

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Toda medida está impregnada de erros de observação. Por essa razão normalmente se procedem a mais de uma medida para se ter garantias sobre o valor encontrado.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Se as medidas forem de uma única grandeza como, por exemplo, distâncias ou ângulos, a média é uma boa solução. Contudo, quando estão envolvidas ao mesmo tempo grandezas de naturezas diferentes e que se relacionam através de uma função matemática, a solução não é tão imediata.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Outro fato importante reside na premissa de que somente o valor da grandeza não é suficiente, do ponto de vista técnico-científico. É preciso saber qual o grau de confiança no valor obtido. Isto é proporcionado pela estimativa de precisão da medida.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec

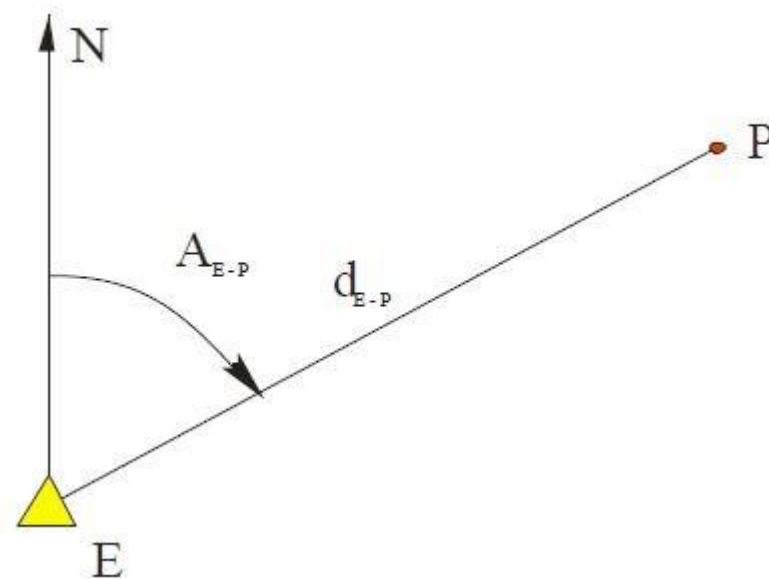


Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Encontrar a as coordenadas de P a partir de uma estação E , cuja distância entre a estação e o ponto, e o azimuth da direção sejam conhecidos.



$$X_P = X_E + d_{E-P} \sin A_{E-P}$$

$$Y_P = Y_E + d_{E-P} \cos A_{E-P}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



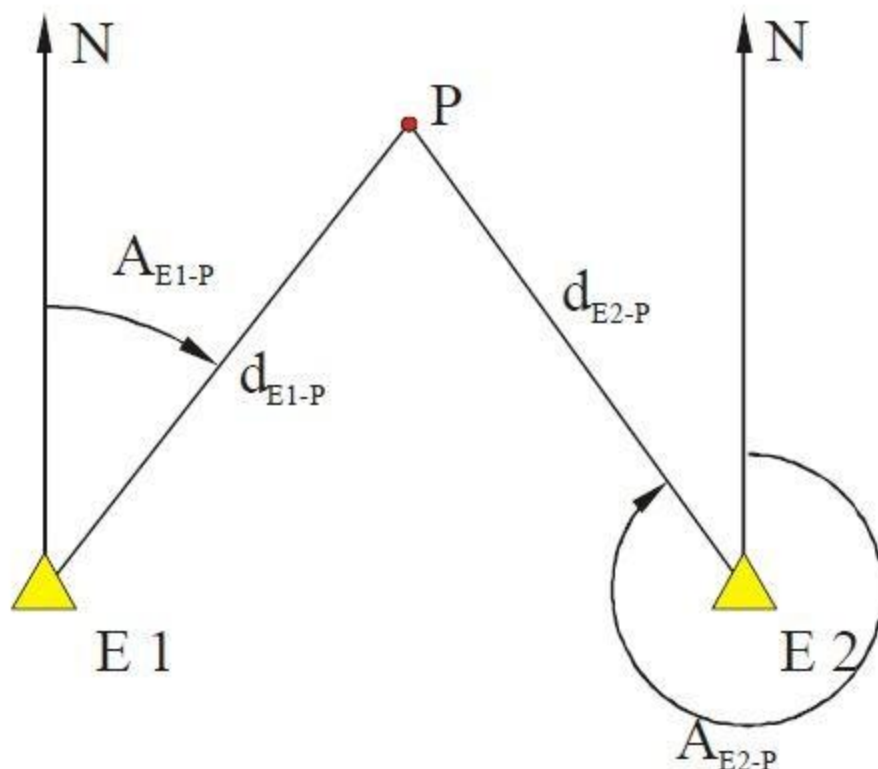
@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES



$$X_P = X_{E1} + d_{E1-P} \sin A_{E1-P}$$

$$Y_P = Y_{E1} + d_{E1-P} \cos A_{E1-P}$$

$$X_P = X_{E2} + d_{E2-P} \sin A_{E2-P}$$

$$Y_P = Y_{E2} + d_{E2-P} \cos A_{E2-P}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Qual é a coordenada de P sabendo que:

- ❖ Observações foram feitas por equipamentos distintos;
- ❖ Observações foram feitas por operadores distintos;



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

“O ajustamento é o ramo da matemática aplicada que tem por objetivo a **solução única** para problemas onde o número de **observações** (ou medidas) é **redundante** e o sistema de equações **inconsistente**, bem como a **precisão** da solução adotada” Camargo (2000).



