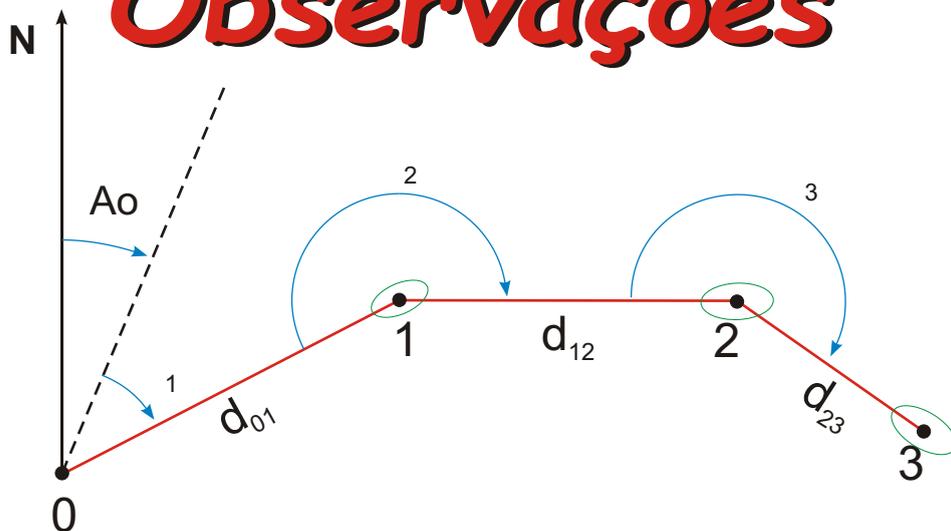


# Introdução ao Ajustamento de Observações



Nilton Ricetti Xavier de Nazareno  
2016

## **SUMÁRIO**

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introdução</b>   | <b>2</b>  |
| 1.1. Definição   | 4         |
| <b>2. Conceito de Observação</b>   | <b>5</b>  |
| 2.1. Modelo Matemático   | 6         |
| 2.2. Propriedade dos Erros de Observação   | 6         |
| 2.3. O conceito de precisão e exatidão   | 9         |
| <b>3. Propagação das Covariâncias</b>  | <b>14</b> |
| 3.1. Variável aleatória.   | 14        |
| 3.2. Matriz variância-covariância (M.V.C.)   | 14        |
| 3.3. Matriz de correlação  | 15        |
| 3.4. Lei de Propagação das Covariâncias  | 17        |
| <b>4. Sistema de Equações Lineares e o Método dos Mínimos Quadrados</b>              | <b>28</b> |
| 4.1. Resolução de Sistema de Equações Lineares                                       | 28        |
| 4.2. O Método dos Mínimos Quadrados  | 29        |
| 4.3. Condicionamento de Sistemas   | 32        |
| <b>5. Métodos de Ajustamento de Observações</b>                                      | <b>34</b> |
| 5.1. Ajustamento de observações diretas  | 35        |
| 5.1.1. Estimativa pontual: média.  | 35        |
| 5.1.2. Estimativa da precisão: Desvio Padrão.  | 35        |
| 5.1.3. Estimativa por intervalo  | 37        |
| 5.1.3.1. Intervalo de confiança para a média   | 38        |
| 5.1.3.2. Intervalo de confiança para a variância e desvio padrão                     | 39        |
| 5.2. Ajustamento de observações indiretas  | 48        |
| 5.2.1. Método Paramétrico  | 49        |
| 5.2.1.1. Qualidade do ajustamento.   | 50        |
| 5.2.1.2. Matriz variância covariância dos parâmetros, das observações e dos resíduos | 53        |
| 5.2.1.3. Sequência prática de cálculo  | 54        |
| 5.3. Ajustamento de observações diretas condicionadas                                | 62        |
| 5.3.1. Método dos Correlatos   | 62        |
| 5.3.1.1. Sequência prática de cálculo  | 64        |
| 5.3.2. Método dos Correlatos com Iterações.  | 65        |
| 5.4. Método Combinado  | 71        |
| 5.4.1. Sequência prática de cálculo  | 73        |
| 5.4.2. Método dos Combinado com Iterações.   | 75        |
| <b>Referências Bibliográficas</b>  | <b>84</b> |
| <b>Apêndice A</b>  | <b>85</b> |

## **ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES**

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 – Coordenadas de um ponto definidas a partir de uma estação, de um azimute e de uma distância.        | 2  |
| Figura 2 – Coordenadas de um ponto definidas a partir de duas estações, de dois azimutes e de duas distâncias. | 3  |
| Figura 3 – Rede de nivelamento.  | 4  |
| Figura 4 – Histograma e polígono de frequência da experiência de Bradley .                                     | 9  |
| Figura 5 – Tiros de dois atiradores em um alvo.  | 11 |
| Figura 6 – Histogramas sobre precisão e acurácia.  | 11 |
| Figura 7 – Esquema de leituras de ângulos.   | 18 |
| Figura 8 – Coordenadas de um ponto definidas a partir de uma estação, de um azimute e de uma distância.        | 20 |
| Figura 9 – Croqui da poligonal eletrônica aberta medida.   | 23 |
| Figura 10 – Determinação dos azimutes a partir do azimute inicial e dos ângulos horizontais.                   | 24 |
| Figura 11 – Teste de hipótese com a distribuição $\chi^2$ . Caso bicaudal e unicaldal.                         | 52 |
| Figura 12 – Croqui ilustrativo do problema.  | 55 |
| Figura 13 – Croqui ilustrativo do problema.  | 67 |

## 1. INTRODUÇÃO

Ao serem feitas medidas, pela própria condição da imperfeição dos homens e dos instrumentos, estas estão impregnadas dos erros de observação. Por essa razão normalmente se procedem a mais de uma medida para se ter garantias sobre o valor encontrado. Se as medidas forem de uma única grandeza como, por exemplo, distâncias ou ângulos, a média é uma boa solução. Contudo, quando estão envolvidas ao mesmo tempo grandezas de naturezas diferentes e que se relacionam através de uma função matemática, a solução não é tão imediata. Outro fato importante reside na premissa de que somente o valor da grandeza não é suficiente, do ponto de vista técnico-científico. É preciso saber qual o grau de confiança no valor obtido. Isto é proporcionado pela estimativa de precisão da medida que é numericamente igual ao desvio-padrão.

Como exemplo, imagine que se pretenda determinar as coordenadas de um ponto P a partir de uma estação E (com coordenadas conhecidas), da distância entre a estação e o ponto, e do azimute da direção estação-ponto (figura 1). Este é um problema clássico da topografia cuja solução é a seguinte:

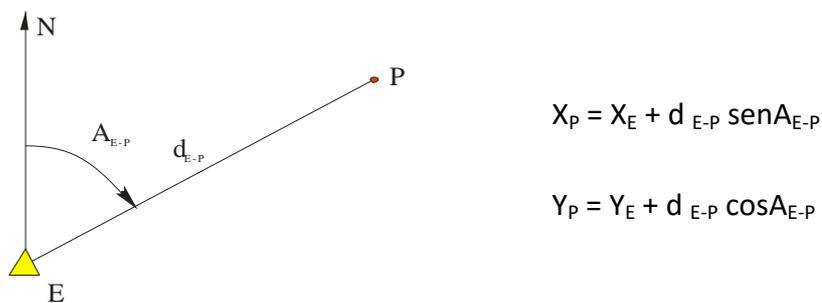
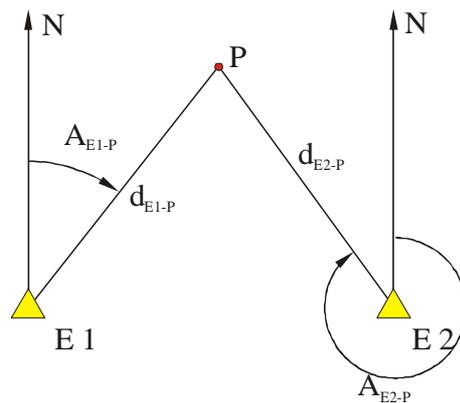


Figura 1 – Coordenadas de um ponto definidas a partir de uma estação, de um azimute e de uma distância.

