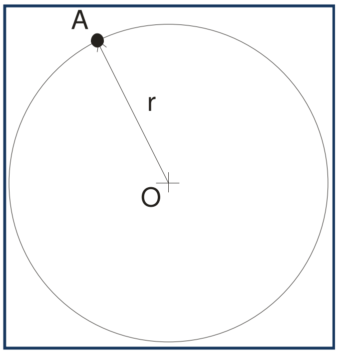
O nome dos polígonos é dado em função do número de lados.

Número de lados	Nome
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono

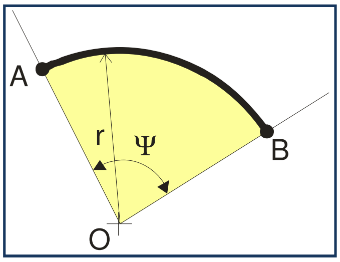
12	Dodecágono
13	Tridecágono
14	Tetradecágono
15	Pentadecágono
16	Hexadecágono
17	Heptadecágono
18	Octadecágono
19	Eneadecágono
20	Icoságono

2.1.3 - CIRCUNFERÊNCIA, ARCO E CÍRCULO

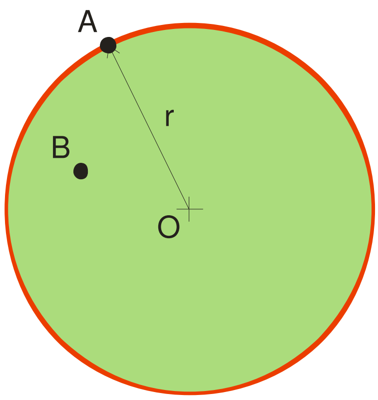
A circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizados a uma mesma distância r de um ponto fixo denominado o centro da circunferência (O). Esta talvez seja a curva mais importante no contexto das aplicações.

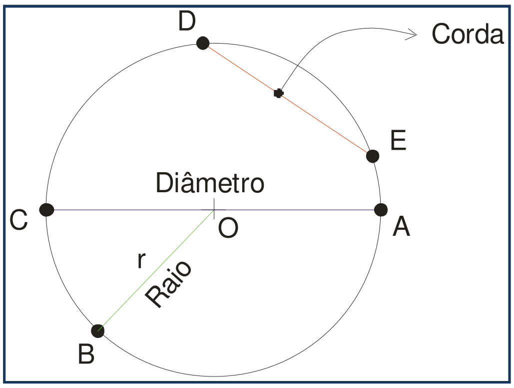


Um arco corresponde a uma porção da circunferência que possui um ponto de início e um ponto de fim determinados. A todo arco estará associado um raio o qual corresponderá ao raio da circunferência que deu origem ao arco. Ao arco também estará associado um ângulo que corresponde à região compreendida entre os segmentos de reta que partem do centro (O) e passam pelos pontos extremos do arco.



Círculo ou disco é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo O é menor ou igual que uma distância r dada. Quando a distância é nula, o círculo se reduz a um ponto. O círculo é a reunião da circunferência com o conjunto de pontos localizados dentro da mesma. No figura ao lado o círculo é toda a região pintada de verde reunida com a circunferência que corresponde a linha em vermelho.





Raio de uma circunferência (ou de um círculo) é um segmento de reta com uma extremidade no centro da circunferência e a outra extremidade num ponto qualquer da circunferência. Na figura, os segmentos de reta OA, OB e OC são raios.

Corda de uma circunferência é um segmento de reta cujas extremidades pertencem à circunferência. Na figura, os segmentos de reta AC e DE são cordas.

Diâmetro de uma circunferência (ou de um círculo) é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Observamos que o diâmetro é a maior corda da circunferência. Na figura, o segmento de reta AC é um diâmetro.

2.2 - SÓLIDOS GEOMÉTRICO

A geometria nos apresenta os meios necessários para observarmos o nosso meio e retirar dele elementos geométricos que servirão para vários propósitos no nosso dia-a-dia.

As estruturas sólidas tendo como base o hexágono, por exemplo, permitem a maximização do espaço. Essas estruturas são observáveis nos favos de mel das colméias.

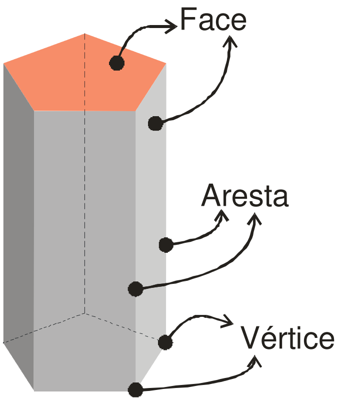
Os astros celestes, praticamente em sua totalidade, nos apresentam de forma esférica ou quase esférica como pode ser observado na forma da Lua, estrelas e planetas. Essa forma está relacionada ao comportamento espacial que matéria constituinte do corpo apresentará em função das forças gravitacionais que surgirão por causa da presença da massa.

O mundo mineral brinda-nos igualmente com inúmeros exemplos matemáticos, nomeadamente no que se refere a sólidos geométricos. Um dos mais famosos de todo o Mundo é a chamada Calçada dos Gigantes, um vasto aglomerado de colunas de rocha basáltica vulcânica, em forma de prismas de diferentes alturas, na sua maioria hexagonais, mas também pentagonais e ainda polígonos irregulares com 4, 7, 8, 9 e 10 lados, que se erguem junto à costa setentrional do Planalto de Antrim, na Irlanda do Norte.

Na matemática, um sólido geométrico é uma região do espaço limitada por uma superfície fechada. Há dois tipos de sólidos geométricos, os poliedros e os não poliedros, normalmente chamados de sólidos de revolução.

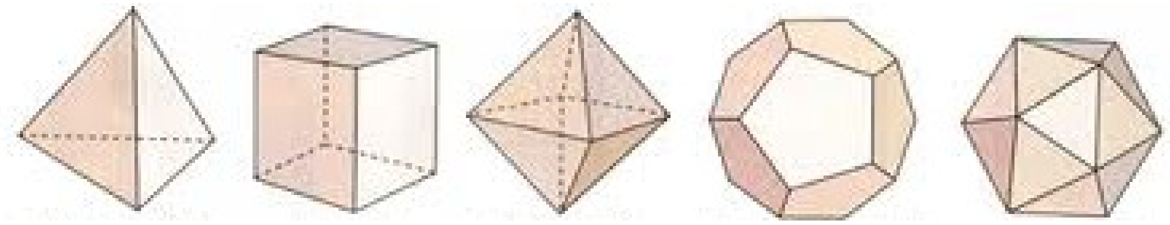
2.2.1 - POLIEDROS

Os poliedros são obtidos fazendo-se uso de polígonos que delimitarão o sólido. Os polígonos são as faces do poliedro (são as figuras planas que o limitam), os lados dos polígonos são as arestas do poliedro (são os segmentos de reta que limitam as faces), e os vértices dos polígonos são os vértices do poliedro (são os pontos de encontro das arestas).



Os poliedros são classificados em função das faces que estes apresentam. Se todas as faces são iguais então o poliedro é dito regular, caso contrário este será classificado como irregular.

Exemplos de poliedros regulares.

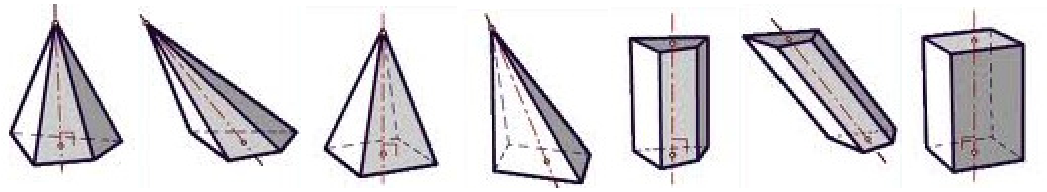


Tetraedro Hexaedro Octaedro Dudecaedro Icosaedro

Os poliedros regulares são distinguidos em função do número de faces existentes no sólido.

Número de faces	Nome
4	Tetraedro
6	Hexaedro
8	Octaedro
12	Dudecaedro
20	Icosaedro

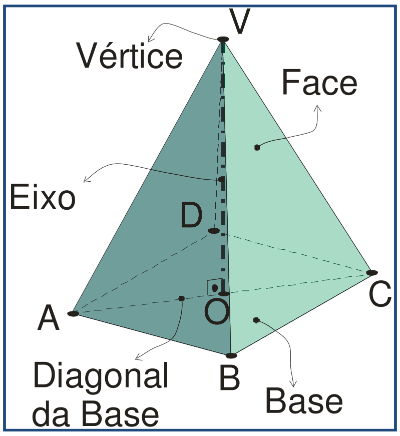
Exemplos de poliedros irregulares.



Os poliedros irregulares se dividem em prismas e pirâmides. Estes podem ser divididos em retos, oblíquos e regulares.

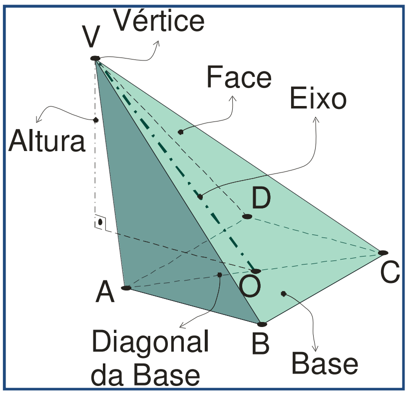
Elementos de uma pirâmide

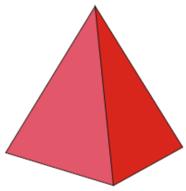
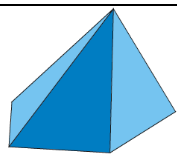
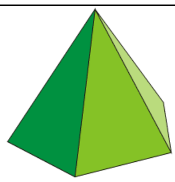
Uma pirâmide sempre apresentará uma base, um eixo, uma altura, faces triangulares, arestas, um vértice comum a todas as faces e diagonais da base. O vértice onde todas as faces do triângulo se encontram denomina-se vértice da pirâmide. Ponto (V) na figura ao lado.



A forma geométrica da base da pirâmide é utilizada para classificar a mesma se regular ou não. As pirâmides regulares possuem bases que são polígonos regulares.