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



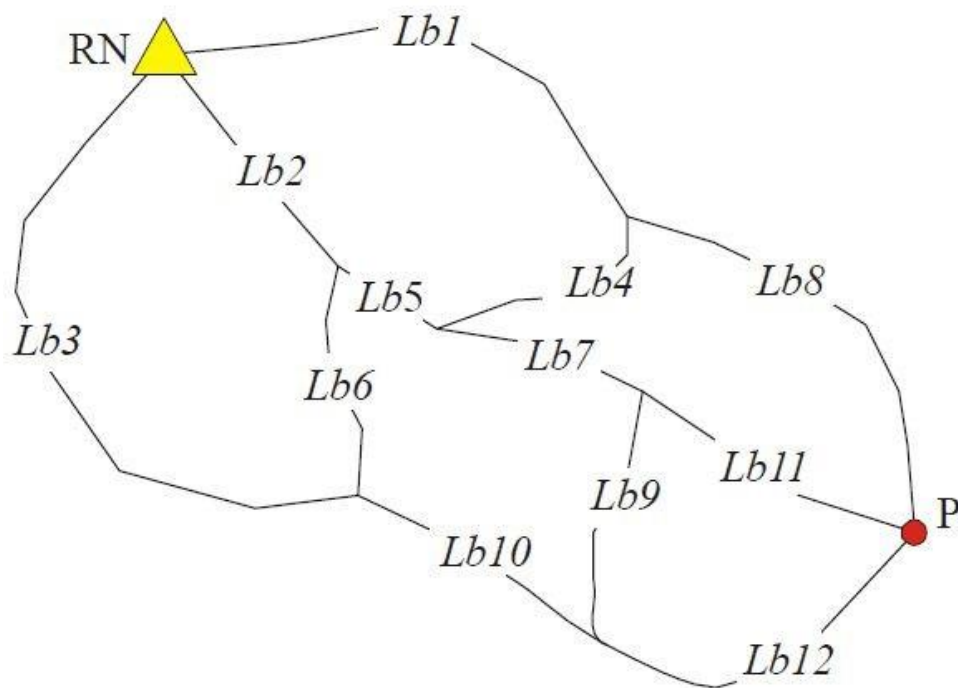
@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES



$$\Delta h_{RNP} = Lb1 + Lb8$$

$$\Delta h_{RNP} = Lb2 + Lb5 + Lb7 + Lb11$$

$$\Delta h_{RNP} = Lb3 + Lb10 + Lb12$$

$$\Delta h_{RNP} = Lb1 + Lb4 + Lb7 + Lb11$$

$$\Delta h_{RNP} = Lb3 + Lb6 + Lb5 + Lb7 + Lb11$$

$$\Delta h_{RNP} = Lb3 + Lb10 + Lb9 + Lb11$$

.....

Estas são algumas das possibilidades de solução. Todavia a probabilidade de cada uma delas gerar uma resposta diferente é muito grande.

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Após o processo de ajustamento independentemente da solução adotada a **resposta será única.**

É possível ainda, com base nas técnicas do ajustamento, detectar a presença de erros grosseiros em um conjunto de observações, efetuar o planejamento da coleta de dados e saber, a priori, se atenderão às prescrições estabelecidas.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

propriedades fundamentais da medida:

- ❖ Medir significa realizar uma operação física, e o processo de medida consiste de várias operações elementares; tais como: preparação, calibração, pontaria, leitura e etc.;
- ❖ O resultado do processo representa a medida;
- ❖ A não ser na contagem de certos eventos, a medida é sempre realizada com auxílio de instrumentos;
- ❖ As medidas estão referenciadas a um padrão, os quais são estabelecidos por convenção. Medir é comparar uma grandeza a um padrão, tendo dimensão e unidade;



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

propriedades fundamentais da medida:

- ❖ A medida é um conceito teórico, tal como uma abstração geométrica usada para distância e ângulo, os quais não têm equivalente direto na natureza física. No entanto, tais conceitos permitem descrever certos elementos da natureza, como localização, área e etc.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

MODELOS MATEMÁTICOS

Para descrever certos elementos da natureza é necessário utilizar modelos, como é o caso da forma da Terra, onde se utiliza a esfera ou o elipsóide de revolução.