- onde :
- $(X_P, Y_P)$  - coordenadas do ponto (incógnitas);
  - $(X_E, Y_E)$  - coordenadas da estação;
  - $d_{E-P}$  - distância entre a estação e o ponto;
  - $A_{E-P}$  - azimute da direção estação – ponto.

Observa-se que para resolver o sistema são necessárias duas observações: a distância e o Azimute. No caso, a solução é única.

Agora imagine o mesmo problema só que introduzindo mais uma estação **E2** (figura 2). Este também é um problema clássico. A solução é dada por:



$$X_P = X_{E1} + d_{E1-P} \text{sen}A_{E1-P}$$

$$Y_P = Y_{E1} + d_{E1-P} \text{cos}A_{E1-P}$$

$$X_P = X_{E2} + d_{E2-P} \text{sen}A_{E2-P}$$

$$Y_P = Y_{E2} + d_{E2-P} \text{cos}A_{E2-P}$$

Figura 2 - Coordenadas de um ponto definidas a partir de duas estações, de dois azimutes e de duas distâncias.

- onde :
- $(X_P, Y_P)$  - coordenadas do ponto (incógnitas);
  - $(X_{E1}, Y_{E1})$  - coordenadas da estação 1;
  - $d_{E1-P}$  - distância entre a estação 1 e o ponto;
  - $A_{E1-P}$  - azimute da direção estação 1 – ponto.
  - $(X_{E2}, Y_{E2})$  - coordenadas da estação 2;
  - $d_{E2-P}$  - distância entre a estação 2 e o ponto;
  - $A_{E2-P}$  - azimute da direção estação 2 – ponto.

Observa-se agora que existem duas maneiras de se obter as coordenadas do ponto P. Uma através da estação 1 e outra da estação 2. Se as medidas fossem isentas de erros, qualquer uma das soluções levaria ao mesmo resultado, contudo isso não ocorre e a solução que parece óbvia é adotar a média como resposta ao problema, no entanto, não é essa a resposta, uma vez que além de achar as coordenadas é preciso “corrigir” as distâncias e os azimutes.

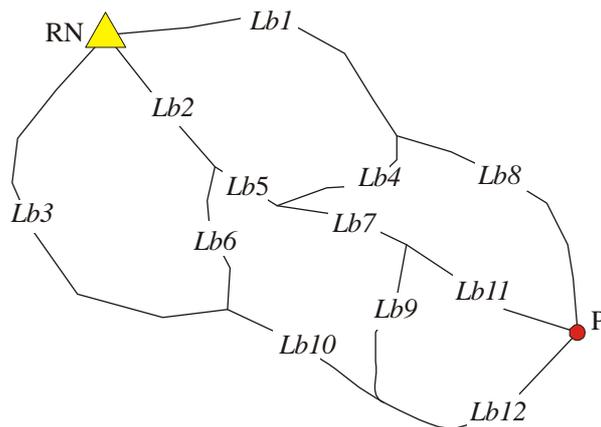
Suponha ainda que de cada uma das estações mediu-se com equipamentos com precisões diferentes e com operadores diferentes. Qual das soluções é a mais correta? É neste tipo de problema que as técnicas de ajustamentos são importantes porque permitem que se equacionem todas as nuances do problema.

### 1.1. Definição

“O ajustamento é o ramo da matemática aplicada que tem por objetivo a solução única para problemas onde o número de observações (ou medidas) é redundante e o sistema de equações inconsistente, bem como a precisão da solução adotada” Camargo (2000).

A redundância é representada pelo número de medidas a mais do que as necessárias para se obter a solução e, a inconsistência, pelas diferentes soluções que se obtêm quando o número de observações excede o de incógnitas.

A figura 3 mostra um problema passível de ajustamento. Trata-se de uma rede de nivelamento onde  $Lb1, Lb2 \dots Lb12$  são os desníveis medidos nas linhas de nivelamento independentes. Para se determinar o desnível entre o ponto P e a RN existem várias possibilidades, como por exemplo:



$$\begin{aligned} \Delta h_{RNP} &= Lb1 + Lb8 \\ \Delta h_{RNP} &= Lb2 + Lb5 + Lb7 + Lb11 \\ \Delta h_{RNP} &= Lb3 + Lb10 + Lb12 \\ \Delta h_{RNP} &= Lb1 + Lb4 + Lb7 + Lb11 \\ \Delta h_{RNP} &= Lb3 + Lb6 + Lb5 + Lb7 + Lb11 \\ \Delta h_{RNP} &= Lb3 + Lb10 + Lb9 + Lb11 \\ &\dots \end{aligned}$$

Figura 3 – Rede de nivelamento.

Estas são algumas das possibilidades de solução. Todavia a probabilidade de cada uma delas gerar uma resposta diferente é muito grande.

Após o processo de ajustamento independentemente da solução adotada a resposta será única.

É possível ainda, com base nas técnicas do ajustamento, detectar a presença de erros grosseiros em um conjunto de observações, efetuar o planejamento da coleta de dados e saber, a priori, se atenderão as prescrições estabelecidas.

## **2. CONCEITO DE OBSERVAÇÃO**

Segundo Camargo (2000) o termo observação ou medida é frequentemente usado na prática para referir-se à operação, bem como para o resultado da operação. O valor numérico da observação é de fundamental importância para a ciência e engenharia, pois submete o instrumento à análise e manipulação.

Ainda em Camargo (2000), são listadas as propriedades fundamentais da medida:

- ✓ Medir significa realizar uma operação física, e o processo de medida consiste de várias operações elementares; tais como: preparação, calibração, pontaria, leitura e etc.;
- ✓ O resultado do processo representa a medida;
- ✓ A não ser na contagem de certos eventos, a medida é sempre realizada com auxílio de instrumentos;
- ✓ As medidas estão referenciadas a um padrão, os quais são estabelecidos por convenção. Medir é comparar uma grandeza a um padrão, tendo dimensão e unidade;
- ✓ A medida é um conceito teórico, tal como uma abstração geométrica usada para distância e ângulo, os quais não têm equivalente direto na natureza física. No entanto, tais conceitos permitem descrever certos elementos da natureza, como localização, área e etc.

Para descrever certos elementos da natureza é necessário utilizar modelos, como é o caso da forma da Terra, onde se utiliza a esfera ou o elipsóide de revolução. No caso do ajustamento, o modelo que interessa é o matemático que relaciona as medidas

efetuadas com as grandezas procuradas. Este é o caso das equações que unem a distância e o azimute com as coordenadas do ponto.

## **2.1. Modelo Matemático**

Define-se modelo matemático ao sistema teórico ou abstrato que descreve uma situação física ou uma série de eventos. Tal descrição não necessita explicar totalmente a situação física, mas relacionar somente os aspectos, ou propriedades de interesse. Tendo em vista que o modelo tem o propósito de atender um interesse particular, dependendo do propósito, ele pode assumir formas diferentes.

Costuma-se dividir o modelo matemático em funcional e estocástico. O modelo funcional constitui a parte determinística da realidade física e o estocástico descreve as propriedades estatísticas das observações.

Um exemplo de modelo funcional, já explorado no início desta apostila, é o da determinação das coordenadas de um ponto a partir da distância e do azimute da direção entre esse ponto e outro de coordenadas conhecidas. Esse modelo funcional é do tipo geométrico, como a maioria dos modelos adotados na área de geomática.

O modelo estocástico aborda a variabilidade dos resultados oriundos de influências físicas que não podem ser controladas, da falibilidade humana e das imperfeições dos instrumentos de medida. De qualquer modo, ambos os modelos devem ser tratados no ajustamento de forma conjunta.