O eixo da pirâmide é utilizado para classificar a pirâmide em reta ou obliqua. O eixo corresponde ao segmento de reta que une o vértice (V) da pirâmide ao ponto central (O) da diagonal da base da pirâmide. Quando o eixo atinge a base formando um ângulo reto (90 graus) então dizemos que o eixo será coincidente com a altura da pirâmide. Nesse caso a pirâmide é dita reta. Caso contrário tem-se a pirâmide obliqua e o eixo não coincide com a altura. A altura de uma pirâmide corresponde ao segmento de reta que sai do vértice (V) da mesma e atinge a base ou o plano formando por esta com um ângulo reto.

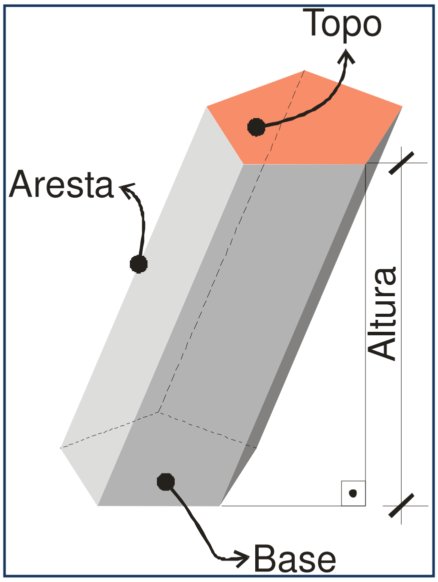


SÓLIDOS GEOMÉTRICOS	IRREGULARES	PIRÂMIDES	RETA		Eixo perpendicular a base. A pirâmide poderá apresentar base regular ou não
			OBLIQUA		Eixo obliquo à base. A pirâmide poderá apresentar base regular ou não
			REGULAR		Polígono da base é regular. Poderá ser reta ou obliqua.

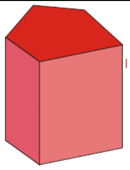
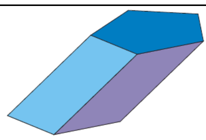
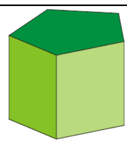
Elementos de um Prisma

Um prisma sempre apresentará uma base, um topo, um eixo, uma altura, faces quadrangulares, vértices e arestas paralelas. Os planos da base e do topo são paralelos.

A forma geométrica da base do prisma é utilizada para classificar a mesma se regular ou não. Os prismas regulares possuem bases e topos iguais e estes são polígonos regulares.



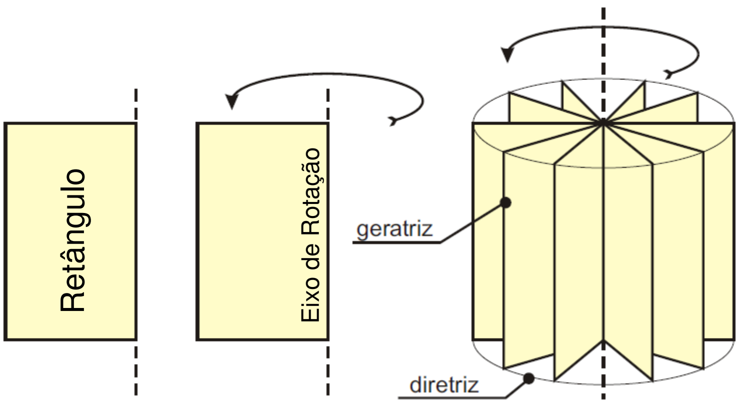
As arestas do prisma são utilizadas para classificar o mesmo em reto ou obliquo. Quando as arestas atingem a base do prisma formando ângulos retos (90 graus) dizemos o prisma é reto. Caso contrário tem-se o prisma obliquo. No caso de prismas retos, os comprimentos das arestas correspondem à medida da altura do prisma. A altura de uma prisma corresponde ao segmento de reta que sai de um dos vértices do topo e atinge a base ou o plano formando por esta com um ângulo reto.

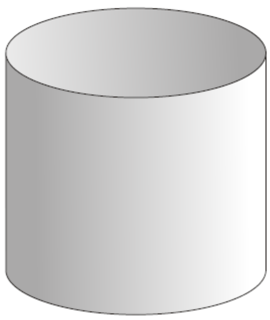
SÓLIDOS GEOMÉTRICOS	IRREGULARES	PRISMAS	RETO		Arestas forma ângulos retos com a base.
			OBLIQUO		As arestas são obliquas à base
			REGULAR		O polígono da base e do topo são regulares.

2.2.2 - SOLIDOS DE REVOLUÇÃO

Sólidos de revolução são figuras geométricas provenientes da rotação de uma figura geométrica plana em torno de um eixo de rotação imaginário. Os principais sólidos de revolução são: Cilindro, Cone e Esfera

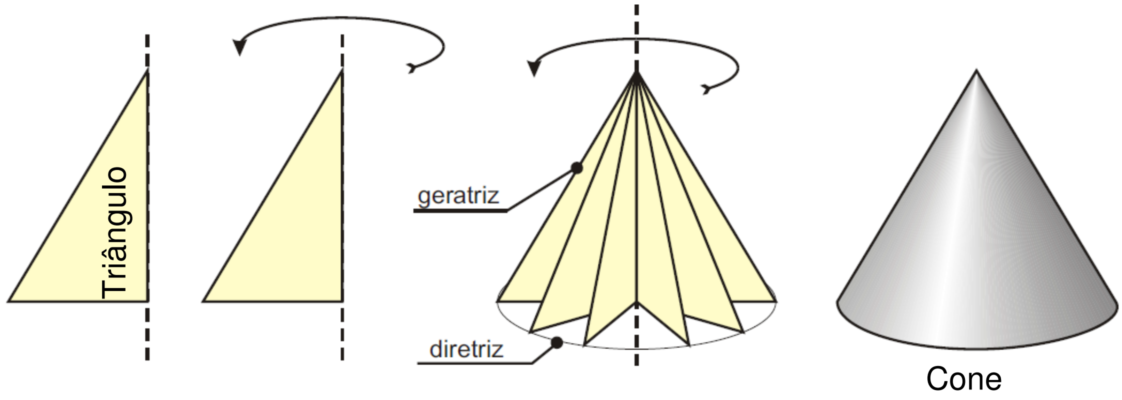
O cilindro corresponde ao sólido de revolução oriundo da rotação de um retângulo, tendo como eixo de rotação um de seus lados. O cilindro poder ser reto ou obliquo. No cilindro reto a geratriz é ortogonal à base, caso contrário ele será obliquo.



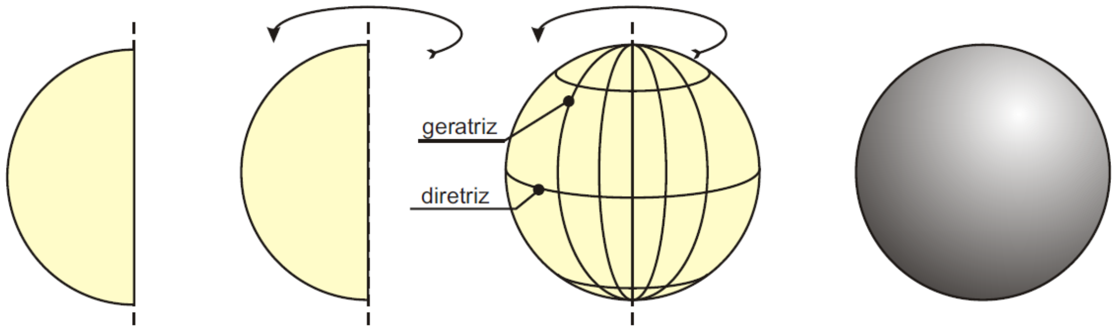


Cilindro

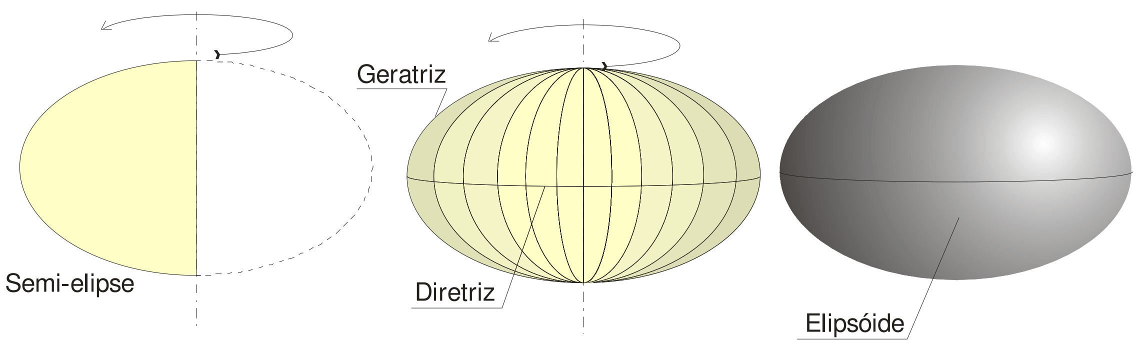
O cone corresponde ao sólido de revolução oriundo da rotação de um triângulo, tendo como eixo de rotação um de seus catetos. No cone reto o eixo de rotação é ortogonal à base, caso contrário ele será obliquo.

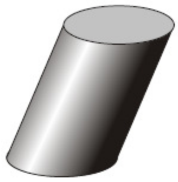
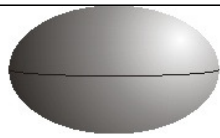


A esfera corresponde ao sólido de revolução oriundo da rotação de uma semi – circunferência em torno de um eixo coincidente com o diâmetro.



Um outro sólido de revolução importante e muito utilizado na topografia é o elipsóide de revolução. O elipsóide de revolução é obtido a partir da rotação de uma semi-elipse em torno de um dos seus eixos.



SÓLIDOS GEOMÉTRICOS	SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO	CILÍNDRO	RETO		A geratriz é ortogonal a base.
			OBLIQUO		A geratriz é obliqua a base
		CONE	RETO		O eixo de rotação é ortogonal à base.
			OBLIQUO		O eixo de rotação é obliquo à base.
		ESFERA			
		ELIPSÓIDE			

3 - UNIDADE DE MEDIDAS

A necessidade de obter medidas pode ser considerada muito antiga. De fato, o homem primitivo quando precisava se movimentar em busca de alimentos deveria possuir algum mecanismo intuitivo para obter medidas de relação para poder se movimentar no meio ambiente. As unidades de medidas sem sombra de dúvida remota à antiguidade e à origem das civilizações.