No caso do ajustamento, o modelo que interessa é o **matemático que relaciona as medidas efetuadas com as grandezas procuradas**. Este é o caso das equações que unem a distância e o azimute com as coordenadas do ponto.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

MODELOS MATEMÁTICOS

Define-se **modelo matemático** ao sistema teórico ou abstrato que descreve uma situação física ou uma série de eventos. Tal descrição não necessita explicar totalmente a situação física, mas relacionar somente os aspectos, ou propriedades de interesse.

Tendo em vista que o modelo tem o propósito de atender um interesse particular, dependendo do propósito, ele pode assumir formas diferentes.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



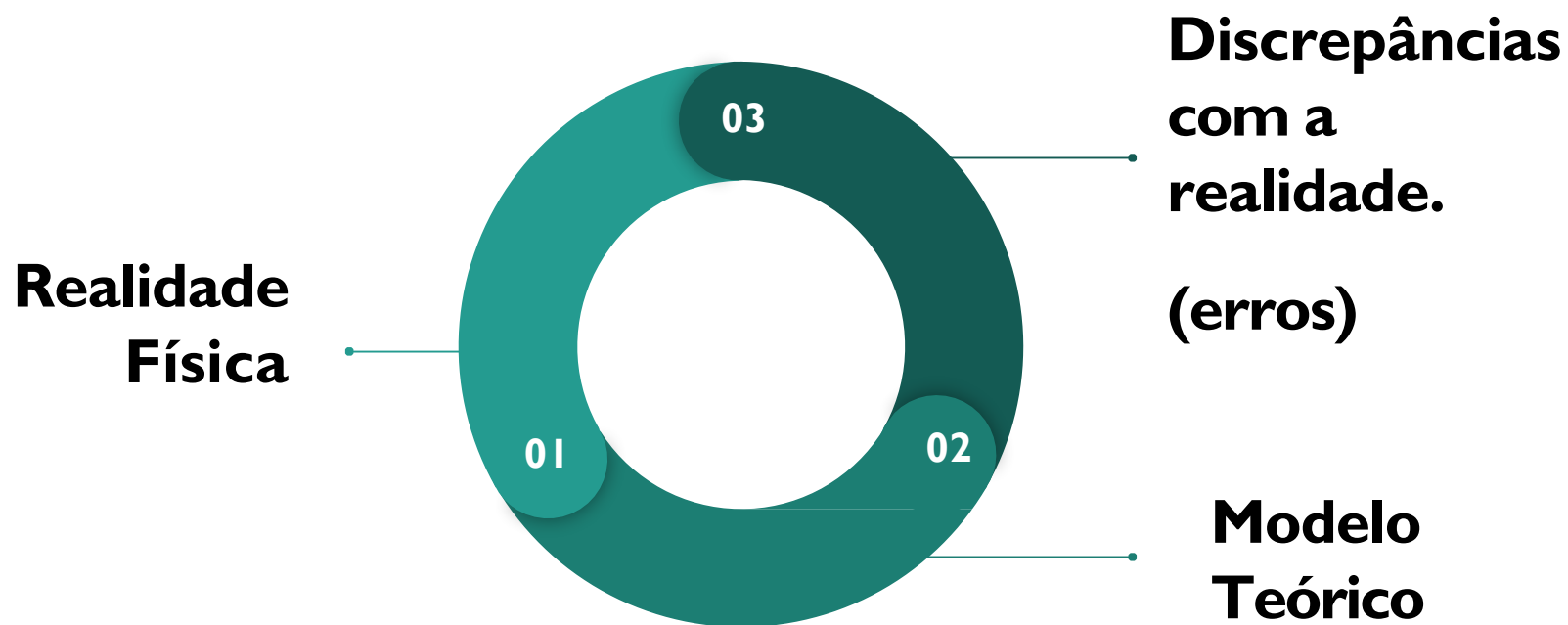
@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