## **2.2. Propriedade dos Erros de Observação**

As observações são representações numéricas de quantidades físicas como comprimento, ângulo, peso, entre outras. Estas observações são obtidas através de medidas e, portanto possuem o que classicamente se chamava de erros de observação. Embora este conceito esteja sendo gradualmente substituído por propriedades estatísticas das observações, ainda é comum o uso convencional do conceito de erro.

Sabe-se que, mesmo se cercando de precauções e cuidados especiais no momento da obtenção de uma medida, estas estão acompanhadas dos inevitáveis erros de observação. Este fato está relacionado à falibilidade humana, à imperfeição dos equipamentos e as condições ambientais nas quais se processa a mensuração.

Estes erros são classificados em:

- a) erros grosseiros – quando o valor medido extrapola a 3 vezes o valor do desvio padrão da medida. Esse erro é normalmente de fácil detecção e está associado à desatenção do operador ou mesmo do anotador;
- b) erros sistemáticos – quando o valor medido é acrescido ou diminuído de uma quantidade constante. Estes erros são de causas conhecidas e podem ser evitados ou minimizados por técnicas de observação ou por formulações matemáticas. É o caso do erro causado pela catenária de uma trena que pode ser posteriormente eliminado;
- c) erros aleatório – quando existe uma flutuação do valor medido ao redor de um valor dito médio. Este erro também conhecido como acidentais, estocástico ou randômico não tem causa conhecida e está intimamente ligado as propriedades estatísticas das observações.

Para se proceder ao ajustamento é necessário que não existam os erros grosseiros e os sistemáticos nas observações. No entanto, os aleatórios são modelados pelo processo de ajustamento e distribuídos pelo critério desenvolvido separadamente por Gauss em 1795 e Legendre em 1805, denominado método dos mínimos quadrados (M.M.Q.).

Nesta publicação o conjunto de medidas será designado pelo vetor  $L_b$  (valores observados) quando forem oriundos das próprias observações e estiverem contaminados pelos erros de observação, e de  $L_a$  (valores observados ajustados) quando já sofreram o processo de ajustamento.

Segundo Gemael (1994), a experiência tem demonstrado que ao aumentar o número de observações de uma mesma grandeza, os erros aleatórios tendem a ter um comportamento regular, de modo que a distribuição de frequência dos erros se aproxima muito da distribuição normal (curva de Gauss). Este fato foi notado por Bradley no início do século XVII, quando visando obter a posição do ponto vernal através de 462 determinações

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

*AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO*

da ascensão reta do Sol, verificou que ao retirar as influências sistemáticas conhecidas na época e calcular os desvios em relação à média aritmética existia uma grande simetria e o predomínio de valores ao redor da média.

**TABELA 1 - EXPERIÊNCIA DE BRADLEY**

| INTERVALOS |      | Frequência (fi) | fi <sup>2</sup> | fi·vi  | fi·vi <sup>2</sup> | Fi   |
|------------|------|-----------------|-----------------|--------|--------------------|------|
| 0,9"       | 1,0" | 3               | 9               | 2,85   | 2,7075             | 2,3  |
| 0,8        | 0,9  | 5               | 25              | 4,25   | 3,6125             | 4,1  |
| 0,7        | 0,8  | 7               | 49              | 5,25   | 3,9375             | 7,1  |
| 0,6        | 0,7  | 13              | 169             | 8,45   | 5,4925             | 11,4 |
| 0,5        | 0,6  | 18              | 324             | 9,9    | 5,4450             | 17,0 |
| 0,4        | 0,5  | 25              | 625             | 11,25  | 5,0625             | 24,9 |
| 0,3        | 0,4  | 29              | 841             | 10,15  | 3,5525             | 31,7 |
| 0,2        | 0,3  | 39              | 1521            | 9,75   | 2,4375             | 38,7 |
| 0,1        | 0,2  | 44              | 1936            | 6,60   | 0,9900             | 44,3 |
| 0,0        | 0,1  | 47              | 2209            | 2,35   | 0,1175             | 47,4 |
| 0,0        | -0,1 | 47              | 2209            | -2,35  | 0,1175             | 47,4 |
| -0,1       | -0,2 | 44              | 1936            | -6,60  | 0,9900             | 44,3 |
| -0,2       | -0,3 | 39              | 1521            | -9,75  | 2,4375             | 38,7 |
| -0,3       | -0,4 | 29              | 841             | -10,15 | 3,5525             | 31,7 |
| -0,4       | -0,5 | 26              | 676             | -11,70 | 5,2650             | 24,9 |
| -0,5       | -0,6 | 18              | 324             | -9,90  | 5,4450             | 17,0 |
| -0,6       | -0,7 | 13              | 169             | -8,45  | 5,4925             | 11,4 |
| -0,7       | -0,8 | 7               | 49              | -5,25  | 3,9375             | 7,1  |
| -0,8       | -0,9 | 5               | 25              | -4,25  | 3,6125             | 4,1  |
| -0,9       | -1,0 | 4               | 16              | -3,80  | 3,6100             | 2,3  |
| <b>Σ</b>   |      | 462             | 15474           | -1,40  | 67,8150            |      |

Onde: **fi** frequência real;  
**Fi** frequência teórica;  
**vi** ponto médio de cada intervalo.

Média dos desvios

$$\bar{v} = \frac{\sum f_i v_i}{n} = \frac{-1,40''}{462} = -0,003'' \cong 0$$

Erro médio quadrático dos desvios

$$m^2 = \frac{\sum f_i v_i^2}{n - 1} = \frac{67,8150}{462 - 1} = 0,1471''^2 \Rightarrow m = \pm 0,3835''$$

Ao se observar a Tabela 1, que reproduz os dados de Bradley, nota-se a partir da coluna das frequências que existem 230 desvios positivos e 232 desvios negativos. Esses desvios foram determinados pela diferença entre o valor medido e a média aritmética desses valores. A simetria e o predomínio de valores ao redor da média dos desvios (zero)

sugerem claramente a distribuição normal, visualizada no histograma e no polígono de frequência na figura 4. Ao se comparar a frequência real com a teórica ( $F_i$ ) verifica-se uma impressionante concordância de valores.

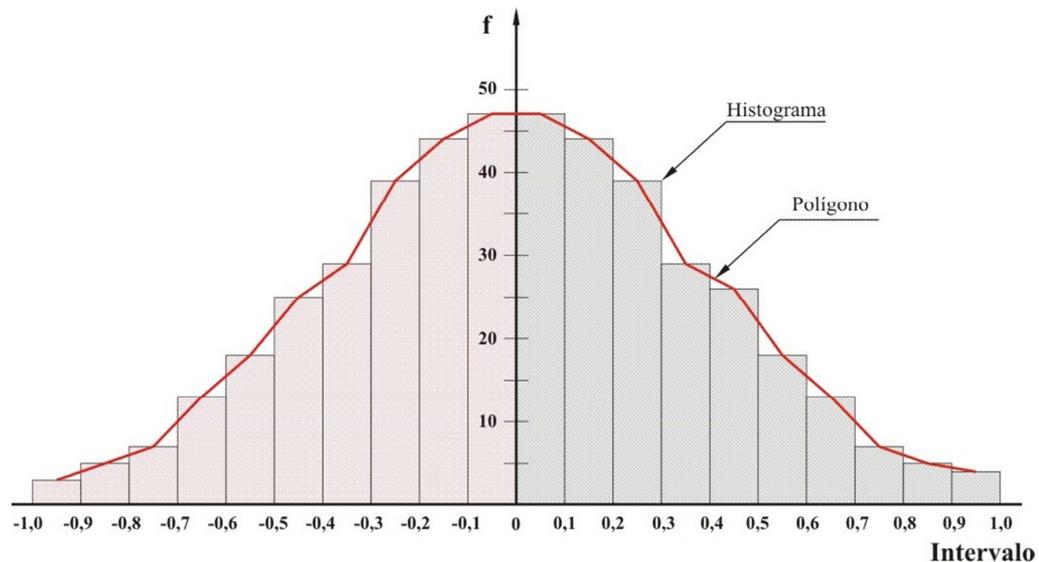


Figura 4 – Histograma e polígono de frequência da experiência de Bradley.