Como as medidas eram definas por cada país ou região, cada povo tinha o seu sistema próprio de medir. Essas unidades de medidas eram geralmente arbitrárias e imprecisas, como por exemplo, aquelas baseadas no corpo humano: palmo, pé, polegada, braça, côvado.

O conjunto desses sistemas de medidas criava, certamente, grandes problemas para as pessoas que necessitavam trocar mercadorias entre diversas regiões, pois as quantidades eram expressas em unidades pouco confiáveis, diferentes umas das outras e que não tinham correspondência entre si.

A necessidade de converter uma medida em outra era tão importante quanto a necessidade de converter uma moeda em outra. Na verdade, em muitos países, inclusive no Brasil dos tempos do Império, a instituição que cuidava da moeda também cuidava do sistema de medidas.

Em 1789, através da Academia de Ciências Francesa, foi proposto um sistema de medição baseado em uma constante natural de tal sorte que o método pudesse ser aplicado ao mundo inteiro sem sofrer interferência de fatores ambientais, Assim, foi criado o Sistema Métrico Decimal, constituído inicialmente de três unidades básicas: o metro, que deu nome ao sistema, o litro e o quilograma (posteriormente, esse sistema seria substituído pelo Sistema Internacional de Unidades - SI).

O Sistema Internacional de Unidades - SI foi sancionado em 1960 pela Conferência Geral de Pesos e Medidas e constitui a expressão moderna e atualizada do antigo Sistema Métrico Decimal, ampliado de modo a abranger os diversos tipos de grandezas físicas, compreendendo não somente as medições que ordinariamente interessam ao comércio e à indústria (domínio da metrologia legal), mas estendendo-se completamente a tudo o que diz respeito à ciência da medição.

O Brasil adotou o Sistema Internacional de Unidades - SI em 1962. A Resolução nº 12 de 1988 do Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial - CONMETRO, ratificou.

As grandezas fundamentais estabelecidas pelo SI dizem respeito à obtenção de medidas para comprimento, massa, tempo, corrente elétrica, temperatura, quantidade de matéria e intensidade luminosa. Os múltiplos e submúltiplos dessas medidas podem ser obtidas utilizando a tabela de prefixos do SI como mostrado na tabela 1.

Tabela 1: Prefixos do SI

Fator de Multiplicação	Prefixo	Símbolo
1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1 000 000 000 = 10^{9}	giga	G
1 000 000 = 10^{6}	mega	M
1 000 = 10^{3}	quilo	k
100 = 10^{2}	hecto	h
10 = 10^{1}	deca	da
0,1 = 10^{-1}	deci	d
0,01 = 10^{-2}	centi	c
0,001 = 10^{-3}	mili	m
0,000 001 = 10^{-6}	micro	µ
0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}	femto	f
0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	atto	a

Para os trabalhos de topografia o conhecimento em unidades de comprimento e tempo bem como os seus múltiplos e submúltiplos são importantes.

A primeira definição do metro foi baseada no protótipo internacional em platina COMPRIMENTO (METRO) iridiada, que entrou em vigor em 1889.

Essa definição foi posteriormente foi substituída na 11ª CGPM – Conferência Geral de Pesos e Medidas (1960) por outra definição baseada no comprimento de onda de uma radiação do criptônio 86, com a finalidade de aumentar a exatidão da realização do metro.

A 17ª CGPM (1983, Resolução 1; CR 97 e Metrologia, 1984, 20, 25) substituiu, em 1983, essa última definição pela seguinte: “O metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 de segundo.” Essa definição tem o efeito de fixar a velocidade da luz em 299 792 458 $m.s^{-1}$, exatamente.

Os múltiplos e submúltiplos da unidade metro podem ser obtidos através do uso de prefixos como mostra a tabela abaixo

Tabela 2: Prefixos do SI para o metro para os derivados mais utilizados.

Fator de Multiplicação	Prefixo	Símbolo
$1\ 000 = 10^3$	quilômetro	km
$100 = 10^2$	hectômetro	hm
$10 = 10^1$	decâmetro	dam
$1 = 10^0$	metro	m
$0{,}1 = 10^{-1}$	decímetro	dm
$0{,}01 = 10^{-2}$	centímetro	cm
$0{,}001 = 10^{-3}$	milímetro	mm
$0{,}000\ 001 = 10^{-6}$	micrômetro	μm

Uma forma prática para transformar uma unidade em outra é utilizar a seguinte estrutura:

km	hm	dam	m	dm	cm	mm	μm

Por exemplo, se desejarmos transformar 12.324 mm em metros basta preenchermos as casas acima, a partir do milímetro, com o números fornecidos, sempre utilizando um único algarismo para cada casa.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm	μm
		1	2	3	2	4	

A vírgula decimal que antes estava na casa dos milímetros, agora deverá ir para a casa dos metros, resultando assim a seguinte medida: 12,324m

Outra forma também bastante prática é utilizara as seguintes relações:

÷10	÷10	÷10	÷10	÷10	÷10	÷10

km	hm	dam	m	dm	cm	mm	μm

X 10	X 10	X 10	X 10	X 10	X 10	X 10

Por exemplo, se desejarmos transformar 803.478,0 cm em quilômetro basta contar quantas casas necessitamos andar até chegar ao local desejado. De centímetro para quilômetro devemos andar 5 (cinco) casas para a esquerda. Para cada casa deslocada deveremos dividir o valor original fornecido por 10. Como serão cinco casas a serem percorridas o efeito corresponde a dividir o valor original por 10x10x10x10x10=100000, ou seja, obteremos $\frac{803478{,}0\ \mathrm{cm}}{100000} = 8{,}03478\ km$

No sentido contrário, ou seja, contando casas da esquerda para a direita, o resultado final será obtido efetuando a multiplicação do número original por 10 tantas vezes quanto for necessário até atingir a casa desejada. Exemplo: 32,123 dam transformado em mm corresponde a 32,123 X 10 X 10 X 10 X 10 igualando a 321.230,0 mm

Exercícios:

1.1 Converter as seguintes medidas para metros (m):

a) 1.234,45 Km;
b) 2.344.190,3 mm;
c) 129,2345 cm;
d) 78,455 hm;
e) 4.512,982 dam;
f) 0,034 dm;

1.2 Converter as seguintes medidas para quilômetro (km):

a) 1.234,45 mm;
b) 2.344.190,3 cm;
c) 129,2345 m;
d) 78,455 dm;
e) 4.512,982 dam;
f) 0,034 dm;

4 - ÁREAS, VOLUMES E PERÍMETRO

As figuras geométricas podem ser figuras planas ou sólidos geométricos. No caso das figuras planas é de interesse imediato da topografia poder medir a área superficial dessas figuras bem como poder representar essas medidas e unidades agrárias. Os sólidos geométricos também são figuras que devem ser tratadas pela topografia no que diz respeito a obtenção de valores volumétricos e superficiais desses sólidos.

Uma forma prática para transformar uma unidade superficial em outra é utilizar a seguinte estrutura:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Por exemplo, se desejarmos transformar 1.212.324,0 mm^2 em metros quadrado basta preenchermos as casas acima, a partir do milímetro, com o números fornecidos, sempre utilizando dois algarismo para cada casa.

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
			1	21	23	24

A vírgula decimal que antes estava na casa do milímetro quadrado, agora deverá ir para a casa do metro quadrado, resultando assim a seguinte medida: 1,212324 m^2.

Outra forma também bastante prática é utilizara as seguintes relações:

$$km^2 \xrightarrow{\div 100} hm^2 \xrightarrow{\div 100} dam^2 \xrightarrow{\div 100} m^2 \xrightarrow{\div 100} dm^2 \xrightarrow{\div 100} cm^2 \xrightarrow{\div 100} mm^2$$

$$km^2 \xleftarrow{X100} hm^2 \xleftarrow{X100} dam^2 \xleftarrow{X100} m^2 \xleftarrow{X100} dm^2 \xleftarrow{X100} cm^2 \xleftarrow{X100} mm^2$$

Uma forma prática para transformar uma unidade volumétrica em outra é utilizar a seguinte estrutura:

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

Por exemplo, se desejarmos transformar 1,124567 m^3 em centímetro cúbico basta preenchermos as casas acima, a partir do metro, com o números fornecidos, sempre utilizando três algarismo para cada casa.

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
			1	124	567	

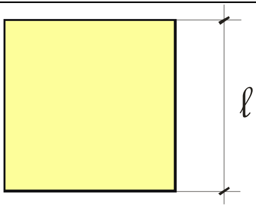
A vírgula decimal que antes estava na casa do metro cúbico, agora deverá ir para a casa do centímetro cúbico, resultando assim a seguinte medida: 1.124.567,0 cm^3.

Outra forma também bastante prática é utilizara as seguintes relações:

÷1000	÷1000	÷1000	÷1000	÷1000	÷1000	
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
X1000	X1000	X1000	X1000	X1000	X1000	

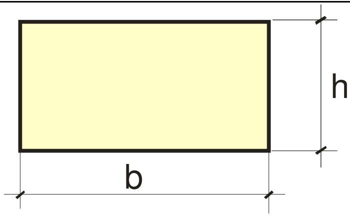
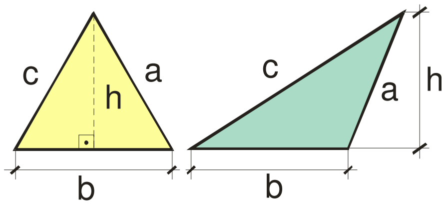
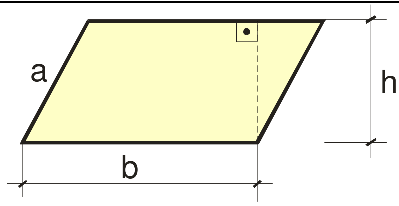
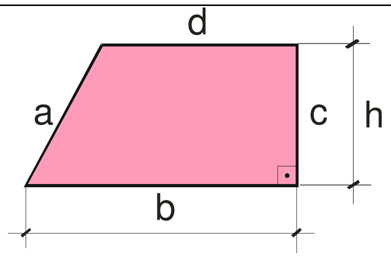
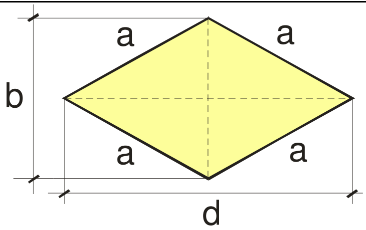
4.1 - FIGURAS PLANAS

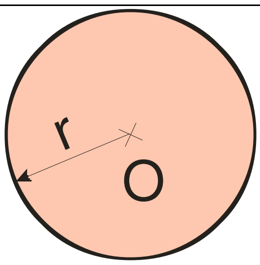
Serão apresentados o cálculo de área e perímetro das principais figuras planas.

