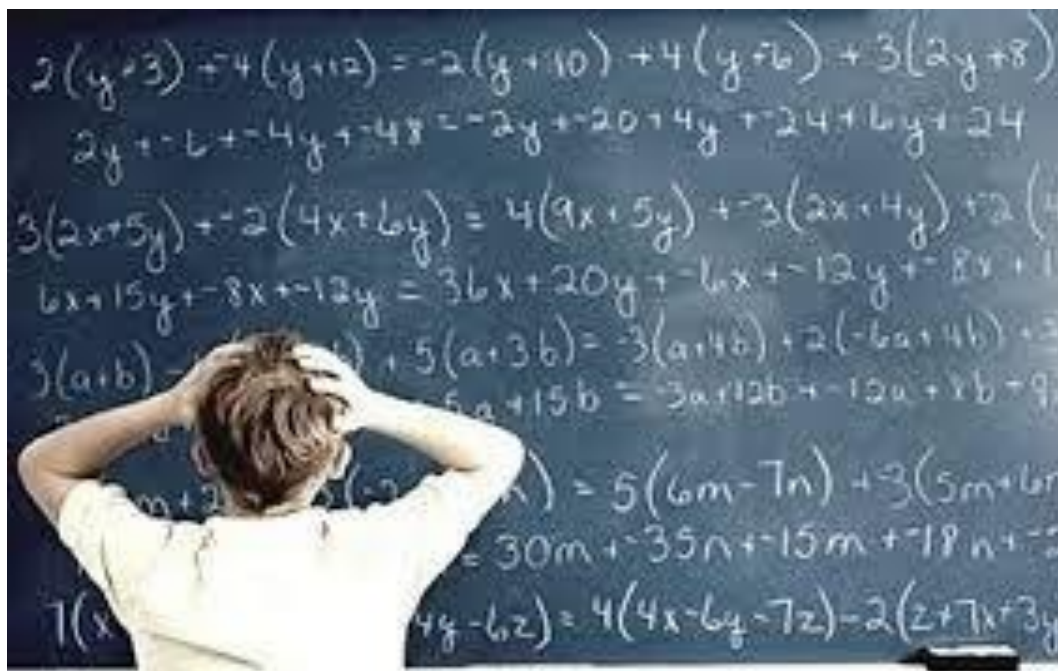


AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Resolva a equação do tipo:

$$a * x = L$$

Onde:

x: é a incógnita;

a: constante qualquer;

L: valor conhecido

Solução:

$$x = L / a$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

No entanto, quando se tem um conjunto de equações formando um sistema, a solução não é tão direta.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = L_1$$

$$a_4x_1 + a_5x_2 + a_6x_3 = L_2$$

$$a_7x_1 + a_8x_2 + a_9x_3 = L_3$$

$${}_nA_u X_1 = {}_nL_1$$

- onde :
- A - matriz formada pelos coeficiente a_i
 - X - vetor formado pelos valores incógnitos x_i
 - L - vetor formado pelos termos conhecidos L_i
 - n - número de linhas (no exemplo é igual a 3)
 - u - número de colunas (no exemplo é igual a 3)



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

No caso de matrizes as operações possíveis são a soma, a subtração e a multiplicação, não existindo a divisão. Deste modo a solução é dada por:

$${}_n X_1 = {}_u A_u^{-1} \times {}_u L_1$$

onde: A^{-1} é a matriz inversa² de A.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS - M.M.Q.

Quando um sistema de equações possui o número de equações igual ao de incógnitas a solução é única. No entanto, quando existem mais equações que as necessárias, deve-se agrupá-las de forma que se tenham vários sistemas formados pelas combinações destas equações. Na teoria, independentemente do conjunto que se escolha, tem-se sempre a mesma solução.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS - M.M.Q.

Entretanto, quando se trabalha com dados reais, pela própria característica estocástica das observações, via de regra, se faz mais medidas que as necessárias. Cada observação (L_b) resulta em uma equação e, como toda medida vem acompanhada de erros aleatórios, o sistema de equações resultante é inconsistente. É necessário então se proceder a uma homogeneização do sistema de modo que independente do conjunto de equações que se escolha tenha-se sempre a mesma solução.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS - M.M.Q.

Esta homogeneização é alcançada adicionando uma correção, também conhecida como resíduo (v_i), a cada observação de modo a tornar o sistema consistente.

$$a_1x_1 + a_2x_2 = Lb_1 + v_1$$

$$a_3x_1 + a_4x_2 = Lb_2 + v_2$$

$$A\hat{X} = Lb + V$$

$$a_5x_1 + a_6x_2 = Lb_3 + v_3$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS - M.M.Q.