MODELOS MATEMÁTICOS



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



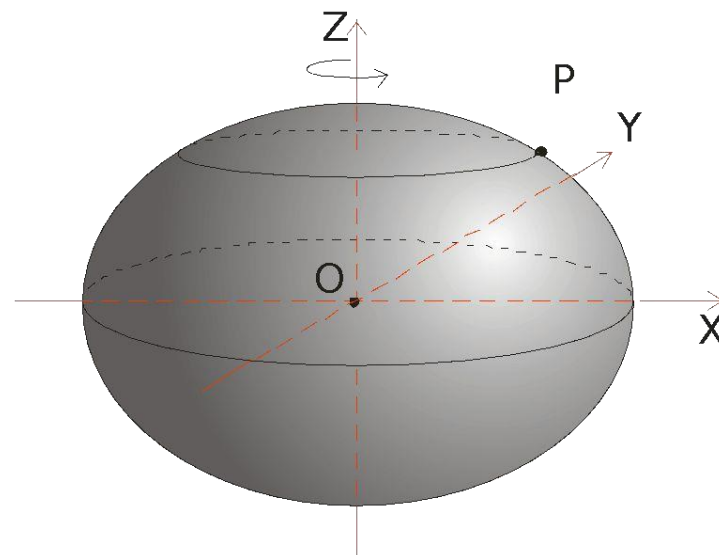
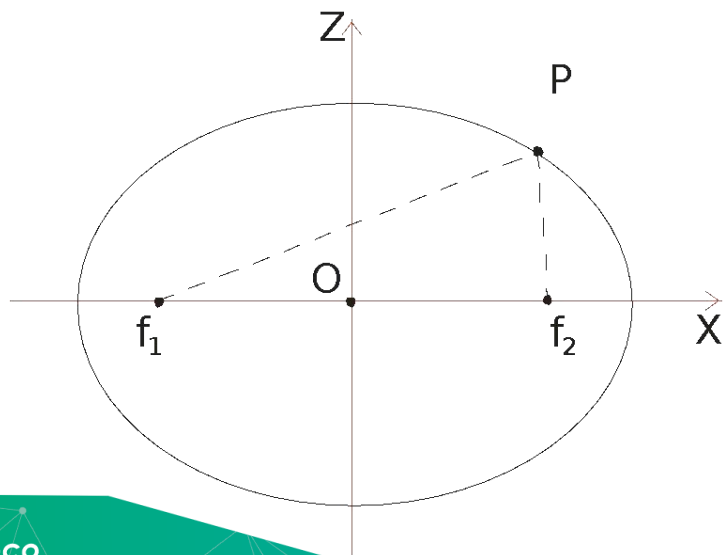
@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

MODELOS MATEMÁTICOS



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



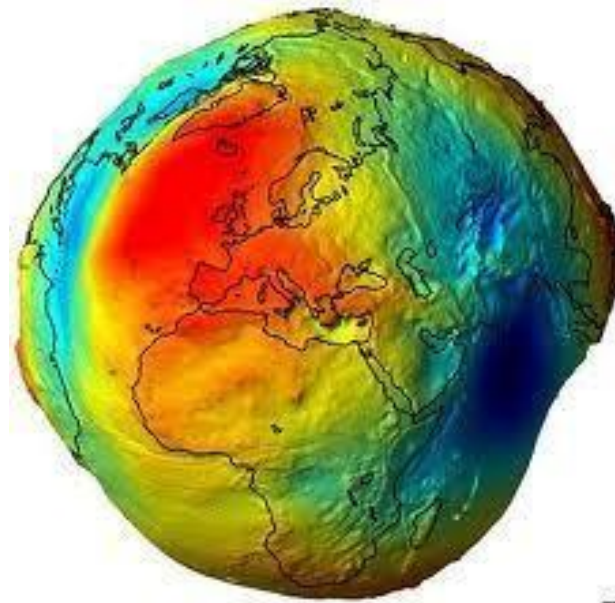
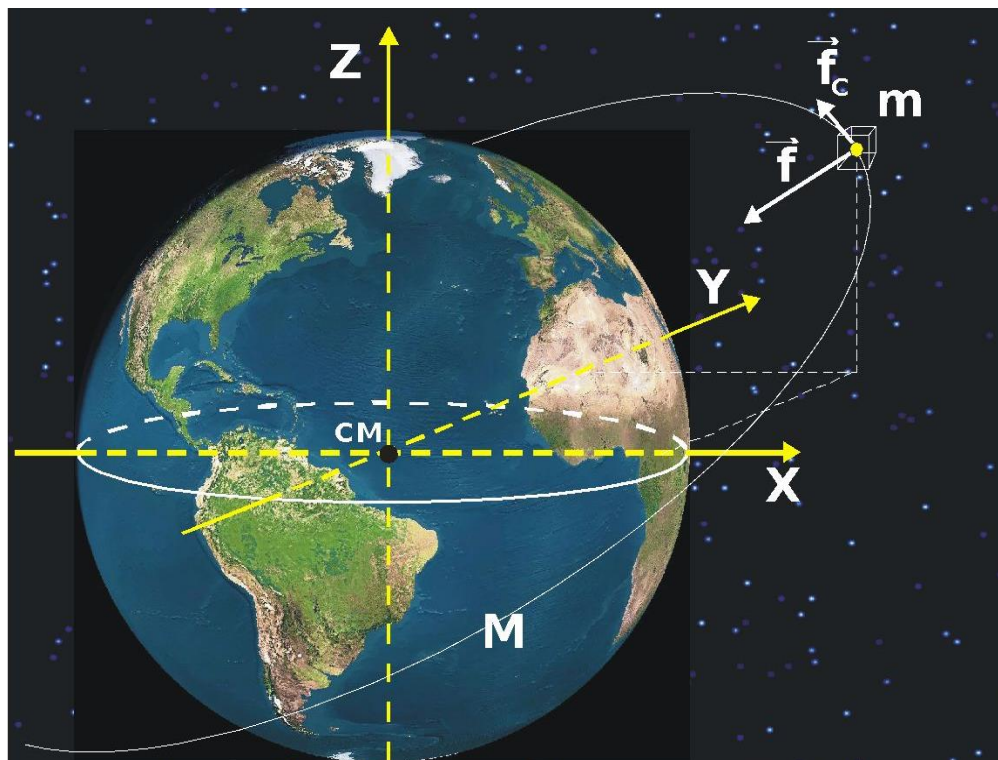
@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