FIGURA PLANA	NOME	FÓRMULA
	QUADRADO	$A = l\ x\ l = l^2$ $p = l + l + l + l = 4 \times l$

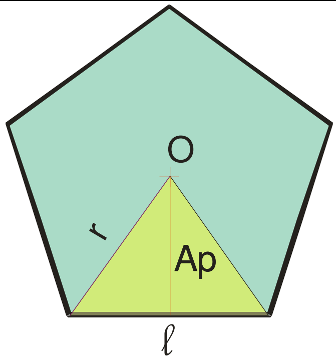
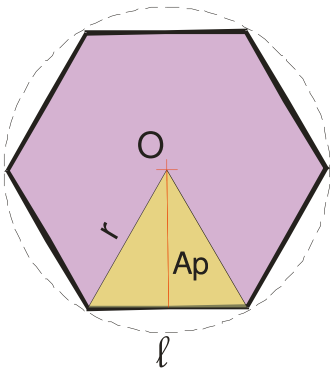
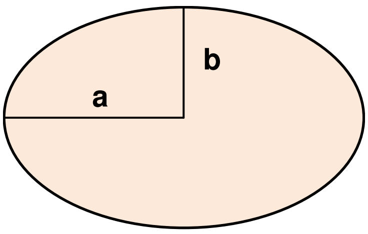
TOPOGRAFIA

Matemática Básica: Geometria

	RETÂNGULO	$A = b\ x\ h$ $p = b + b + h + h$ $p = 2 \times b + 2 \times h$
	TRIÂNGULO	$A = \frac{b\ x\ h}{2}$ $A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ $p = a + b + c$
	PARALELO-GRAMO	$A = b\ x\ h$ $p = a + a + b + b$ $p = 2 \times a + 2 \times b$
	TRAPÉZIO	$A = \frac{(b+d)}{2} \times h$ $p = a + b + c + d$
	LOSANGO	$A = \frac{b\ x\ d}{2}$ $p = a + a + a + a = 4 \times a$

	CIRCUNFERÊNCIA	$A = \pi\ x\ r^2$ $p = 2 \times \pi\ x\ r$

Antonio de Pádua M. Fragassi

	PENTÁGONO	$A = 2{,}373\ x\ r^2$ $p = 5 \times l$ Onde: r: Raio da circunferência circunscrita ao polígono; Ap: apótema.
	HEXÁGONO	$A = \frac{3 \times\ l^2 \times \sqrt{3}}{2}$ $p = 6 \times l$ Onde: r: Raio da circunferência circunscrita ao polígono; Ap: apótema.
	ELIPSE	$A = \frac{a \times\ b \times \pi}{16}$ Onde: a: Semi-eixo maio b: Semi-eixo memor; Obs: A expressão para cálculo do perímetro da elipse não é simples.

Medidas Agrárias

ARE

As medidas de superfície de alguns objetos, muitas vezes, são obtidas em outras unidades distintas do SI. No sistema Internacional o metro e seus múltiplos e submúltiplos são adotados como medida padrão para apresentar valores de medidas de superfície. Entretanto, no que se refere a medidas de superfície para fazendas, áreas rurais, plantações, pastos, ou até mesmo urbana, outra unidade é mais difundida, são as medidas agrárias. Existem muitas medidas agrárias e diversidades de uma mesma unidade entre regiões. Entretanto, a unidade padrão para esses casos é o ARE (a) e seu múltiplo e submúltiplo, o HECTARE (ha) e o CENTIARE (ca), respectivamente.

Unidade Agrária	Hectare (ha)	are (a)	centiare (ca)
Equivalência de Valor	100 a	1 a	0,01 a

Ou 1ha = 10.000,00 m^2

Uma forma prática de obter uma medida agrária corresponde a obter a área do imóvel em metros quadrado e efetuar a separação do valor numérico obtido de dois em dois algarismo, iniciando do ponto decimal, da direita para a esquerda. O primeiro grupo corresponderá ao centiare. O segundo grupo corresponderá ao área, e o restante ao hectare.

Por exemplo. Uma fazenda apresenta uma área superficial de 1.204.567,45 m^2 e desejamos representar esse valor em medida agrária.

1.20 / 45 / 67,45

Assim, obtermos: 120 ha 45 a 76,45 ca

ALQUEIRE

A palavra Alqueire é de origem árabe e designa uma das bolsas de carga que era usado no transporte de grãos. Esta bolsa foi tomada como medida de secos e, com o passar do tempo, passou a designar a área de terra necessária para o plantio de todas as sementes que coubessem nela.

Mesmo com a introdução do sistema métrico decimal, no século XIX, os alqueires tradicionais ainda continuam sendo utilizados.

Atualmente, o alqueire é unidade de superfície e suas medidas variam de acordo com a região. O alqueire paulista corresponde a uma área de 24.200 m^2 (110 m x 220 m) e, o alqueire mineiro, corresponde a 48.400 m^2 (220 m x 220 m). O alqueire do norte é usado na região Norte do Brasil e tem sua área correspondente a 27.225 m^2 (165 m x 165 m).

Nome	Metros Quadrado	Hectare
Alqueire Paulista	24.200 m^2	2,42 ha
Alqueire Mineiro	48.400 m^2	4,84 ha
Alqueire do Norte	27.225 m^2	2,7225 ha

TOPOGRAFIA

Matemática Básica: Geometria

Exercicios:

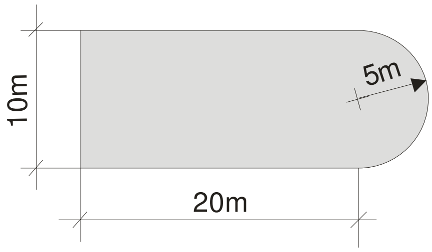
1) O terreno ao lado apresenta uma forma retangular e possui 50 m de frente por 200 m de fundo. Calcular a área do terreno.

2) Um casa foi construída apresentando uma forma quadrada com 785 cm de lado. Calcular a área da edificação em metro quadrado.

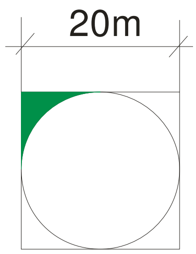
3) Uma pizza grande, em formato circular, apresenta um diâmetro de 50cm. Calcular a área da pizza.

4) Um jardim apresenta um formato triangular com as seguintes medidas: 15,0m x 20,00m x 22,00m. Calcular a área do jardim.

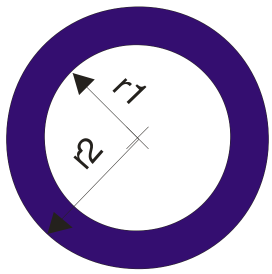
5) Uma piscina foi construída apresentado a forma composta ao lado. Pede-se: determinar a área superficial.



6) A partir da composição das figuras planas ao lado, determinar a área destacada em verde.

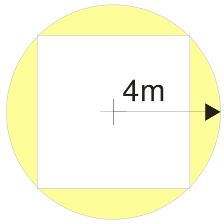


7) Uma pista de ciclismo foi construída a partir de duas circunferências como mostra a figura ao lado. Sabendo

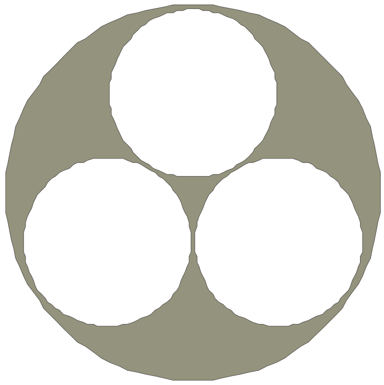


que o raio externo é de 300m e o raio interno é de 298m, calcular a área da pista.

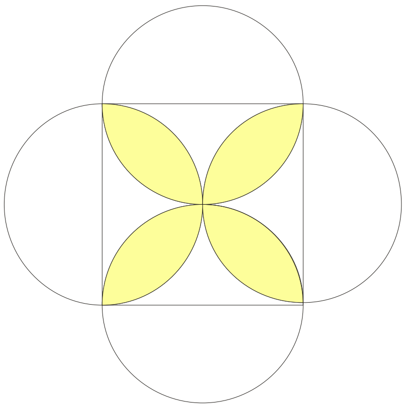
8) Um paisagista construiu um jardim com a composição de duas figuras planas como mostra a figura ao lado. Determinar a área pintada.



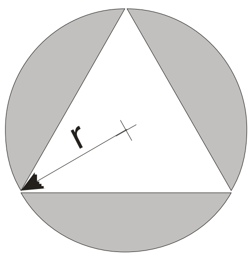
9) De uma chapa circular de alumínio com raio de 11 cm foi retirado três círculos de diâmetro de 9,80 cm, como mostra a figura ao lado. Deseja-se calcular a área superficial de alumínio restante após a retirada das três circunferências.



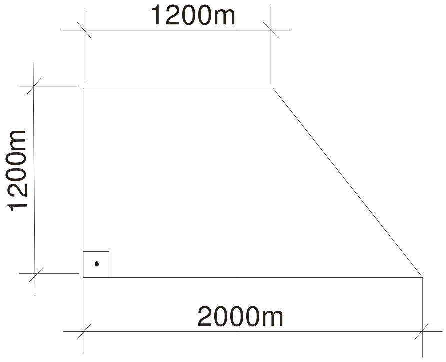
10) Calcular a área da pétala ao lado sabendo que o quadrado que envolve a mesma possui 10m de lado.



11) Um triângulo eqüilátero está inscrito numa circunferência de raio = 8 cm, como mostra a figura ao lado. Determinar a área pintada da figura.



12) Uma propriedade rural apresenta um formato trapezoidal conforme mostra afigura ao lado. Determinar a área da propriedade em medida agrária.