Dependendo do critério que se escolha para definir os valores desses resíduos, têm-se soluções diferentes para a incógnita $\hat{X}$, que agora é um valor estimado, por essa razão aparece o sinal circunflexo sobre a v.a. Entretanto, o critério aceito é o do **Método dos Mínimos Quadrados (M.M.Q.)**, proposto por Gauss em 1795 e Legendre em 1805 que estudaram o problema de forma independente, sem que um, conhecesse o estudo do outro.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS - M.M.Q.

No sentido geral o M.M.Q. consiste em estimar variáveis estocásticas X e seus parâmetros de distribuição Σ_X , a partir de amostras L observadas com precisão Σ_L .

DADOS; $(L, \Sigma_L) \rightarrow$ ESTIMAR: (X, Σ_X)

estarão envolvidos nos problemas de ajustamento três espaços:

- (a) espaço das observações medidas R^n ;
- (b) espaço do modelo matemático R^m ;
- (c) espaço dos parâmetros incógnitos R^u ;



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS - M.M.Q.

O M.M.Q. diz que a soma do quadrado dos resíduos tem que ser mínima, e pode ser expresso matematicamente:

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \min \quad V^T V = \min$$

Para o caso de observações com graus diferentes de confiança introduz-se o critério de peso, e as equações passam a ser escritas:

$$\sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = \min \quad \text{ou} \quad V^T P V = \min$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS - M.M.Q.

Isolando o vetor dos resíduos na equação matricial, vem: $V = A\hat{X} - Lb$

Substituindo no critério de M.M.Q. $V^T V = \min$

$$\phi = (A\hat{X} - Lb)^T \cdot (A\hat{X} - Lb) = \min \quad \Leftrightarrow \quad \phi = (\hat{X}^T A^T - Lb^T) \cdot (A\hat{X} - Lb) = \min$$

$$\phi = \hat{X}^T A^T A\hat{X} - X^T A^T Lb - Lb^T A\hat{X} + Lb^T Lb = \min$$

$$X^T A^T Lb \equiv Lb^T A\hat{X}^3, \text{ então}$$

$$\phi = \hat{X}^T A^T A\hat{X} - 2X^T A^T Lb + Lb^T Lb = \min$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS - M.M.Q.

Para se determinar o mínimo da função deriva-se esta em relação às incógnitas e iguala a zero:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}} = 2A^T A \hat{X} - 2A^T Lb = 0 \quad \Rightarrow \quad 2A^T A \hat{X} = 2A^T Lb$$

$$\hat{X} = (A^T A)^{-1} (A^T Lb)$$

Considerando observações com graus diferentes de confiança a matriz dos pesos entra como fator de ponderação e a equação assume o seguinte aspecto:

$$\hat{X} = (A^T P A)^{-1} (A^T P Lb)$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS - M.M.Q.

Um sistema é dito mal condicionado quando, pequenas variações nos valores dos coeficientes ou dos termos independentes significa uma grande variação na solução do problema. Este fato ficará compreendido com o exemplo a seguir:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 - 2x_2 = -5 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{cuja solução é} \quad x_1 = 5 \text{ e } x_2 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,01 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{o resultado passa a ser } x_1 = 5,007 \text{ e } x_2 = 5,003.$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS - M.M.Q.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,001 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10,005 \end{bmatrix} \quad \text{cuja solução é } x_1 = 5 \text{ e } x_2 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,001 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10,1 \end{bmatrix} \quad \text{o resultado passa a ser } x_1 = 100 \text{ e } x_2 = -90.$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS - M.M.Q.

Nota-se agora que uma variação não muito significativa resultou numa solução completamente diferente. Quando isso acontece, diz-se que o sistema é mal condicionado.

Este tipo de problema é importante porque os sistemas de equações utilizados na área da geomática são formados por valores observados e sabe-se que os erros de observação acompanham estes números.

Embora não seja um critério conclusivo, quando o determinante da matriz dos coeficientes resulta em um número pequeno e em contra posição a matriz inversa é composta por elementos grandes, geralmente este é um indicador de mal condicionamento.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

MÉTODOS DE AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

As observações são classificadas em **diretas e indiretas**.
Podem ser condicionadas ou não.