MODELOS MATEMÁTICOS



$$\begin{aligned}\vec{f}_c &= r \times \omega^2 \\ \vec{f} &= \frac{k \times M}{r^2} \\ \vec{g} &= \vec{f}_c + \vec{f}\end{aligned}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

MODELOS MATEMÁTICOS

O modelo matemático não descreve exhaustivamente o fenômeno, os eventos ou a realidade física. Descreve apenas aspectos de interesse dessa realidade e com aproximação requerida.

Existe dois modelos tratados em ajustamento:

- ❖ Funcional (constitui a parte determinística da realidade física);
- ❖ Estocástico (descreve as propriedades estatísticas das observações).



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

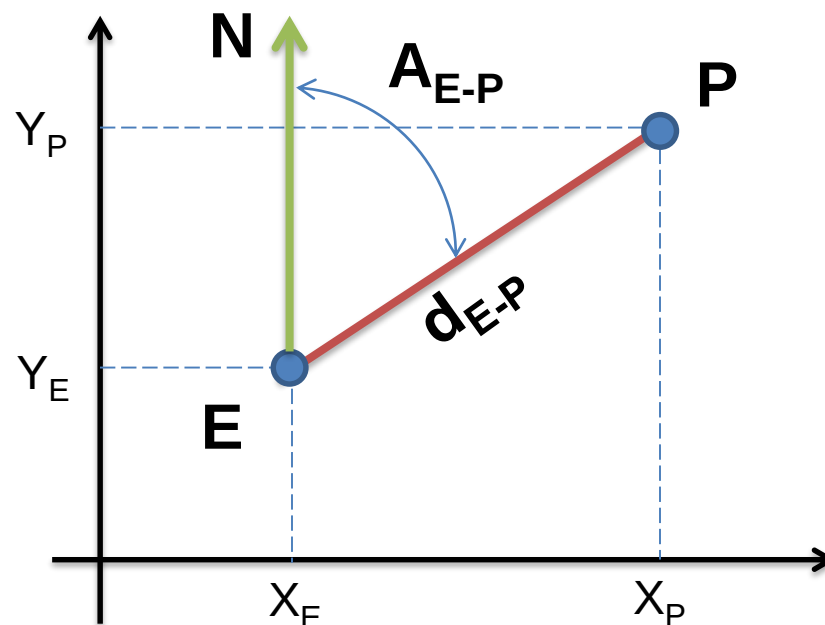
MODELOS MATEMÁTICOS

O modelo matemático funcional:

é composto por relações que descrevem a geometria ou características físicas do problema em questão.

$$X_P = X_E + d_{E-P} \sin A_{E-P}$$

$$Y_P = Y_E + d_{E-P} \cos A_{E-P}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

MODELOS MATEMÁTICOS

O modelo matemático estocástico:

é composto pelo conjunto de relações que descrevem as propriedades estatísticas dos elementos envolvidos no modelo funcional.

O modelo estocástico indica por exemplo a qualidade das observações feitas (as suas precisões, relativas ou absolutas), indica se as observações estão correlacionadas ou não, indica ainda as variáveis que são consideradas constantes durante o ajustamento e as que se pretendem determinar.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Se o conjunto que constitui a v.a. é de mesma natureza, diz-se que ele é uma **variável aleatória unidimensional**. Entretanto, quando no conjunto têm-se grandezas de natureza diversa, diz-se que é uma **v.a. multidimensional**. Por exemplo, o conjunto constituído por uma série de medidas angulares é uma v.a. unidimensional, e o conjunto constituído por azimuth e distância, é multidimensional.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

A estimativa de precisão de uma v.a. é fornecida pelo desvio padrão dessa variável (σ_i).

Quando se tem uma v.a. multidimensional, a precisão é representada pela matriz variância covariância (Σ) que é formada pelas variâncias (σ_i^2) dos i indivíduos ou elementos que compõem a v.a., e pelas covariâncias (σ_{ij}) desses mesmos elementos.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Por exemplo, as variâncias (σ_i^2) e covariâncias (σ_{ij}) de um conjunto de n observações (Lb) podem ser dispostas de maneira a formar uma matriz quadrada ($n \times n$), representada por (Σ_{LB}), ou seja:

$$\Sigma_{Lb} = \begin{bmatrix} \sigma_{Lb1}^2 & \sigma_{Lb1Lb2} & \dots & \sigma_{Lb1Lbn} \\ \sigma_{Lb2Lb1} & \sigma_{Lb2}^2 & \dots & \sigma_{Lb2Lbn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{LbnLb1} & \sigma_{LbnLb2} & \dots & \sigma_{Lbn}^2 \end{bmatrix}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

A matriz (Σ_{LB}) , simétrica ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), recebe o nome de matriz variância-covariância (M.V.C.), ou simplesmente matriz covariância (M.C.).