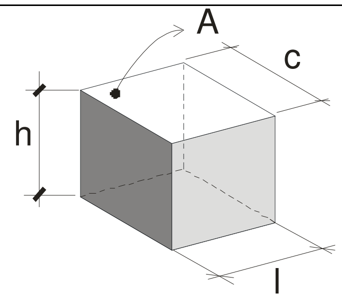
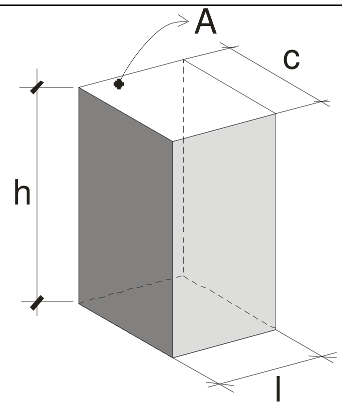
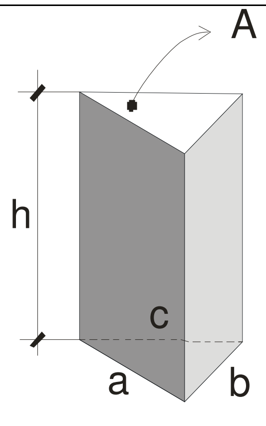


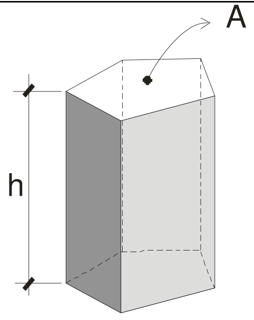
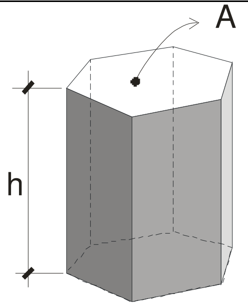
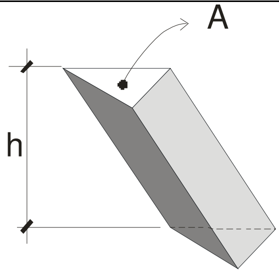
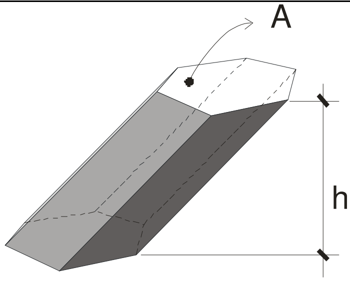
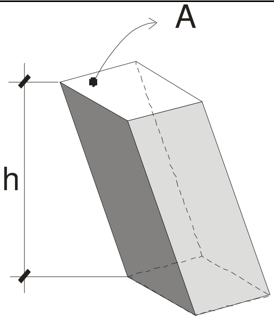
13) No projeto Jaíba em Minas Gerais alguns pivôs centrais foram dispostos como mostra a figura ao lado. Sabendo que cada pivô possui um raio de 500m e que eles tangenciam entre si, pede-se para calcular a área da estrela, em medidas agrárias, situada entre os quatros círculos.

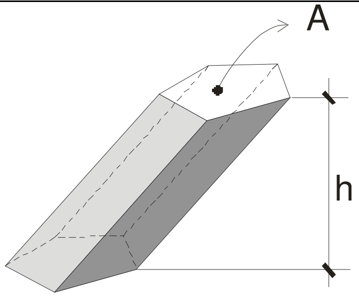
14) O bar apresentado na figura ao lado corresponde a um hexágono regular com 5m de lado. Determine a área do bar.

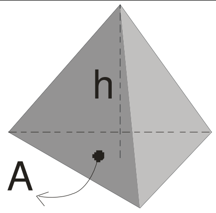
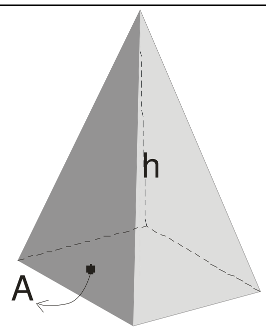
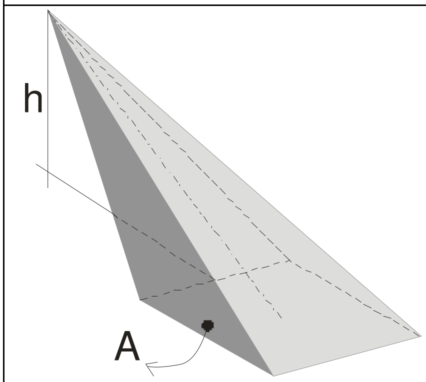
4.2 - SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

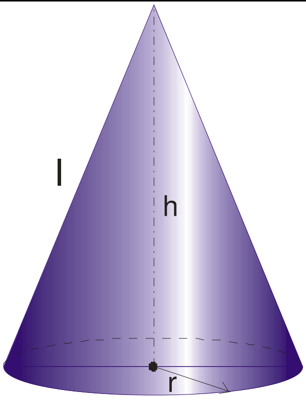
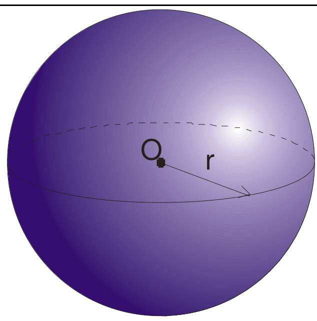
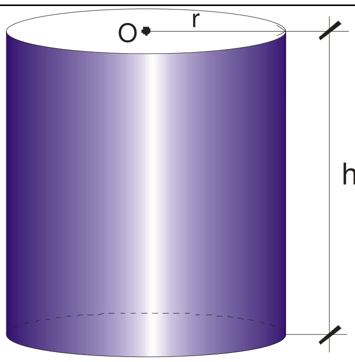
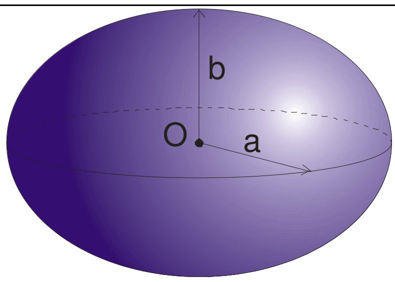
Serão apresentados o cálculo de volume e área dos principais sólidos.

SÓLIDO GEOMÉTRICO		NOME	FÓRMULA
PRISMAS		CUBO	$V = l \times l \times l = l^3$ h = l $A = 6 \times l \times l = 6 \times l^2$
		PARALELEPÍPEDO	$V = l \times c \times h$ $A = h \times (2l + 2c) + (2 \times l \times c)$
		PRISMA RETA DE BASE TRIANGULAR	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + h \times (a + b + c)$

PRISMAS		PRISMA RETO DE BASE PENTAGONAL	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + 5 \times a \times h$
		PRISMA FRETO DE BASE XEXAGONAL	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + 6 \times a \times h$
		PRISRA OBLIQUO DE BASE TRIANGULAR	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + Área\ das\ faces$
		PRISMA OBLIQUO DE BASE PENTAGONAL	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + Área\ das\ faces$
		PRISMA OBLIQUO DE BASE QUADRANGULAR	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + Área\ das\ faces$

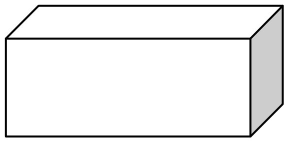
PRISMAS		PRISMA OBLIQUO DE BASE HEXAGONAL	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + Área\ das\ faces$

PIRÂMIDES		TETRAEDRO	$V = \dfrac{A_{BASE} \times h}{3}$
		PIRÂMIDE RETA DE BASE QUADRANGULAR	$V = \dfrac{A_{BASE} \times h}{3}$
		PIRÂMIDE OBLIQUA DE BASE QUADRANGULAR	$V = \dfrac{A_{BASE} \times h}{3}$

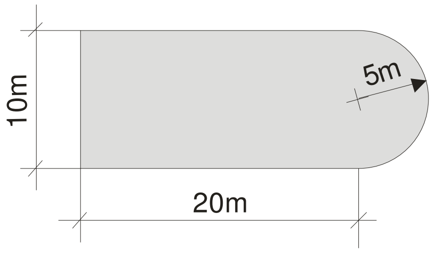
SOLIDO DE REVOLUÇÃO		CONE	$V = \frac{A_{BASE} \times h}{3}$ $A_{BASE} = \pi \times r^2$ $A = \pi \times r \times \left(\sqrt{r^2 + h^2} + r\right)$
		ESFERA	$V = \frac{4 \times \pi \times r^3}{3}$ $A = 4 \times \pi\, x\, r^2$
		CILINDRO	$V = A_{BASE} \times h$ $A_{BASE} = \pi \times r^2$ $A = 2 \times \pi \times r \times (r + h)$
		ELIPSÓIDE	$V = \frac{4 \times a^2 \times b \times \pi}{3}$ Onde: a: Semi-eixo maio b: Semi-eixo memor; Obs: A área superficial do elipsóide requer uma equação complexa.

Exercícios:

1) Uma caixa d`água em forma de prisma de base quadrangular, apresenta as seguintes dimensões: Largura= 3m, Comprimento= 2m e Altura = 1,5m foi instalada na escola. Calcular o volume do objeto.



2) Uma piscina foi construída obedecendo a geometria apresentada ao lado. Sabendo que a profundidade da mesma é de 1,5m, calcular o volume em metro cúbico.



3) As torres do Congresso Nacional em Brasília podem ser consideradas formas em paralelepípedos que medem 50m de comprimento, 15m de largura e aproximadamente 120m de altura. Calcular o volume de cada prédio.

4) A pirâmide de vidro localizada no museu do Louvre em Paris corresponde a uma pirâmide de base quadrangular medindo 35 m x 35 m e uma altura de 21m. Determina o volume da pirâmide.

5) Um prédio em formato cilíndrico apresenta as seguintes medidas: Raio da base igual a 30m e altura do prédio igual a 30 m. Calcular o volume do prédio.

6) As tendas dos índios americanos, conhecidas como Tipi, são sólidos geométricos em formato cônico. Uma tipi que apresente raio da base igual a 3m e altura de 5m possui que volume?

7) Uma bola de basquete apresenta um raio de 13cm. Determine o volume da bola de basquete.

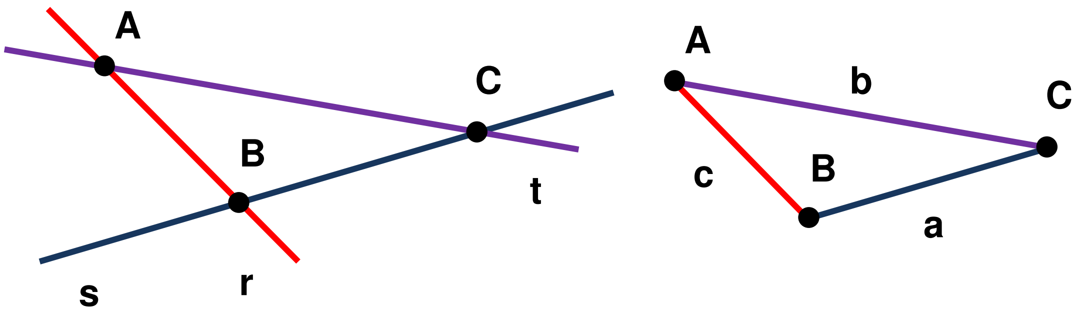
8) O modelo matemático utilizado para representar a terra corresponde ao elipsóide de revolução. Sabendo que o semi-eixo maior corresponde a 6378,137 km e o semi-eixo menor corresponde a 6356,75 km, para o elipsóide GRS80, determine o volume da terra.