DIRETAS:

utiliza um medidor de mesma natureza que a grandeza procurada. Uso de trena para medir Distância. Uso de teodolito para medir um ângulo;

INDIRETAS:

Grandeza procurada se relaciona com a grandeza observada. Uso da estadimetria para determinar distância ou diferença de nível.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

MÉTODOS DE AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Grandezas condicionadas necessita de uma condição funcional. No caso de observações dos ângulos de um triângulo, a condição de existências dos mesmos é que o somatório tem que ser 180° . No caso de observações de nível, a diferença de nível deve atender a condição de desnível entre os pontos de partida e chegada.

Em qualquer das situações, quando os valores não forem do mesmo grau de confiança, emprega-se o critério de pesos diferentes.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES DIRETAS

- ❖ Estimativa pontual: média
- ❖ Estimativa da precisão: Desvio Padrão.
- ❖ Estimativa por intervalo
 - Intervalo de confiança para a média
 - Intervalo de confiança para a variância e desvio padrão



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES DIRETAS

❖ Estimativa pontual: média

$$\bar{Lb} = \frac{\sum_{i=1}^n Lb_i}{n} \quad \text{ou} \quad \tilde{Lb} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i Lb_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

onde: $\bar{Lb}$ - média aritmética dos valores observados

$\tilde{Lb}$ - média ponderada dos valores observados

Lb_i - valores observados

p_i - pesos das observações

n - número de elementos da amostra

A primeira equação é a da média aritmética e a segunda da ponderada.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES DIRETAS

❖ Estimativa da precisão: Desvio Padrão.

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n}}$$

onde: σ - desvio-padrão

ε_i^2 - quadrado dos erros verdadeiros

n - número de elementos da amostra ou de observações

Entretanto, na grande maioria das vezes não se têm como determinar o erro verdadeiro. Neste caso, se utilizam os erros aparentes que são Calculados através dos resíduos (v_i) em relação à média, ou seja:

$$\hat{\sigma} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{Lb} - Lb_i)^2}{n-1}}$$

a estimativa de precisão

$$\hat{\sigma}_{\bar{Lb}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n(n-1)}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES DIRETAS

- ❖ Estimativa da precisão: Desvio Padrão.

No caso de medidas de desigual confiança as equações ficam assim modificadas:

$$\hat{\sigma} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i (\tilde{L}b - Lb_i)^2}{n-1}} \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{L}b} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i (\tilde{L}b - Lb_i)^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n p_i}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i}}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES DIRETAS

❖ Estimativa por intervalo

A estimativa por intervalo de confiança fornece dois valores entre os quais, deve estar um parâmetro populacional estimado, com certa probabilidade, ou nível de confiança. Escrevendo em linguagem matemática:

$$P(a \leq \varepsilon \leq b) = 1 - \alpha$$

onde: a e b - extremos do intervalo

ε - valor estimado

α - nível de significância

$1 - \alpha$ - grau de confiança



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES DIRETAS

❖ Estimativa por intervalo

O valor do nível de significância normalmente é prefixado. Na área de geomática costuma-se usar 10%, 5% ou 2%. Supondo o valor $\alpha = 5\%$, então:

$$P(a \leq \varepsilon \leq b) = 0,95$$

A expressão acima indica que há 95% de probabilidade ou confiança de que a variável estimada esteja entre os valores a e b .



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES DIRETAS

❖ Intervalo de confiança para a média

O intervalo de confiança pode ser aplicado na média em função do desvio padrão da média amostral. A expressão para o cálculo é a seguinte:

$$P\left(\bar{Lb} - \hat{\sigma}_{\bar{Lb}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}; GL} \leq \mu \leq \bar{Lb} + \hat{\sigma}_{\bar{Lb}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}\right) = 1 - \alpha$$

onde: $\bar{Lb}$ - média amostral

$\hat{\sigma}_{\bar{Lb}}$ - desvio padrão da média aritmética amostral

GL - graus de liberdade⁴

$t_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}$ - valor interpolado da tabela de distribuição de STUDENT com probabilidade de $1-\frac{\alpha}{2}$ e GL .