Existem outros exemplos práticos que demonstram esta tendência. A partir desta constatação pode-se afirmar que quando o número de observações cresce:

- ✓ Os resíduos de mesmo módulo e sinais opostos são equiprováveis;
- ✓ Os resíduos menores ocorrem com menor frequência;
- ✓ A média dos resíduos é praticamente nula.

O predomínio de resíduos com um sinal deve servir de alerta para a existência de algum erro sistemático.

### **2.3. O conceito de precisão e exatidão**

O termo acurácia é utilizado na área de geomática para indicar a qualidade de uma grandeza observada ou de um parâmetro estimado. No entanto, o termo precisão também é usado com o mesmo emprego. Isto demonstra haver uma confusão quanto ao significado destes dois vocábulos. Inicialmente é preciso esclarecer que essas palavras têm origem na língua inglesa, *accuracy* e *precision*, que foram traduzidas respectivamente por

acuracidade (exatidão) e precisão. A relação desses dois conceitos está intimamente ligada aos erros sistemáticos e aos aleatórios. Em Monico (2009), onde se discute essa temática, é citada a seguinte definição proposta por Mikhail e Ackermann (1976, p. 64):

Acurácia é o grau de proximidade de uma estimativa com seu parâmetro (ou valor verdadeiro), enquanto precisão expressa o grau de consistência da grandeza medida com sua média. A acurácia reflete a proximidade de uma grandeza estatística ao valor do parâmetro para o qual ela foi estimada e que precisão está diretamente ligada com a dispersão da distribuição das observações.

Analisando essa definição percebe-se que a precisão está ligada apenas aos efeitos aleatórios da medida (erro aleatório) enquanto que acurácia envolve erros sistemáticos (tendência) associados aos erros aleatórios.

Os mesmos autores citados por Monico (2009) apresentam uma medida de acurácia proposta por Gauss denominada Erro Médio Quadrático (EMQ) ou em inglês “mean square error” (MSE) dada por:

$$MSE = m^2 = E\{(\hat{p} - E\{\hat{p}\})^2\} = \sigma_p^2 + (b)^2 \cong \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^2}{n}$$

onde:  $E\{\hat{p}\}$  Esperança matemática ou valor esperado para a variável  $p$  <sup>1</sup>

$\sigma_p^2$  representa a dispersão das medidas (variância ou incerteza)

$b$  representa a tendência ou vício do estimador

$\varepsilon_i^2$  quadrado dos erros verdadeiros

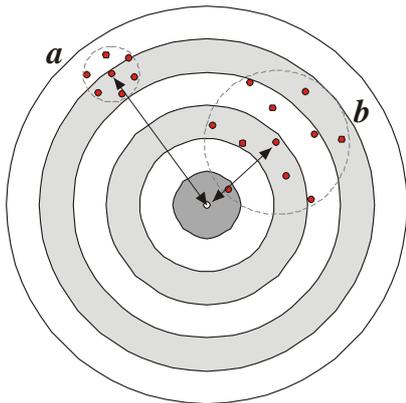
$n$  número de elementos da amostra ou de observações

Essa expressão, para amostras grandes, é praticamente igual à média quadrática dos erros verdadeiros ( $\varepsilon$ ). Por definição o erro verdadeiro  $\varepsilon$  é a diferença entre um valor observado (ou medido) e o tomado como referência (conhecido).

---

<sup>1</sup> Esperança matemática  $E\{ \}$  ou valor esperado é a média ponderada dos valores que a variável aleatória ou função assume, usando-se, como pesos para ponderação, as probabilidades correspondentes a cada valor.

Para se entender a idéia imagine dois atiradores **a** e **b** e um alvo onde os dois atiraram (figura 5). Observa-se que o atirador **a** tem os tiros mais concentrados enquanto o atirador **b** tem os tiros mais dispersos. No entanto o centro da concentração dos tiros de **b** está mais próximo do centro do alvo do que a do atirador **a**. Pode-se então afirmar que:



- ✓ o atirador **a** tem uma precisão maior que o **b**.
- ✓ existe um erro sistemático maior conduzindo os tiros mais precisos de **a**.
- ✓ a **acurácia** ou **exatidão** dependerá da dispersão (precisão) e do erro sistemático.

Figura 5 - Tiros de dois atiradores em um alvo.

Mikhail e Ackermann (1976) *apud* Monico (2009) fazem a análise do problema através dos histogramas que representam três conjuntos de medidas ( $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ ) de uma mesma grandeza (figura 6).

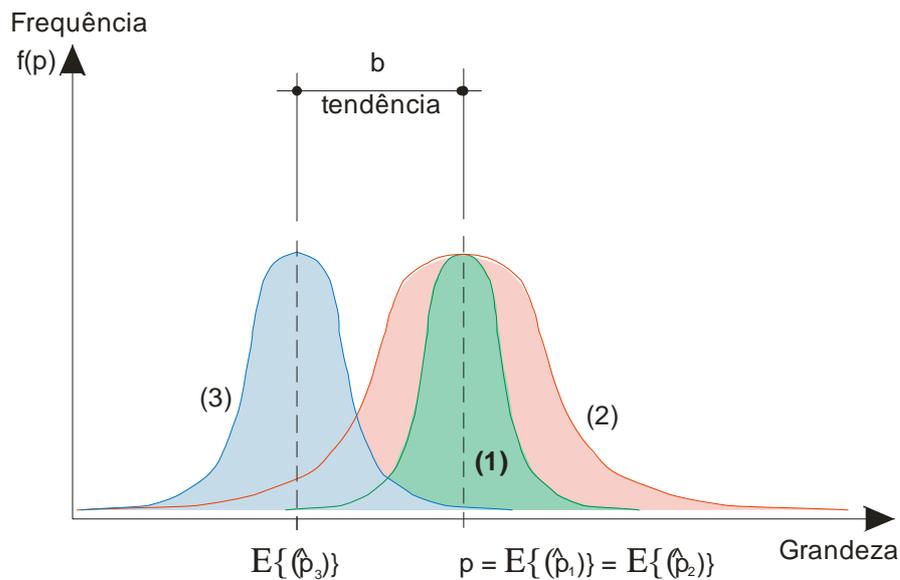


Figura 6 – Histogramas sobre precisão e acurácia.

Observando os histogramas percebe-se que as esperanças  $E\{\{\hat{p}_1\}\}$  e  $E\{\{\hat{p}_2\}\}$  coincidem com o valor de referência  $p$  (“correto”). A diferença reside na dispersão que é maior em  $p_2$ . Assim pode-se afirmar que  $p_1$  e  $p_2$ , embora não apresentem erro sistemático (tendência), não são igualmente acurados uma vez que possuem precisões distintas, ou seja,  $p_1$  é mais acurado que  $p_2$ . Por outro lado, a esperança  $E\{\{\hat{p}_3\}\}$  apresenta um erro sistemático ou tendência, representado pelo valor “**b**”, o que implica em se afirmar que  $p_3$  não possui acurácia.

Analisando só o aspecto da precisão, deixando de lado as questões de tendência, pode-se afirmar pela ordem que  $p_1$  é a mais precisa que  $p_3$  que por sua vez é mais precisa que  $p_2$ .

Para a área das mensurações, como dito anteriormente, a acurácia representa a qualidade da observação ou, a confiança que se tem no resultado obtido a partir de um número de medidas. Se o valor de referência da medida for conhecido, é possível se estimar a tendência e eliminar os possíveis efeitos sistemáticos nas medidas. Porém, quando isso não acontece, utiliza-se a própria precisão como um indicador da acurácia. A adoção da precisão como acurácia não implica em dizer que a tendência não exista, mas que apenas não se conhece o seu valor. Esse é o caso da maioria dos processos de medida e assim, para evitar a presença dos erros sistemáticos, é necessário que se utilizem equipamentos aferidos e métodos consagrados de observação. Este procedimento não garante a total ausência de tendência, mas, com certeza, é um método seguro de evitá-la.