5 - ESTUDO DO TRIÂNGULO

O triângulo talvez seja a figura geométrica mais importante da topografia, pois o seu uso se aplica a quase todas as etapas do processo de coleta de dados à representação gráfica.

Um triângulo é um polígono de três lados ou corresponde à figura geométrica fechada por três segmentos de retas distintos que se encontram dois a dois.

A figura a seguir mostra o encontro de três retas distintas, “r”, “s” e “t”, formando um polígono de três lados denominado de triângulo, que passa a ser definido pelos seguimentos de retas $\overline{AB},\ \overline{BC}\ e\ \overline{DC}$.

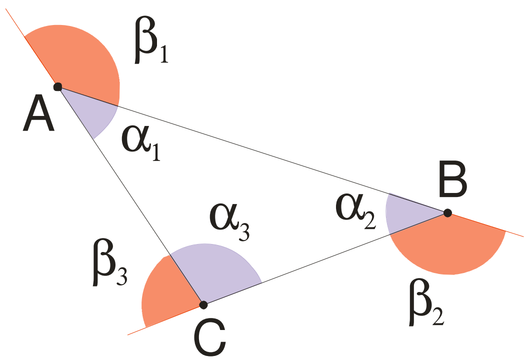


Os pontos (A), (B) e (C) na figura anterior corresponde aos vértices do triângulo, e os seguimentos de retas $\overline{AB},\ \overline{BC}\ e\ \overline{DC}$ são denominados lados do triângulo e podem ser representados pelas letras “c”, “a” e “b”, respectivamente.

BAC, ACB e CBA são os ângulos internos do triângulo, e a soma dos três ângulos corresponde a 180°.

A soma dos seguimentos de reta $\overline{AB},\ \overline{BC}\ e\ \overline{DC}$ corresponde ao perímetro do triângulo.

5.1 - OS ÂNGULOS DO TRIÂNGULO



Um triângulo apresenta dois tipos de ângulos, os internos e os externos que guardam uma relação entre si.

Na figura ao lado tem-se os ângulos internos (α,α,α e externos do triângulo.

Observando o ângulo interno e o ângulo externo em um determinado vértice, por exemplo, no vértice A, nota-se que a soma dos os dois ângulos corresponde a meia volta completa, ou seja, um ângulo de 180°. Assim,

$$Angulo\ Interno + Angulo\ Externo = 180°$$

Outra relação importante envolvendo os ângulos internos corresponde a:

$$C\hat{A}B + A\hat{B}C + \ B\hat{C}A = 180°$$

Em relação aos ângulos externos de um triângulo podemos dizer que a soma deles corresponderá a 360°.

Observando cada ângulo interno em relação aos outros dois, podemos concluir que em todo triângulo cada ângulo é o suplemento da soma dos outros dois, de fato temos:

$$C\hat{A}B = 180° - (A\hat{B}C + \ B\hat{C}A)$$

$$A\hat{B}C = 180° - (C\hat{A}B + \ B\hat{C}A)$$

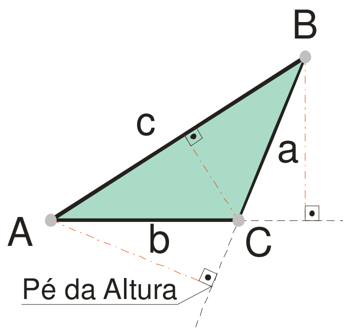
$$B\hat{C}A = 180° - (A\hat{B}C + \ C\hat{A}B)$$

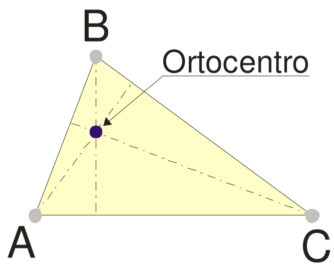
5.2 - ELEMENTOS DO TRIÂNGULO

O triângulo apresenta alguns elementos importantes. Os principais elementos do triângulo são: altura, mediatriz, mediana e bissetriz.

Altura

Altura é um segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto. Esse lado é chamado base da altura, e o ponto onde a altura encontra a base é chamado de pé da altura. Na figura ao lado tem-se as três alturas traçadas para o triângulo.

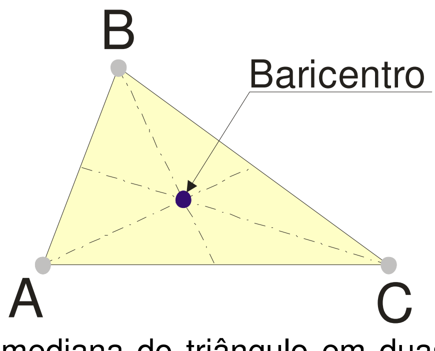




O prolongamento das alturas de um triângulo são concorrentes em um ponto denominado de ortocentro. O ortocentro poderá ser interno ou externo ao triângulo.

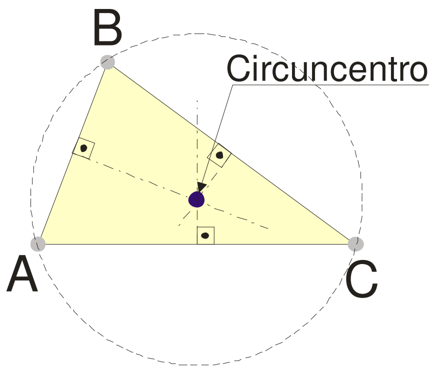
Medianas

Mediana é um segmento de reta traçada por um dos vértices de triângulo até o ponto médio do lado oposto ao vértice. Um triângulo possui três medianas que concorrem em um ponto denominado baricentro. O baricentro (do grego - baros "peso", do latim - centrum "centro de gravidade") de um triângulo é também chamado de centro de gravidade ou centróide. É também o ponto que divide cada mediana do triângulo em duas partes: um terço a contar do lado e dois terços a contar do vértice.



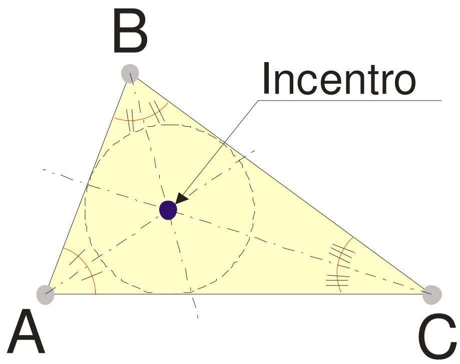
Mediatriz

Mediatriz é um segmento de reta ortogonal aos lados do triângulo, traçada pelos pontos médios dos respectivos lados. As mediatrizes são concorrentes num ponto denominado circuncentro. O circuncentro permite circunscrever uma circunferência ao triângulo.



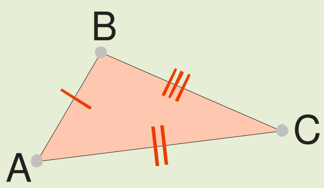
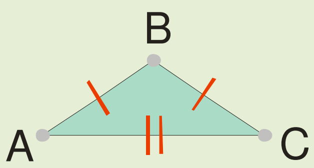
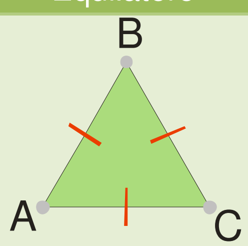
Bissetriz

Bissetriz é um segmento de reta que divide os ângulos internos do triângulo em duas partes iguais. As bissetrizes são concorrentes num ponto denominado incentro. O incentro permite inscrever uma circunferência ao triângulo.

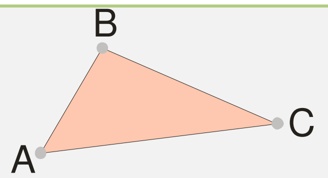
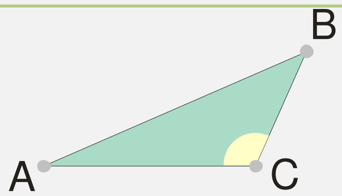
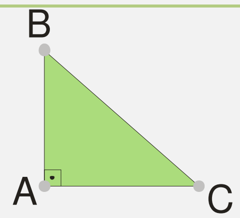


5.3 - CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

Para classificar os triângulos devemos observar os seus lados e ângulos. Quando aos lados os triângulos são divididos em: escaleno, isósceles e eqüilátero.

Escaleno	Isósceles	Equilátero
		
Três lados com medidas distintas	Dois lados com medidas iguais.	Três lados com medidas iguais.

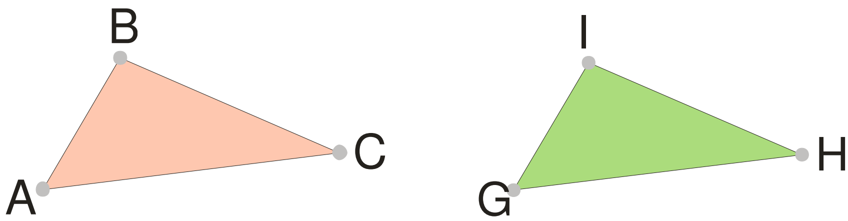
Quando aos ângulos os triângulos são divididos em: acutângulo, obtusângulo e retângulo.

Acutângulo		Todos os ângulos internos são agudos, isto é, as medidas dos ângulos são menores do que 90º.
Obtusângulo		Um ângulo interno é obtuso, isto é, possui um ângulo com medida maior do que 90º
Retângulo		Possui um ângulo interno reto (90 graus).

Obs: O triângulo retângulo é o principal triângulo da topografia. Uma grande parte dos cálculos topográficos utiliza as relações métricas e trigonométricas desse triângulo.