μ - média populacional



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES DIRETAS

- ❖ Intervalo de confiança para a variância e desvio padrão
Da mesma forma que para a média, pode-se aplicar o intervalo de confiança para a variância. A expressão para este caso é a seguinte:

$$P\left(\frac{\hat{\sigma}^2 \cdot GL}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\hat{\sigma}^2 \cdot GL}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; GL}}\right) = 1 - \alpha$$

onde: $\hat{\sigma}^2$ - variância amostral

GL - graus de liberdade

χ^2 - valor interpolado da tabela de Qui-Quadrado com $GL = n - 1$ e probabilidades de $1 - \frac{\alpha}{2}$ e $\frac{\alpha}{2}$.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES DIRETAS

❖ Intervalo de confiança para a variância e desvio padrão

Na área de geomática substituem-se os valores medidos pelo valor médio e neste caso na fórmula, se substitui a variância amostral pela variância da média.

$$P\left(\frac{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sqrt{n}}GL}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};GL}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sqrt{n}}GL}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};GL}}\right) = 1 - \alpha \quad \text{ou} \quad P\left(\frac{\frac{\hat{\sigma}_{\text{lb}}^2}{\sqrt{n}}GL}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};GL}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\frac{\hat{\sigma}_{\text{lb}}^2}{\sqrt{n}}GL}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};GL}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\sqrt{\frac{\frac{\hat{\sigma}_{\text{lb}}^2}{\sqrt{n}}GL}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};GL}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{\frac{\hat{\sigma}_{\text{lb}}^2}{\sqrt{n}}GL}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};GL}}}\right) = 1 - \alpha$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES INDIRETAS

- As diretas são ajustadas usando-se a média aritmética, ou ponderada, em função dos dados serem de igual ou desigual confiança.
- As indiretas envolvem um modelo matemático que relaciona o que foi medido com o que se quer determinar.
- As diretas condicionadas utilizam uma equação de condição ligando todas as medidas.

A forma de construção do modelo está ligado diretamente à forma de ajustamento dos dados.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES INDIRETAS

MÉTODO	MODELO	CARACTERÍSTICAS
PARAMÉTRICO	$F(X_a) = L_a$	É possível isolar pela igualdade os valores incógnitos (parâmetros) dos valores observados,
COMBINADO	$F(X_a, L_a) = 0$	não é possível isolar os parâmetros dos valores observados,
CORRELATO	$F(L_a) = 0$	observações são do tipo diretas condicionadas



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico

As equações que relacionam os valores medidos com os incógnitos, também denominados parâmetros, são conhecidas como equações de observação. A característica delas é que se pode separar observação de incógnita.

$$F(Xa) = La$$

Onde $F(Xa)$ é uma função que envolve as incógnitas (parâmetros) e La as observações ajustadas, ou seja, essa equação relaciona aquilo que se está procurando com a variável medida.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico

$$F(Xa) = La$$

com $Xa = Xo + X$ e $La = Lb + V$
temos : $F(Xo + X) = Lb + V$

Onde:

- ✓ Xa - parâmetros incógnitos ajustados
- ✓ Xo - parâmetros aproximados
- ✓ X - correções aos parâmetros aproximados
- ✓ La - valores observados ajustados
- ✓ Lb - valores observados
- ✓ V - correções aos valores observados (resíduos)



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico

$$F(X_0 + X) = Lb + V$$

O primeiro termo da igualdade normalmente é uma função do tipo não linear, portanto a sua linearização é feita por Taylor:

$$F(X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{x_a=x_0} \cdot X = Lb + V$$

fazendo $L_0 = F(X_0)$ e $A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{x_a=x_0}$ vem:

$$L_0 + AX = Lb + V \Rightarrow AX + L_0 - Lb = V$$

fazendo $L = L_0 - Lb$

Finalmente $AX + L = V$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico

Aplicando o método dos mínimos quadrados na última equação, temos:

$$\phi = V^T P V = (AX + L)^T P (AX + L) = \min$$

Resulta em: $X = - (A^T P A)^{-1} (A^T P L)$

Fazendo $N = (A^T P A)$ e $U = (A^T P L)$

$$X = - N^{-1} U \quad \Leftrightarrow \quad X_a = X_o + X$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico

A matriz dos pesos das observações P , que é uma matriz quadrada de ordem n , pode considerar as observações independentes ou não. A matriz dos pesos tem a seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \square & \square \\ \square & \ddots & \square \\ \square & \square & p_n \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \times \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & \square & \square \\ \square & \ddots & \square \\ \square & \square & 1/\sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Sendo: p_i o peso da observação i ; σ_0^2 a variância de referência (a priori) e σ_i^2 a variância da observação i



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico

No caso de sistemas não lineares, a solução do sistema se dá por iteração, onde a cada nova etapa, descobre-se uma correção X_c a ser efetuada nos parâmetros iniciais X_0 .