Finalmente podem-se extrair as seguintes afirmações de Monico (2009):

- ✓ Dois valores médios iguais podem ter precisões diferentes;
- ✓ Não faz sentido dizer que um valor acurado é preciso ou não, pois a precisão faz parte da própria definição de acurácia;
- ✓ Dada a precisão de uma grandeza, o valor de sua acurácia é no mínimo igual a ela;
- ✓ Conhecido o valor da tendência, a acurácia é, no mínimo, igual a ela.

## IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

Exemplo 1 - Suponha que você quer testar a capacidade profissional de três topógrafos. Para tanto você mediu uma distância com uma estação total que será, para efeito de cálculo, considerada “correta”. Os três topógrafos fizeram a mesma medida com trena. Baseado nos valores obtidos por eles, qual é o mais acurado?

| Topógrafo | Distância | Precisão |
|-----------|-----------|----------|
| 1         | 99,90 m   | ± 2 cm   |
| 2         | 100,01 m  | ± 3 cm   |
| 3         | 100,00 m  | ± 5 cm   |

Distância com estação = 100 m => valor de referência

Partindo-se da equação proposta por Gauss =>  $EMQ = m^2 = \sigma_p^2 + (b)^2$  e considerando que 100 m é o valor de referência, podem-se obter os erros sistemáticos para as três medidas, ou seja:

$$b_1 = 99,90m - 100m = -0,10m; \quad b_2 = 100,01m - 100m = 0,01m; \quad b_3 = 100m - 100m = 0m.$$

Aplicando a equação para os três casos:

$$m_1^2 = (0,02 \text{ m})^2 + (-0,10 \text{ m})^2 = 0,0104 \text{ m}^2$$

$$m_2^2 = (0,03 \text{ m})^2 + (0,01 \text{ m})^2 = 0,0010 \text{ m}^2$$

$$m_3^2 = (0,05 \text{ m})^2 + (0,0 \text{ m})^2 = 0,0025 \text{ m}^2$$

Extraindo-se a raiz quadrada dos três valores obtidos, tem-se a acurácia de cada topógrafo.

$$m_1 = 0,102 \text{ m};$$

$$m_2 = 0,032 \text{ m};$$

$$m_3 = 0,050 \text{ m};$$

Observa-se que se não fosse conhecido o valor de referência, o topógrafo 1 seria considerado o mais confiável, pois o desvio padrão de suas medidas é o menor. No entanto, nota-se que o topógrafo 2 apresenta a maior acurácia e, na sequência, o topógrafo 3, que é o de pior precisão. Como na maioria das vezes não se tem conhecimento de valores de referência, reforça-se assim a afirmativa de que se devem utilizar equipamentos aferidos e seguir as normas de levantamento indicadas.

### 3. PROPAGAÇÃO DAS COVARIÂNCIAS

#### 3.1. Variável aleatória.

Variável aleatória (*v.a.*) é uma função que associa a cada elemento de um espaço amostral um número real, ou aquela, cujo valor é o resultado numérico de um experimento aleatório. Considerando que cada medida resulta em um único valor, o conjunto destas medidas constitui uma *v.a.*

Dependendo dos valores numéricos, a variável aleatória poderá ser discreta ou contínua. Ela é dita:

**discreta** quando assume valores em pontos isolados ao longo de uma escala (número finito ou infinito enumerável de valores). Exemplo: os valores possíveis de se obter quando se joga um dado ou uma moeda.

**contínua** quando assume qualquer valor ao longo de um intervalo (número infinito não enumerável de valores). Exemplo: conjunto de medidas de um mesmo ângulo dentro de uma série.

Se o conjunto que constitui a *v.a.* é de mesma natureza, diz-se que ele é uma variável aleatória unidimensional. Entretanto, quando no conjunto têm-se grandezas de natureza diversa, diz-se que é uma *v.a.* multidimensional. Por exemplo, o conjunto constituído por uma série de medidas angulares é uma *v.a.* unidimensional, e o conjunto constituído por azimute e distância, é multidimensional.

#### 3.2. Matriz variância-covariância (M.V.C.)

A estimativa de precisão de uma *v.a.* é fornecida pelo desvio padrão dessa variável ( $\sigma_i$ ). Quando se tem uma *v.a.* multidimensional, a precisão é representada pela matriz variância covariância ( $\Sigma$ ) que é formada pelas variâncias ( $\sigma_i^2$ ) dos *i* indivíduos ou elementos que compõe a *v.a.*, e pelas covariâncias ( $\sigma_{ij}$ ) desses mesmos elementos. A raiz quadrada das variâncias fornece a precisão e a covariância indica o grau de dependência ou relação entre dois elementos dessa *v.a.*



Exemplo 2 – Dada a matriz variância-covariância da v.a. A, calcule a matriz de correlação associada.

$$\Sigma A = \begin{bmatrix} 36 & 18 & 12 \\ 18 & 9 & 0 \\ 12 & 0 & 16 \end{bmatrix} m^2$$

Extraindo-se a raiz quadrada dos elementos da diagonal principal têm-se as precisões dessas variáveis.

$$\sigma_{a_1} = \sqrt{36} = 6 \text{ m}; \sigma_{a_2} = \sqrt{9} = 3 \text{ m}; \sigma_{a_3} = \sqrt{16} = 4 \text{ m}.$$

Aplicando-se a equação da correlação:

$$\rho_{a_1 a_2} = \frac{\sigma_{a_1 a_2}}{\sigma_{a_1} \times \sigma_{a_2}} = \frac{18}{6 \times 3} = 1 = 100\%$$

$$\rho_{a_1 a_3} = \frac{\sigma_{a_1 a_3}}{\sigma_{a_1} \times \sigma_{a_3}} = \frac{12}{6 \times 4} = 0,5 = 50\%$$

$$\rho A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{a_2 a_3} = \frac{\sigma_{a_2 a_3}}{\sigma_{a_2} \times \sigma_{a_3}} = \frac{0}{3 \times 4} = 0 = 0\%$$

A matriz de correlação mostra que o grau de dependência entre as v.a.  $a_1$  e  $a_2$  é de 100%, ou seja, existe 100% de probabilidade de que um erro cometido na medida ou cálculo de  $a_1$  interfira no cálculo de  $a_2$ .

No caso de  $a_1$  com  $a_3$  essa dependência é de 50% e entre  $a_2$  e  $a_3$  é de 0% o que mostra a total independência entre essas duas últimas variáveis.

### **3.4. Lei de Propagação das Covariâncias**

Consideremos duas *v.a.* multidimensionais  $Y$  e  $X$ , ligadas por um modelo funcional linear:

$${}_m Y_1 = {}_m G_n \times_n X_1 + {}_m C_1$$

onde :  $G$  – matriz dos coeficientes;

$C$  – matriz dos termos independentes.

A Lei de propagação das Covariâncias nos diz que se conhecermos a matriz variância-covariância da *v.a.*  $X$  ( $\Sigma_X$ ) e o modelo funcional que a relaciona com a *v.a.*  $Y$ , a matriz variância-covariância dessa matriz ( $\Sigma_Y$ ) é calculada por:

$$\Sigma_Y = G \cdot \Sigma_X \cdot G^T$$

ou seja, é obtida pela simples multiplicação de matrizes.

Quando o modelo funcional não é linear, a Lei de Propagação toma a seguinte forma:

$$\Sigma_Y = D \cdot \Sigma_X \cdot D^T$$

onde  $D = \frac{\partial F}{\partial Lb}$  é a derivada da função em relação aos valores medidos.