No caso das observações serem independentes entre si, as covariância serão nulas e (Σ_{LB}) se degenera numa matriz diagonal.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Na matriz variância-covariância, como dito anteriormente, a variância (σ_i^2) fornece, através da extração da raiz quadrada, a **precisão de cada v.a.** e a covariância (σ_{ij}) indica que existe dependência entre elas.

A matriz dos coeficientes de correlação, derivada da matriz variância-covariância, fornece o grau de dependência entre as diversas v.a.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

onde : $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \times \sigma_j}$ – coeficiente de correlação entre a v.a. i e a j ;

σ_{ij} – covariância entre a v.a. i e a j ;

σ_i, σ_j – desvio padrão das v.a. i e j .

Os valores dessa matriz variam entre -1 e 1, sendo que se:

$|\rho_{ij}| = 1$ – dependência é total

$|\rho_{ij}| = 0$ – independência é total



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



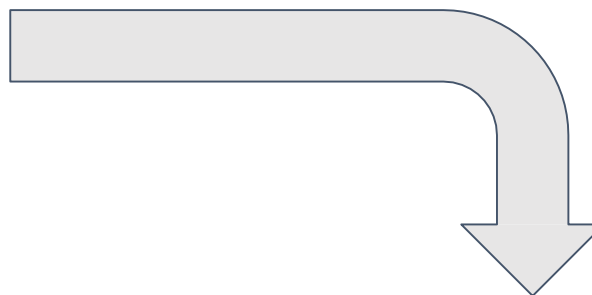
Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Exemplo: Dada a matriz variância-covariância da v.a. A, calcule a matriz de correlação associada.

$$\Sigma A = \begin{bmatrix} 36 & 18 & 12 \\ 18 & 9 & 0 \\ 12 & 0 & 16 \end{bmatrix} m^2$$



$$\rho A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Considere um vetor $Z(n+m \times 1)$ do qual os vetores $X(n \times 1)$ e $Y(m \times 1)$ são componentes:

$$Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

A sua MVC, como sempre quadrada e simétrica, é dada por:

$$\Sigma_Z = \begin{bmatrix} \Sigma_X & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_Y \end{bmatrix}; [(m+n) \times (m+n)] = \begin{bmatrix} n \times n & n \times m \\ m \times n & m \times m \end{bmatrix}$$

Σ_{YX}

Corresponde a matriz covariância cruzada de dois vetores, a qual, não necessariamente, é quadrada.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

A Lei de propagação das Covariâncias nos diz que se conhecermos a matriz variância-covariância da v.a. X (Σ_X) e o modelo funcional que a relaciona com a v.a. Y , a matriz variância-covariância dessa matriz (Σ_Y) é calculada por: $\Sigma Y = G.\Sigma X.G^T$ (Linear)

$$\Sigma Y = D.\Sigma X.D^T \quad (\text{Não Linear})$$

onde $D = \frac{\partial F}{\partial Lb}$ é a derivada da função em relação aos valores medidos.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



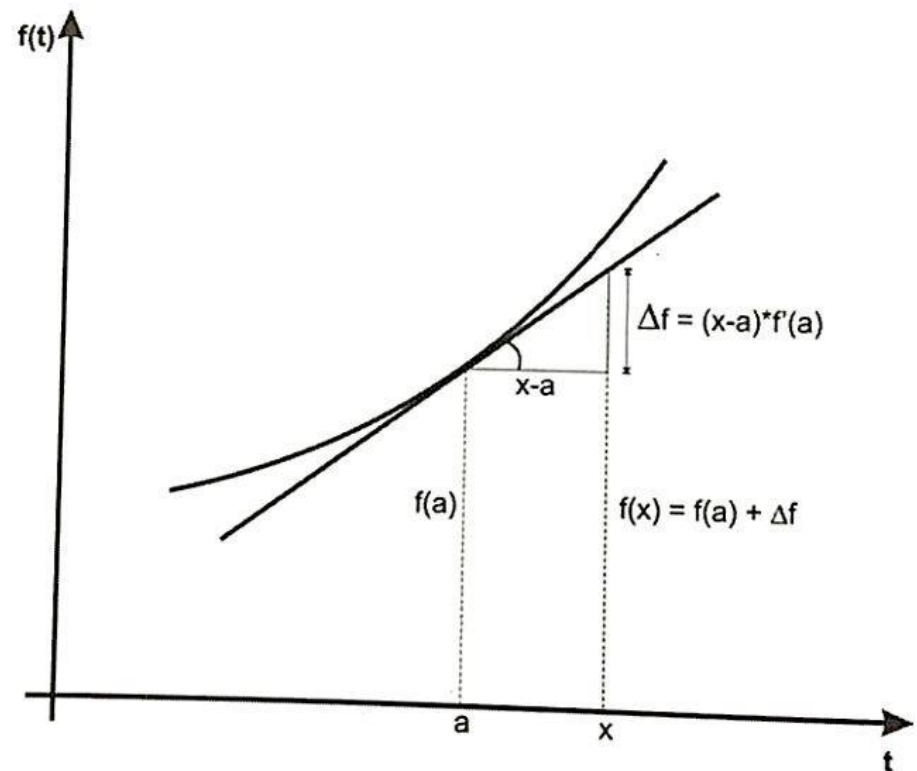
Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{x-a}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