Processo:

1: $L_0 = F(X_0)$

2: $A = F(X_0)$

3: $X_c = N^{-1}U$

4: $X_a = X_0 + X_c$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico - Estimativa das precisões

O M.M.Q. consiste em estimar variáveis estocásticas X e seus parâmetros de distribuição Σ_X , a partir de amostras L observadas com precisão Σ_L .

DADOS; $(L, \Sigma_L) \rightarrow$ ESTIMAR: $(X, \Sigma_X,)$

$$Xa = (A^T P A)^{-1} A^T P L_b$$

$$Xa = [(A^T P A)^{-1} A^T P] L_b$$

Onde: $G = [(A^T P A)^{-1} A^T P]$

$$Xa = G L_b \text{ ou } Y = G * X$$

$${}_m Y_1 = {}_m G_n \times {}_n X_1 + {}_m C_1$$


 a_i


 Coeficientes


 d_i


 Termos Indp.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico - Estimativa das precisões

A Lei de propagação das Covariâncias nos diz que se conhecermos a matriz variância-covariância da v.a. X (Σ_X) e o modelo funcional que a relaciona com a v.a. Y , a matriz variância-covariância dessa matriz (Σ_Y) é calculada por:

$$\Sigma Y = G.\Sigma X.G^T \quad (\text{Linear})$$

$$\Sigma Y = D.\Sigma X.D^T \quad (\text{Não Linear})$$

onde $D = \frac{\partial F}{\partial Lb}$ é a derivada da função em relação aos valores medidos.



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico - Estimativa das precisões

$$\Sigma_X = G \Sigma_{Lb} G^T = [(A^T P A)^{-1} A^T P] \Sigma_{Lb} [(A^T P A)^{-1} A^T P]^T$$

com:

Σ_{Lb} : matriz variância covariância dos dados observados

P: Matriz peso das observações $P = \sigma_0^2 \Sigma_L^{-1} \rightarrow \Sigma_L = P^{-1} \sigma_0^2$

$$\Sigma_X = \sigma_0^2 N^{-1} \quad \Sigma_X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$$

$$\Sigma_{La} = \hat{\sigma}_0^2 A N^{-1} A^T$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u}$$

$$\Sigma_V = \Sigma_{La} - \Sigma_{Lb}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico - Exemplos

Modelo Linear

X	F(x)
-6	0,10
-4	0,97
2	2,06
0	3,11

$$y = a x + b$$

$$0,10 = a x -6 + b$$

$$0,97 = a x -4 + b$$

$$2,06 = a x 2 + b$$

$$3,11 = a x 0 + b$$

$$L = A X$$

$$AX = L + V \rightarrow \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,97 \\ 2,06 \\ 3,11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico - Exemplos

Modelo Linear

$$X = N^{-1} \times U$$

$$N = A^T \times P \times A$$

$$U = A^T \times P \times L_b$$

$$N = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,97 \\ 2,06 \\ 3,11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,60 \\ 6,24 \end{bmatrix}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico - Exemplos

Modelo Linear

$$X = \begin{bmatrix} 56 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -8,60 \\ 6,24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,506 \\ 3,078 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,97 \\ 2,06 \\ 3,11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,506 \\ 3,078 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,058 \\ 0,084 \\ 0,006 \\ -0,032 \end{bmatrix}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico - Exemplos

Modelo Linear

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V \begin{bmatrix} -0,058 \\ 0,084 \\ 0,006 \\ -0,032 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -0,058 \\ 0,084 \\ 0,006 \\ -0,032 \end{bmatrix}}{4 - 2} = 0,00574$$

$$\Sigma_X = 0,00574 \times \begin{bmatrix} 56 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 2,87 & 8,61 \\ 8,61 & 40,18 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{La} = 0,00574 \times \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T =$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

Método Paramétrico - Exemplos

Modelo Linear

$$L_a = \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,97 \\ 2,06 \\ 3,11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,058 \\ 0,084 \\ 0,006 \\ -0,032 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,042 \\ 1,054 \\ 2,066 \\ 3,078 \end{bmatrix}$$



Endereço

Quadra 101 conjunto 02 lote 01
Recanto das Emas - Brasília - DF



(61)3082-0505



www.ineprotec.com.br



@ineprotec



Ineprotec

CNPJ: 08838975/0001-03