Este conceito é muito importante porque através dele é possível se determinar qual a precisão das coordenadas de um ponto obtidas com um equipamento de onde se conhece a sua precisão.

Exemplo 3 - Foram realizadas as medidas de 5 direções ( $d_1, d_2, d_3, d_4$  e  $d_5$ ) com um equipamento cuja precisão angular é de  $5''$ . Pretende-se calcular os ângulos  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  entre essas direções conforme a figura 7. Ao se determinar o ângulo entre duas direções, qual será a precisão do resultado obtido?

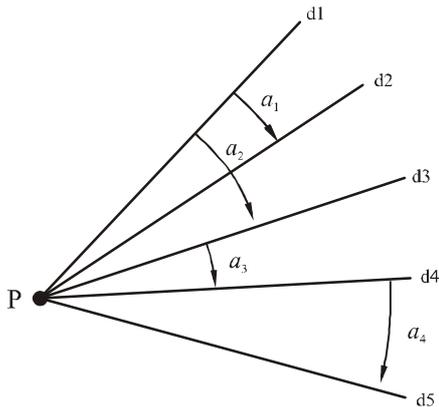


Figura 7 – Esquema de leituras de ângulos.

A priori alguém poderia imaginar que a precisão seria os mesmos  $5''$ . Outro acharia que seria o dobro. A propagação das covariâncias resolve o problema.

O primeiro passo é determinar o modelo funcional, ou seja, aquele que mostra a relação entre as direções e os ângulos:

$$\begin{aligned} a_1 &= d_2 - d_1 & a_1 &= -1 d_1 + 1 d_2 + 0 d_3 + 0 d_4 + 0 d_5 \\ a_2 &= d_3 - d_2 & a_2 &= -1 d_1 + 0 d_2 + 1 d_3 + 0 d_4 + 0 d_5 \\ a_3 &= d_4 - d_3 & a_3 &= 0 d_1 + 0 d_2 - 1 d_3 + 1 d_4 + 0 d_5 \\ a_4 &= d_5 - d_4 & a_4 &= 0 d_1 + 0 d_2 + 0 d_3 - 1 d_4 + 1 d_5 \end{aligned} \quad \text{ou}$$

Este modelo pode ser escrito na forma matricial e assume o seguinte formato:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A = G.D + C$$

O segundo passo reside em se determinar a matriz variância-covariância das direções ( $\Sigma_d$ ). Sabendo-se que a determinação das direções é independente, pois o erro cometido em uma não afeta a outra, conclui-se que a matriz em questão possui elementos apenas na diagonal principal e iguais a variância ( $\sigma_i^2 = 25''^2$ ), ou seja :

$$\Sigma_d = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} (")^2$$

Finalmente no terceiro passo procede-se à multiplicação.

$$\Sigma A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma A = \begin{bmatrix} 50 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & 50 & -25 & 0 \\ 0 & -25 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & -25 & 50 \end{bmatrix} (")^2$$

A partir desta matriz variância-covariância podem-se fazer algumas considerações:

- ✓ a precisão dos ângulos  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  são iguais a  $\sigma_{ai} = 7,07''$  ( $\sigma_{ai} = \sqrt{50}$ );
- ✓ existe covariância entre as variáveis  $a_1$  com  $a_2$ ,  $a_2$  com  $a_3$  e  $a_3$  com  $a_4$ ;
- ✓ não existe covariância entre as variáveis  $a_1$  com  $a_3$ ,  $a_1$  com  $a_4$  e  $a_2$  com  $a_4$ ;
- ✓ o fator de correlação entre  $a_1$  com  $a_2$ ,  $a_2$  com  $a_3$  e  $a_3$  com  $a_4$ , a menos do sinal, é numericamente igual ao valor determinado pela equação de correlação.

$$\rho_{a_1a_2} = \frac{25}{7,07 \times 7,07} = 0,5 \quad \text{ou} \quad 50\%$$

Este fator de correlação indica que o grau de dependência é da ordem de 50% ou seja, que existe 50% de probabilidade de que um erro cometido no cálculo da variável  $a_1$  interfira no cálculo da variável  $a_2$ . No caso das correlações entre  $a_2$  com  $a_3$  e  $a_3$  com  $a_4$ , o valor é negativo, ( $\rho_{a_2a_3} = -50\%$  e  $\rho_{a_3a_4} = -50\%$ ) o que indica que existe 50% de chances de que um erro cometido no cálculo da variável  $a_2$  ou  $a_3$  interfira no cálculo da variável  $a_3$  ou  $a_4$  respectivamente e, se isso ocorrer, afetará no sentido inverso.

Exemplo 4 - Um observador com uma estação total mediu o azimute da direção  $\overline{01}$  e a distância entre as estações **0** e **1** a partir do ponto **0** cujas coordenadas são (0, 0) (figura 8). Os valores obtidos foram respectivamente,  $A_{01} = 60^\circ$  e  $d_{01} = 2.000$  m. Considere que ele utilizou um equipamento cuja precisão angular é de  $5''$  e a linear de  $\pm 5\text{mm} \pm 5\text{ppm}$ . Quais são as coordenadas do ponto 1 ( $x_1, y_1$ ) e a respectiva precisão?

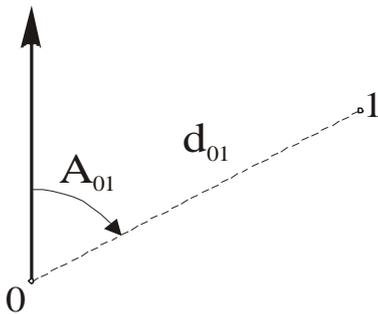


Figura 8 – Coordenadas de um ponto definidas a partir de uma estação, de um azimute e de uma distância.

Da mesma forma que no exemplo anterior, o primeiro passo é estabelecer qual o modelo matemático que faz a ligação entre os valores medidos ( $A_{01}$  e  $d_{01}$ ) com os valores procurados ( $x_1, y_1$ ).

A fórmula é bastante conhecida da topografia:

$$x_1 = x_0 + d_{01} \text{sen} A_{01}$$

$$y_1 = y_0 + d_{01} \text{cos} A_{01}$$

Observa-se que esta fórmula é do tipo não linear e, portanto o modelo de propagação é o seguinte:

$$\sum xy = D \times \sum Ad \times D^T$$

A matriz D é obtida derivando-se parcialmente as equações de  $x_1$  e  $y_1$  em relação ao azimute  $A_{01}$  e a distância  $d_{01}$ , obtendo-se as seguintes expressões:

$$\frac{\partial x_1}{\partial A} = d_{01} \times \text{cos} A_{01} = 1.000 \text{ m}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial d} = \text{sen} A_{01} = 0,866025$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial A} = -d_{01} \times \text{sen} A_{01} = -1.732,05 \text{ m}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial d} = \text{cos} A_{01} = 0,500000$$

colocando-se estes valores na matriz D, vem :

$$D = \begin{bmatrix} 1.000,00\text{m} & 0,866025 \\ -1.732,05\text{m} & 0,500000 \end{bmatrix}$$

## IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

Definida a matriz D, o passo seguinte é montar a matriz variância-covariância das observações.

$$\Sigma Ad = \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{Ad} \\ \sigma_{dA} & \sigma_d^2 \end{bmatrix}$$

O valor da variância do Azimute é oriundo da precisão angular do equipamento.

$$\sigma_A^2 = (5'')^2 = 25''^2$$

Embora este valor esteja correto, é necessário passá-lo para radianos porque, ao se proceder a multiplicação entre as matrizes, se estará misturando metro com segundo de arco.

$$\text{Então o valor de } \sigma_A^2 = \left( \frac{5''}{3600} \times \frac{\pi}{180^\circ} \right)^2 = 5,876107 \times 10^{-10} \text{ radianos.}$$

A variância da distância também é originada da precisão do equipamento ( $\sigma_d = \pm 5\text{mm} \pm 5\text{ppm}$ ).

$$\sigma_d^2 = \left( 0,005\text{m} + \frac{5 \cdot 2.000\text{m}}{1.000.000} \right)^2 = (0,015 \text{ m})^2 = 0,000225 \text{ m}^2$$

As correlações  $\sigma_{Ad} = \sigma_{dA} = 0$  porque não existe nenhuma dependência entre o azimute e a distância, ou seja, um erro no azimute não afeta a distância e vice-versa.