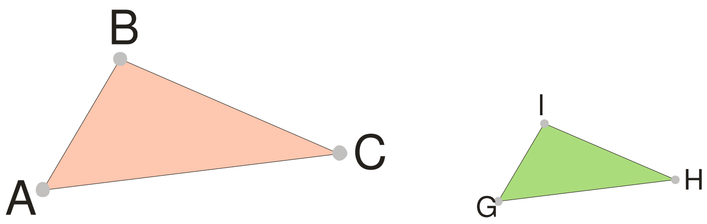
5.4- SEMELHANÇA E CONGRUÊNCIA

Dois triângulos são ditos congruentes quando possuem a mesma forma e as mesmas dimensões, isto é, o mesmo tamanho. Os triângulos ABC e GHI, abaixo, são congruentes, ou seja: ABC = GHI.

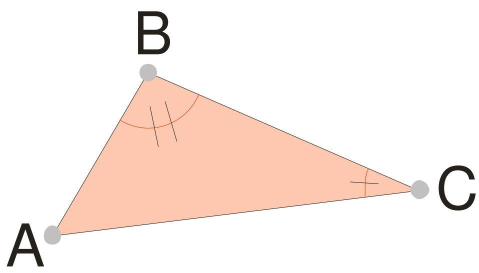


Dois triângulos são congruentes, se os seus elementos correspondentes são ordenadamente congruentes, isto é, os três lados e os três ângulos de cada triângulo têm respectivamente as mesmas medidas.

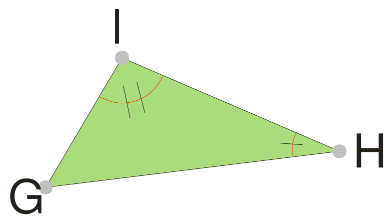
Dois triângulos são ditos semelhante quando possuem a mesma forma mais não necessariamente as mesmas dimensões, isto é, o mesmo tamanho. Os triângulos ABC e GHI, abaixo, são semelhantes, ou seja: ABC ~ GHI.



Dados dois triângulos semelhantes, tais triângulos possuem lados proporcionais e ângulos congruentes. Se um lado do primeiro triângulo é proporcional a um lado do outro triângulo, então estes dois lados são ditos homólogos. Nos triângulos acima, todos os lados proporcionais são homólogos.



Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois ângulos respectivamente congruentes. Nos triângulos ao lado, os ângulos B e C são congruentes aos ângulos I e H respectivamente. Assim, o triângulo ABC ~ GIH.



Da condição de semelhança entre os triângulos anteriores, podemos relacionar os comprimentos dos seus lados da seguinte forma:

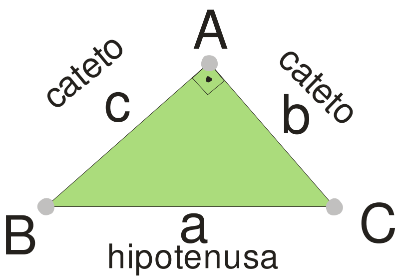
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IH}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{HG}} = Constante$$

A razão entre os segmentos estabelece um fator de escala entre os triângulos denominado de **razão de semelhança**. O fator de escala ou a razão de semelhança poderá ser de ampliação ou redução.

5.5- O TRIÂNGULO RETÂNGULO

O triângulo retângulo é o principal triângulo estudado em topografia, pois as relações existentes entre os seus lados e ângulos auxiliam nas resoluções de problemas topográficos. Assim, trataremos o mesmo com maio particularidade.

Em um triângulo retângulo, são chamados de catetos os lados perpendiculares entre si, ou seja, aqueles que formam o ângulo reto, e é chamado de hipotenusa o lado oposto ao ângulo reto. No triângulo retângulo ao lado os segmentos “b” e “c” correspondem aos catetos e o segmento “a” a hipotenusa.



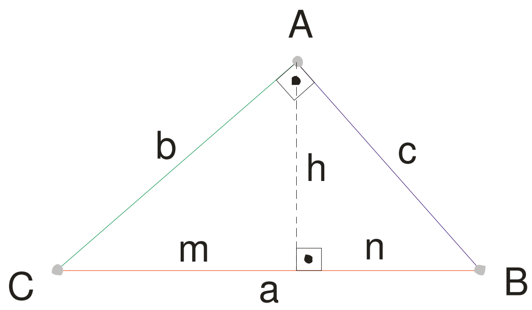
Dado o triângulo retângulo ao lado, temos:

a: hipotenusa;

b e c: catetos;

h: altura em relação à hipotenusa;

m e n: projeções dos catetos sobre a hipotenusa.



Podemos obter as seguintes relações métricas dos seus elementos:

Área: $A = \frac{a \times h}{2}$ ou $A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$

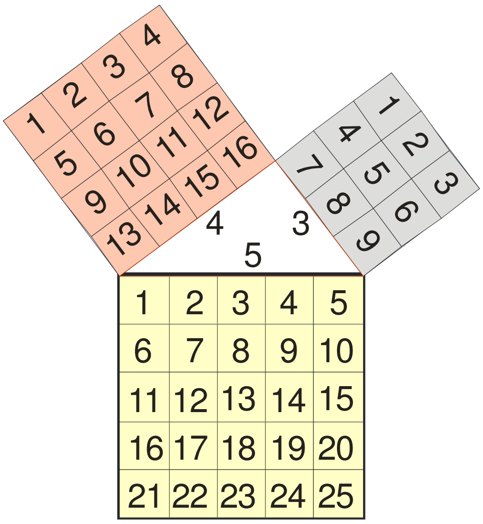
Perímetro: $p = a + b + c$

$b^2 = a \times n$; $c^2 = a \times m$; $h^2 = m \times n$;

Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras corresponde a uma das propriedades mais importantes do triângulo retângulo. Leva esse nome em homenagem a Pitágoras, matemático grego que viveu entre (570 a.C. – 495 a.C.). Acredita-se que o mesmo tenha demonstrado essa relação, embora, alguns autores, argumentem que o conhecimento do teorema seja anterior a ele (há evidências que os babilônicos conheciam algoritmos para calcular os lados em casos específicos).

A demonstração do teorema de Pitágoras pode ser feita de diversas formas, entretanto a mais simples corresponde a contar a quantidade de quadrado de lado unitário que se pode obter com um triângulo retângulo de dimensão 3 x 4 x 5. Construindo quadrados maiores com os lados do triângulo pode-se contar a quantidade de quadrados unitários 1 x 1 contidos dentro dos quadrados maiores. Nota-se que a quantidade se quadrados unitários contidos nos quadrados formados pelos lados de 4 e 3 unidades, respectivamente, é igual a quantidade de quadrados unitários formados pelo quadrado de 5 unidades. Assim, temos:



$$5^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow 25 = 16 + 9 \rightarrow 25 = 25$$

Genericamente temos:

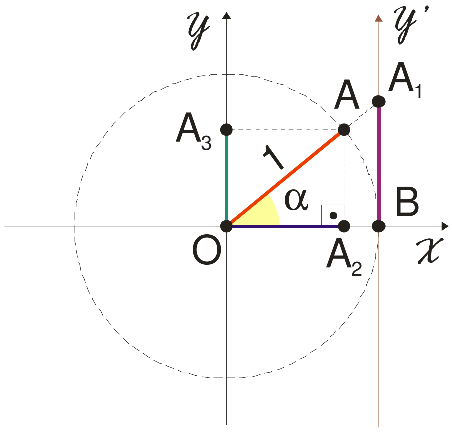
$$a^2 = b^2 + c^2$$

5.6- O CICLO TRIGONOMÉTRICO

Para concluir o estudo do triângulo retângulo faz-se necessário apresentar as relações trigonométricas existente no mesmo.

A Trigonometria (do grego trigōnon "triângulo" + metron "medida") é um ramo da matemática que estuda os triângulos. Desta forma, a trigonometria guarda uma estreita relação com o triângulo retângulo. Ela também estuda as relações entre os lados e os ângulos dos triângulos; as funções trigonométricas, e os cálculos baseados nelas. A abordagem da trigonometria penetra outros campos da geometria, como o estudo de esferas usando a trigonometria esférica.

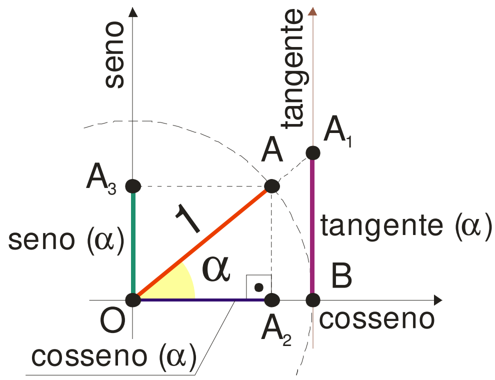
Para obtermos as relações trigonométricas existentes em um triângulo, devemos estudar o ciclo trigonométrico. O ciclo trigonométrico é uma circunferência orientada de raio unitário, centrada na origem dos eixos de um plano cartesiano ortogonal (x, y). Os eixos são conhecidos como eixo dos cossenos (eixo y) e eixo dos senos (eixo x). O eixo secundário y' mostrado na figura ao lado corresponde ao eixo das tangentes.



O ponto (A) pode descrever arcos ao se deslocar na circunferência de raio unitário. Existem dois sentidos de marcação dos arcos no ciclo: o sentido positivo, chamado de anti-horário, que se dá a partir da origem dos arcos até o lado terminal do ângulo correspondente ao arco; e o sentido negativo, ou horário, que se dá no sentido contrário ao anterior.

O ponto (A), ao deslocar-se desde a posição (B), descreve o arco AB, que por sua vez está associado ao ângulo α.

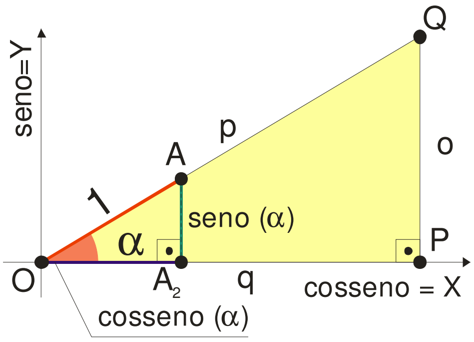
O Ponto (A) pode ser projetado sobre os eixos (x, y), correspondendo aos segmentos de retas $\overline{OA_2}$ e $\overline{OA_3}$, representando o cosseno e o seno, respectivamente, do ângulo α associado.



O prolongamento do raio, segmento de reta $\overline{OA}$, permite obter o ponto (A_1) sobre o eixo das tangentes. O segmento de reta $\overline{BA_1}$, corresponde à tangente do ângulo α associado.