$$f_1(X) = f_1(X^0) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial X} \right|_{X^0} \Delta X.$$

$$f_2(X) = f_2(X^0) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial X} \right|_{X^0} \Delta X.$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$F(X) = F(X^0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X^0} \Delta X.$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Exemplo: Foram realizadas as medidas de 5 direções (d_1, d_2, d_3, d_4 e d_5) com um equipamento cuja precisão angular é de $5''$. Pretende-se calcular os ângulos a_1, a_2, a_3 e a_4 entre essas direções.

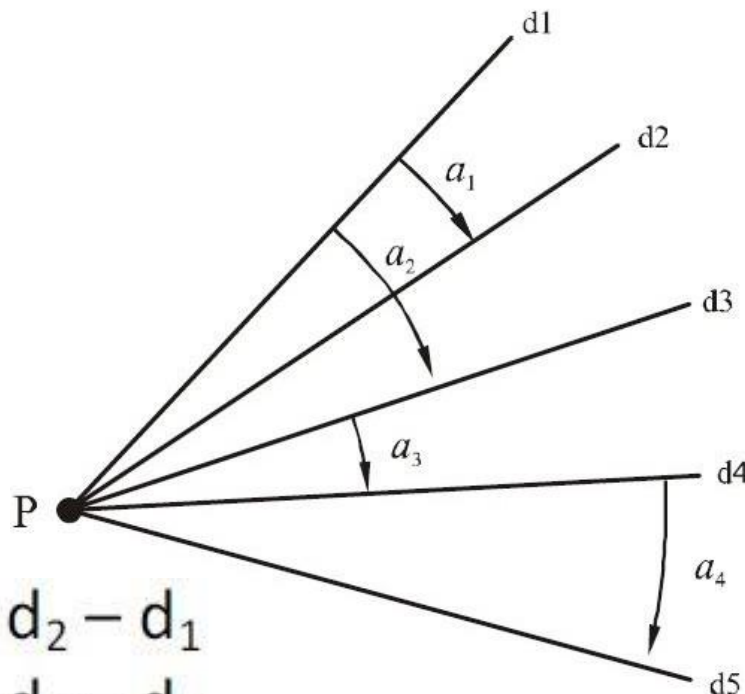
$${}_m Y_1 = {}_m G_n \times {}_n X_1 + {}_m C_1$$

$\downarrow$
 a_i

$\downarrow$
 Coeficientes

$\downarrow$
 d_i

$\downarrow$
 Termos
Independentes



$$a_1 = d_2 - d_1$$

$$a_2 = d_3 - d_1$$

$$a_3 = d_4 - d_3$$

$$a_4 = d_5 - d_4$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

$$A = G.D + C$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

$$\Sigma Y = G.\Sigma X.G^T$$

$$\Sigma d = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} (")^2$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

$$\Sigma Y = G.\Sigma X.G^T$$

$$\Sigma A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma A = \begin{bmatrix} 50 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & 50 & -25 & 0 \\ 0 & -25 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & -25 & 50 \end{bmatrix} (")^2$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

$$\Sigma Y = G.\Sigma X.G^T$$

$$G = [-1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0; -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1]$$

$$S_X = [25 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 25 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 25 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 25 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25]$$

$$S_A = G \cdot S_X \cdot G'$$

```
--> G=[-1 1 0 0 0;-1 0 1 0 0;0 0 -1 1 0;0 0 0 -1 1]
SX=[25 0 0 0 0;0 25 0 0 0;0 0 25 0 0;0 0 0 25 0;0 0 0 0 25]
G =
-1 1 0 0 0
-1 0 1 0 0
0 0 -1 1 0
0 0 0 -1 1

--> SX=[25 0 0 0 0;0 25 0 0 0;0 0 25 0 0;0 0 0 25 0;0 0 0 0 25]
SX =
25 0 0 0 0
0 25 0 0 0
0 0 25 0 0
0 0 0 25 0
0 0 0 0 25

--> SA=G*SX*G'
SA =
50 25 0 0
25 50 -25 0
0 -25 50 -25
0 0 -25 50

-->
```