Finalmente a matriz variância-covariância das coordenadas é obtida da seguinte multiplicação:

$$\Sigma xy = \begin{bmatrix} 1.000,00\text{m} & 0,866025 \\ -1.732,05\text{m} & 0,500000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5,876107 \times 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0,000225\text{m}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1000,00\text{m} & -1.732,05\text{m} \\ 0,866025 & 0,500000 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma xy = \begin{bmatrix} 0,00075636 & -0,00092034 \\ -0,00092034 & 0,0018191 \end{bmatrix} m^2$$

Da matriz variância-covariância obtém-se as precisões das coordenadas  $x_1$  e  $y_1$ . Então :

$$x_1 = 0 + 2000 \times \text{sen}(60^\circ) = 1.732,05 \text{ m} \quad \text{e} \quad \sigma_{x_1} = \sqrt{0,00075636}$$

$$y_1 = 0 + 2000 \times \text{cos}(60^\circ) = 1.000,00 \text{ m} \quad \text{e} \quad \sigma_{y_1} = \sqrt{0,0018191}$$

ou seja,

$$x_1 = 1.732,05 \text{ m} \pm 0,0275 \text{ m}$$

$$y_1 = 1.000,00 \text{ m} \pm 0,0426 \text{ m}$$

O grau de dependência entre as v.a.  $x_1$  e  $y_1$  é calculada pelo coeficiente de correlação

$$\rho_{x_1 y_2} = \frac{-0,00092034}{0,0275 \times 0,0426} = -0,7846 \quad \text{ou} \quad -78,5\%$$

Este valor mostra que existe uma forte correlação entre as duas variáveis e que um erro em uma delas afeta a outra em 78,5% e no sentido inverso.

O exemplo 4 teve apenas o propósito de demonstrar como se propagam as covariâncias, e por esta razão, no enunciado, o observador mediu diretamente o azimute. Na prática, isso não acontece, o que se faz é determinar o ângulo azimutal através da técnica das direções. Neste caso é necessário se fazer a propagação dos azimutes. No próximo exemplo este processo será abordado e ficará mais claro.

Exemplo 5 - Executou-se uma poligonal eletrônica aberta a partir de um vértice de coordenadas e azimute inicial, conhecidos. Com os dados do levantamento calcule as coordenadas do ponto 3 e verifique qual a precisão dessas coordenadas considerando um equipamento cuja precisão angular é de 2" e a linear de 3mm + 10 ppm.

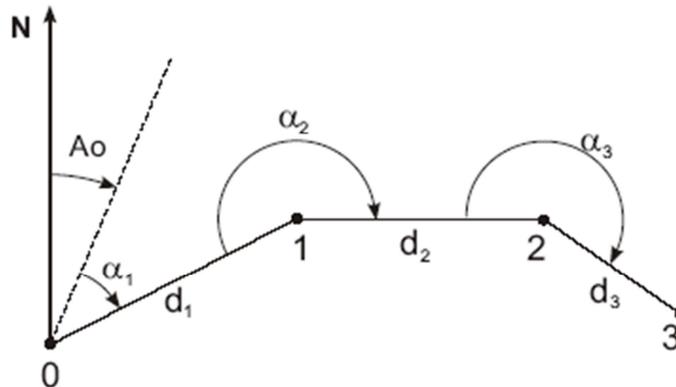


Figura 9 – Croqui da poligonal eletrônica aberta medida.

$A_0 = 45^{\circ}00'00''$  (azimute inicial)

| Valores observados (Lb)  |         |                 |
|--------------------------|---------|-----------------|
| Ângulos horizontais      |         | Distâncias      |
| $\alpha_1 = 40^{\circ}$  | 20' 10" | $d_1 = 6.000$ m |
| $\alpha_2 = 209^{\circ}$ | 47' 59" | $d_2 = 3.000$ m |
| $\alpha_3 = 202^{\circ}$ | 00' 17" | $d_3 = 1.500$ m |

**1º Passo – Modelo funcional**

$$\begin{aligned} x_3 &= x_0 + d_1 \times \text{sen}A_1 + d_2 \times \text{sen}A_2 + d_3 \times \text{sen}A_3 \\ y_3 &= y_0 + d_1 \times \text{cos}A_1 + d_2 \times \text{cos}A_2 + d_3 \times \text{cos}A_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Na equação observa-se que apenas o valor observado  $d_i$  aparece. Isto ocorre porque na prática não se lê o azimute diretamente, e sim a direção. Então é necessário se estabelecer a equação que envolve os ângulos medidos  $\alpha_i$  com os azimutes.

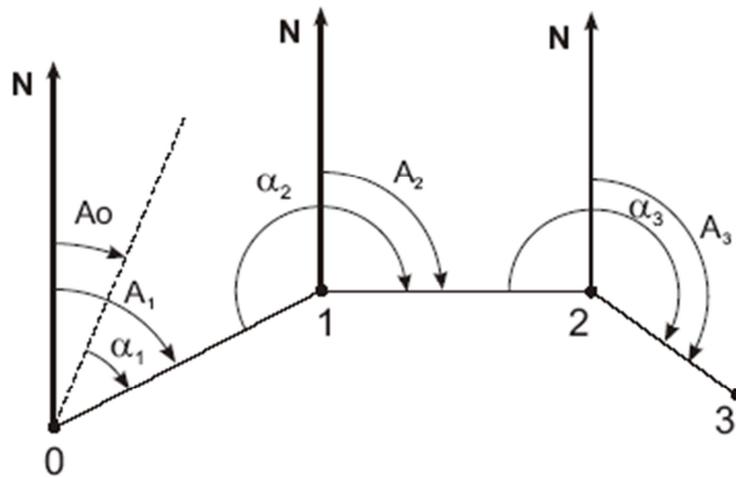


Figura 10 – Determinação dos azimutes a partir do azimute inicial e dos ângulos horizontais.

Da figura se extrai as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_0 + \alpha_1 & &= 85^\circ 20' 10'' \\
 A_2 &= A_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ & &= 115^\circ 08' 09'' \quad (3) \\
 A_3 &= A_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 360^\circ & &= 137^\circ 08' 26''
 \end{aligned}$$

que genericamente pode ser escrita como :

$$A_i = A_0 + \sum_{j=1}^i \alpha_j - (i-1) \cdot 180^\circ$$

$i = 1, n$

Escrevendo as equações acima sob a forma matricial vem:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_0 \\ A_0 - 180^\circ \\ A_0 - 360^\circ \end{bmatrix} \equiv A = G \times \alpha + C$$

analisando a equação, conclui-se que ela é do tipo linear e a propagação utiliza a fórmula

$$\Sigma A = G \Sigma \alpha G^T$$

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

**AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO**

Assim

$$\Sigma A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4^{n^2} & 0 & 0 \\ 0 & 4^{n^2} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{n^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} n^2$$

Os valores desta matriz estão em “<sup>2</sup>” Para não se ter problemas com unidades, estes devem ser convertidos em radianos. Existe um modo prático quando os valores estão em “<sup>2</sup>” que é multiplicar por  $\text{sen}^2(1'')$ .