O triângulo retângulo OAA_2 obtido da figura anterior é utilizado como referência para construir as relações trigonométricas de todos os triângulos retângulos. Através das relações de semelhança e congruência dos elementos apresentados podemos ligar os lados de um triângulo aos senos e cossenos de um ângulo.

O triângulo retângulo OPQ e o triângulo retângulo OA_2A, na figura ao lado, são semelhantes e desta forma guardam uma relação entre si. Podemos escrever as seguintes relações entre eles:



Relação 1:

$$\frac{\overline{QP}}{\overline{AA_2}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}} \rightarrow \frac{o}{seno(\alpha)} = \frac{1}{p} \rightarrow \frac{Cateto\ Oposto\ a\ \alpha}{seno(\alpha)} = \frac{1}{Hipotenusa}$$

$$\boxed{seno(\alpha) = \frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa}}$$

Relação 2:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}} \rightarrow \frac{q}{cosseno(\alpha)} = \frac{1}{p} \rightarrow \frac{Cateto\ Adjacente\ a\ \alpha}{cosseno(\alpha)} = \frac{1}{Hipotenusa}$$

$$\boxed{cosseno(\alpha) = \frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa}}$$

Relação 3:

$$\frac{\overline{QP}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA_2}} \rightarrow \frac{o}{seno(\alpha)} = \frac{q}{cosseno(\alpha)}$$

$$\frac{Cateto\ Oposto\ a\ \alpha}{seno(\alpha)} = \frac{Cateto\ Adjacente\ a\ \alpha}{cosseno(\alpha)}$$

$$\frac{seno(\alpha)}{cosseno(\alpha)} = \frac{Cateto\ Oposto\ a\ \alpha}{Cateto\ Adjacente\ a\ \alpha}$$

$$\boxed{tangente(\alpha) = \frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente}}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo do ciclo trigonométrico temos:

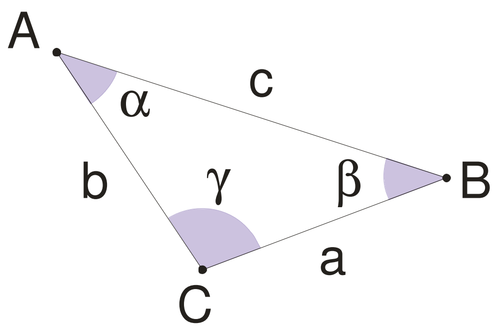
$1^2 = \text{seno}^2(\alpha) + \text{cosseno}^2(\alpha)$ ou $\text{seno}^2(\alpha) + \text{cosseno}^2(\alpha) = 1$

5.7- TRIÂNGULO QUALQUER

As relações métricas e trigonométricas apresentadas anteriormente são validas apenas para o triângulo retângulo. Para os outros casos devemos aplicar outras relações mais generalistas. As principais relações aplicadas a triângulos quaisquer são a lei do seno e a lei do cosseno. As leis dos senos e cossenos podem ser aplicadas aos triângulos retângulos.

Lei dos senos.

$$\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c}$$



Lei dos cossenos.

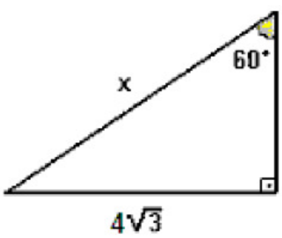
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times \mathrm{b} \times \mathrm{c} \times \mathrm{cosseno}(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \times \mathrm{a} \times \mathrm{c} \times \mathrm{cosseno}(\beta)$$

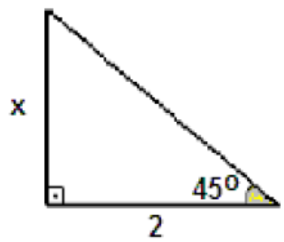
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times \mathrm{a} \times \mathrm{b} \times \mathrm{cosseno}(\gamma)$$

Exercícios:

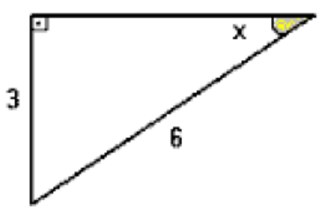
1) Para os triângulos retângulos abaixo, calcular o valor de X.



a)

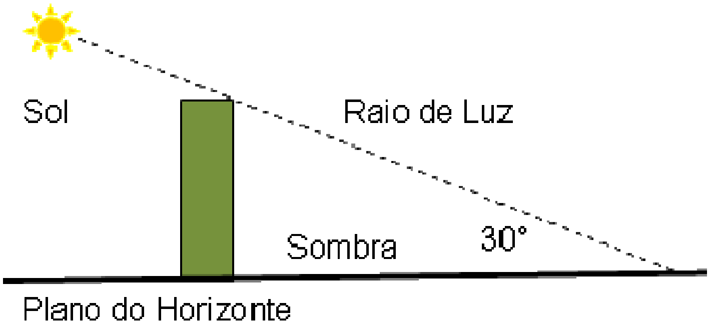


b)

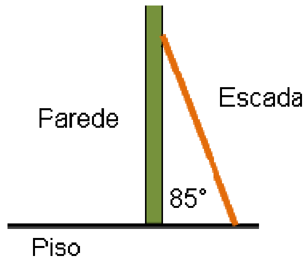


c)

2) O sol atinge um prédio formando um ângulo de 30 graus com o plano do horizonte. Sabendo a medida da sombra projetada pelo prédio corresponde a 220m, calcular a altura do mesmo.



3) Uma escada de 7m de comprimento encontra-se apoiada em uma parede, formando um ângulo de 85° com o piso. Deseja-se saber qual é o afastamento dos pés em relação à parede. Dados: seno (85)=0,996194698



4) Para determinar um ponto inacessível, um agrimensor determinou os seguintes dados:

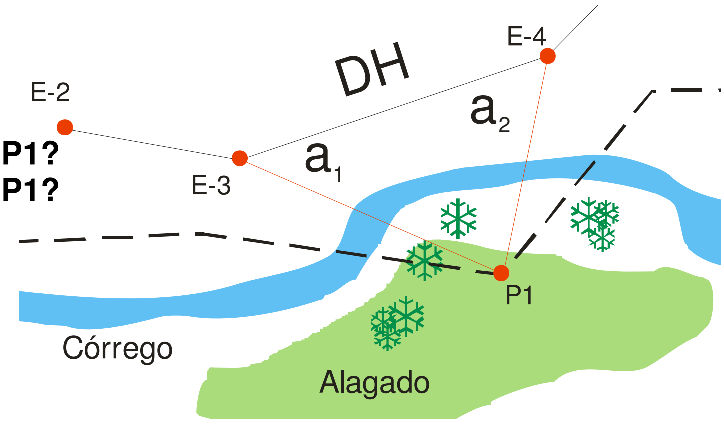
a_1: 45º

a_2: 60º

DH: 150m

Qual é a distância entre E-3 e P1?

Qual é a distância entre E-4 e P1?



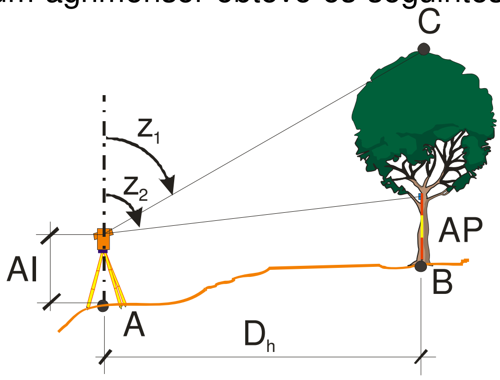
5) Para determinar a altura de uma árvore um agrimensor obteve os seguintes dados:

Z_1: 80°

Z_2: 81°

AP=AI= 1,6m

DH: 150m



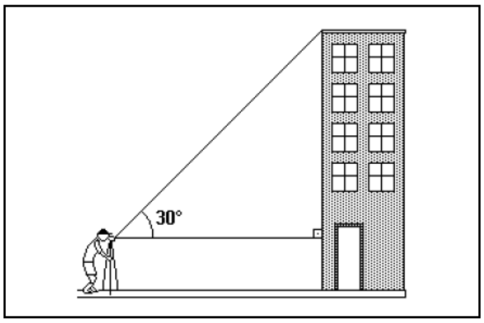
Qual é a altura da árvore em metros?
(Valor da questão:1 5)

Dados:

seno (80°) = 0,9848077553 e Cosseno (80°) = 0,173648178

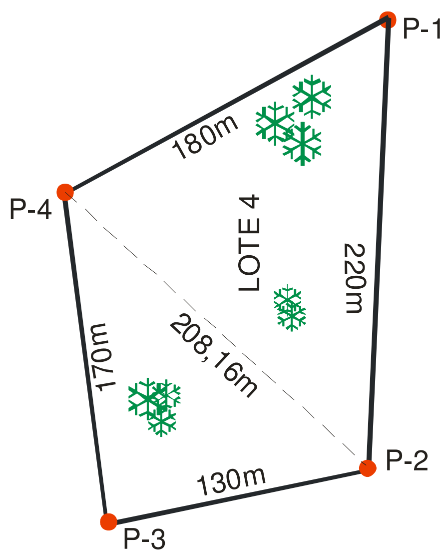
seno (81°) = 0,987688341 e Cosseno (81°) = 0,156434465

6) Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito (instrumento ótico para medir ângulos) a 200 metros do edifício e mediu um ângulo de 30°, como indicado na figura a seguir. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,5 metros do solo, Calcule a altura do prédio.



Use os valores: sen 30° = 0,5 , cos 30° = 0,866 e t g 30° = 0,577

7) Um Eng. Civil efetuou as seguintes medidas de um lote irregular como mostra a figura ao lado. Utilizando as relações métricas e trigonométricas do triângulo, deseja-se saber os ângulos internos do polígono bem como a sua área.



ANEXOS

Pronúncia	Minúscula	Maiúscula
alfa	α	Α
beta	β	Β
gama	γ	Γ
delta	δ	Δ
épsilon	ε	Ε
dzeta	ζ	Ζ
eta	η	Η
teta	θ	Θ
iota	ι	Ι
capa	κ	Κ
lâmbda	λ	Λ
mi	μ	Μ

Pronúncia	Minúscula	Maiúscula
ni	ν	Ν
ksi	ξ	Ξ
omicron	ο	Ο
pi	π	Π
rho	ρ	Ρ
sigma	σ	Σ
tau	τ	Τ
upsilon	υ	Υ
phi	φ	Φ
khi	χ	Χ
psi	ψ	Ψ
ômega	ω	Ω