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

$$\Sigma A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 50 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & 50 & -25 & 0 \\ 0 & -25 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & -25 & 50 \end{bmatrix} & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \end{matrix} \quad \rho_{a_1 a_2} = \frac{25}{7,07 \times 7,07} = 0,5 \quad \text{ou} \quad 50\%$$

- ✓ a precisão dos ângulos a_1, a_2, a_3 e a_4 são iguais a $\sigma_{ai} = 7,07''$ ($\sigma_{ai} = \sqrt{50}$);
- ✓ existe covariância entre as variáveis a_1 com a_2 , a_2 com a_3 e a_3 com a_4 ;
- ✓ não existe covariância entre as variáveis a_1 com a_3 , a_1 com a_4 e a_2 com a_4 ;
- ✓ o fator de correlação entre a_1 com a_2 , a_2 com a_3 e a_3 com a_4 , a menos do sinal, é numericamente igual ao valor determinado pela equação de correlação.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

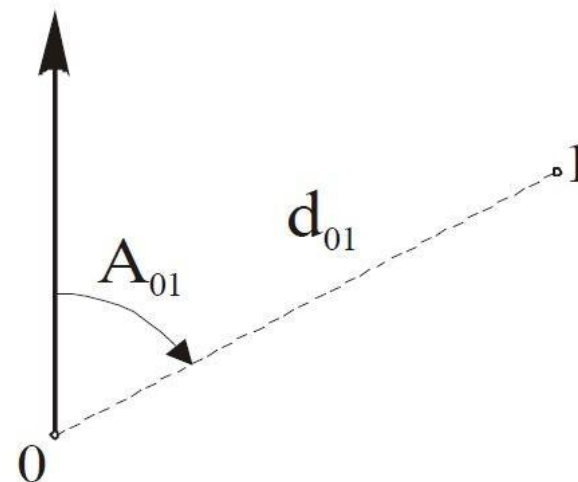
CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

Um observador com uma estação total mediu o azimute da direção CD e a distância entre as estações 0 e 1 a partir do ponto 0 cujas coordenadas são (0, 0).

Os valores obtidos foram respectivamente, $Az = 60^\circ$ e $DH = 2.000$ m. Considere que ele utilizou um equipamento cuja precisão angular é de $5''$ e a linear de $\pm 5\text{mm} \pm 5\text{ppm}$.

Quais são as coordenadas do ponto 1 e a respectiva precisão?



$$x_1 = x_0 + d_{01} \sin A_{01}$$

$$y_1 = y_0 + d_{01} \cos A_{01}$$

Não Linear

$$\Sigma xy = D \times \Sigma Ad \times D^T$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

$$\frac{\partial x_1}{\partial A} = d_{01} \times \cos A_{01} = 1.000 \text{ m}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial A} = -d_{01} \times \sin A_{01} = -1.732,05 \text{ m}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial d} = \sin A_{01} = 0,866025$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial d} = \cos A_{01} = 0,500000$$

$$D = \begin{bmatrix} 1.000,00m & 0,866025 \\ -1.732,05m & 0,500000 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma Ad = \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{Ad} \\ \sigma_{dA} & \sigma_d^2 \end{bmatrix} \quad \sigma_A^2 = (5'')^2 = 25''^2 \quad \sigma_A^2 = \left(\frac{5''}{3600} \times \frac{\pi}{180^\circ} \right)^2 = 5,876107 \times 10^{-10} \text{ radianos.}$$

$$\sigma_d^2 = \left(0,005m + \frac{5 \cdot 2.000m}{1.000.000} \right)^2 = (0,015 \text{ m})^2 = 0,000225 \text{ m}^2$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} 1.000,00m & 0,866025 \\ -1.732,05m & 0,500000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5,876107 \times 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0,000225m^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1000,00m & -1.732,05m \\ 0,866025 & 0,500000 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{xy} = \begin{bmatrix} 0,00075636 & -0,00092034 \\ -0,00092034 & 0,0018191 \end{bmatrix} m^2$$

$$x_1 = 0 + 2000 \times \sin(60^\circ) = 1.732,05 \text{ m} \quad e \quad \sigma_{x1} = \sqrt{0,00075636}$$

$$y_1 = 0 + 2000 \times \cos(60^\circ) = 1.000,00 \text{ m} \quad e \quad \sigma_{y1} = \sqrt{0,0018191}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

$$x_1 = 1.732,05 \text{ m} \pm 0,0275 \text{ m}$$

$$y_1 = 1.000,00 \text{ m} \pm 0,0426 \text{ m}$$

$$\rho_{x_1 y_2} = \frac{-0,00092034}{0,0275 \times 0,0426} = -0,7846 \text{ ou } -78,5\%$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03