Então:

$$\Sigma A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \cdot \text{sen}^2 1'' = \begin{bmatrix} 9,402 & 9,402 & 9,402 \\ 9,402 & 18,804 & 18,804 \\ 9,402 & 18,804 & 28,205 \end{bmatrix} \times 10^{-11} \text{radianos}$$

Calculada a propagação para o azimute passa-se à propagação para as coordenadas. Substituindo as equações (2) em (1).

$$\begin{aligned} x_3 &= x_0 + d_1 \text{sen} A_1 + d_2 \text{sen} A_2 + d_3 \text{sen} A_3 \\ y_3 &= y_0 + d_1 \cos A_1 + d_2 \cos A_2 + d_3 \cos A_3 \end{aligned}$$

Estas equações, por causa das funções trigonométricas são do tipo não linear e, portanto, utilizam outra forma de propagação.

$$\Sigma_{xy} = D \Sigma_{lb} D^T$$

A matriz D é obtida derivando-se parcialmente as equações de  $x_3$  e  $y_3$  em relação aos azimutes  $A_i$  e as distancia  $d_i$ , obtendo-se as seguintes expressões:

|  |   |              |  |   |             |
|--|---|--------------|--|---|-------------|
| $\frac{\partial x_3}{\partial A_1} = d_1 \times \cos A_1$        | = | 487,862 m    | $\frac{\partial x_3}{\partial d_1} = \text{sen} A_1$ | = | 0,99668883  |
| $\frac{\partial x_3}{\partial A_2} = d_2 \times \cos A_2$        | = | -1.274,297 m | $\frac{\partial x_3}{\partial d_2} = \text{sen} A_2$ | = | 0,90530332  |
| $\frac{\partial x_3}{\partial A_3} = d_3 \times \cos A_3$        | = | -1.099,537 m | $\frac{\partial x_3}{\partial d_3} = \text{sen} A_3$ | = | 0,68020218  |
| $\frac{\partial y_3}{\partial A_1} = -d_1 \times \text{sen} A_1$ | = | -5.980,133 m | $\frac{\partial y_3}{\partial d_1} = \cos A_1$       | = | 0,08131035  |
| $\frac{\partial y_3}{\partial A_2} = -d_2 \times \text{sen} A_2$ | = | -2.715,910 m | $\frac{\partial y_3}{\partial d_2} = \cos A_2$       | = | -0,42476569 |
| $\frac{\partial y_3}{\partial A_3} = -d_3 \times \text{sen} A_3$ | = | -1.020,303 m | $\frac{\partial y_3}{\partial d_3} = \cos A_3$       | = | -0,73302455 |

Substituindo os valores na matriz D

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial A_1} & \frac{\partial x_3}{\partial A_2} & \frac{\partial x_3}{\partial A_3} & \frac{\partial x_3}{\partial d_1} & \frac{\partial x_3}{\partial d_2} & \frac{\partial x_3}{\partial d_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial A_1} & \frac{\partial y_3}{\partial A_2} & \frac{\partial y_3}{\partial A_3} & \frac{\partial y_3}{\partial d_1} & \frac{\partial y_3}{\partial d_2} & \frac{\partial y_3}{\partial d_3} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 487,862m & -1.274,297m & -1.099,537m & 0,99668883 & 0,90530332 & 0,68020218 \\ -5.980,133m & -2.715,910m & -1.020,303m & 0,08131035 & -0,42476569 & -0,73302455 \end{bmatrix}$$

Finalmente monta-se a matriz variância-covariância das observações.

$$\Sigma Lb = \begin{bmatrix} \sigma_{A1}^2 & \sigma_{A1A2} & \sigma_{A1A3} & \sigma_{A1d1} & \sigma_{A1d2} & \sigma_{A1d3} \\ \sigma_{A2A1} & \sigma_{A2}^2 & \sigma_{A2A3} & \sigma_{A2d1} & \sigma_{A2d2} & \sigma_{A2d3} \\ \sigma_{A3A1} & \sigma_{A3A2} & \sigma_{A3}^2 & \sigma_{A3d1} & \sigma_{A3d2} & \sigma_{A3d3} \\ \sigma_{d1A1} & \sigma_{d1A2} & \sigma_{d1A3} & \sigma_{d1}^2 & \sigma_{d1d2} & \sigma_{d1d3} \\ \sigma_{d2A1} & \sigma_{d2A2} & \sigma_{d2A3} & \sigma_{d2d1} & \sigma_{d2}^2 & \sigma_{d2d3} \\ \sigma_{d3A1} & \sigma_{d3A2} & \sigma_{d3A3} & \sigma_{d3d1} & \sigma_{d3d2} & \sigma_{d3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma A & \Sigma Ad \\ \Sigma dA & \Sigma d \end{bmatrix}$$

Os valores da matriz variância-covariância dos azimutes já foram determinados na propagação dos ângulos para os azimutes e basta substituir na matriz  $\Sigma A$ . Contudo falta ainda calcular as variâncias das distâncias  $\Sigma d$ . Como as distâncias não são correlacionadas entre si e nem com os azimutes, as covariâncias que relacionam estas variáveis são nulas. Então:

$$\sigma_{d1} = 0,003m + \frac{10 \times 6.000m}{1.000.000} = 0,063m \Rightarrow \sigma_{d1}^2 = 0,003969m^2$$

$$\sigma_{d2} = 0,003m + \frac{10 \times 3.000m}{1.000.000} = 0,033m \Rightarrow \sigma_{d2}^2 = 0,001089m^2$$

$$\sigma_{d3} = 0,003m + \frac{10 \times 1.500m}{1.000.000} = 0,018m \Rightarrow \sigma_{d3}^2 = 0,000324m^2$$

Substituindo-se pelos valores numéricos:

$$\Sigma Lb = \begin{bmatrix} 9,402 \times 10^{-11} & 9,402 \times 10^{-11} & 9,402 \times 10^{-11} & 0 & 0 & 0 \\ 9,402 \times 10^{-11} & 18,804 \times 10^{-11} & 18,804 \times 10^{-11} & 0 & 0 & 0 \\ 9,402 \times 10^{-11} & 18,804 \times 10^{-11} & 28,205 \times 10^{-11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,003969m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001089m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,000324m^2 \end{bmatrix}$$

## IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

Finalmente basta proceder à multiplicação para obter a matriz variância-covariância das coordenadas  $x_3, y_3$ .

$$\Sigma_{x_3, y_3} = \begin{bmatrix} 0,0059631 & 0,0024035 \\ 0,0024035 & 0,010683 \end{bmatrix} m^2$$

A partir da matriz variância-covariância extraem-se as precisões das coordenadas do ponto 3.

$$x_3 = 9.716,346 \text{ m} \pm 0,0772 \text{ m}$$

$$y_3 = -1.885,972 \text{ m} \pm 0,1034 \text{ m}$$

O grau de dependência entre as v.a.  $x_3$  e  $y_3$  é calculada pelo coeficiente de correlação

$$\rho_{x_3, y_3} = \frac{0,0024035}{0,0772 \times 0,1034} = 0,3011 = 30,1\%$$

Este valor mostra que existe uma baixa correlação entre as duas variáveis e que um erro em uma delas tem 30,1% de probabilidade de afetar a outra.

Os exemplos 4 e 5 demonstram que a priori não se pode prever qual o grau de correlação entre duas variáveis antes de se efetuar a propagação. No exemplo anterior, o grau de correlação é de -78,5% enquanto neste, atinge 30,1 %.

Neste exemplo calculou-se o valor da precisão do terceiro ponto diretamente. Para se saber qual o valor do ponto 1 e 2 basta eliminar alguns elementos das matrizes D e  $\Sigma Lb$ . Procedendo-se desta forma encontram-se os seguintes valores.

$$x_1 = 5.980,133 \text{ m} \pm 0,0630 \text{ m}$$

$$y_1 = 487,862 \text{ m} \pm 0,0582 \text{ m}$$

$$\rho_{x_1, y_1} = 1,3 \%$$

$$x_2 = 8.696,043 \text{ m} \pm 0,0710 \text{ m}$$

$$y_2 = -786,435 \text{ m} \pm 0,0896 \text{ m}$$

$$\rho_{x_2, y_2} = 13,7 \%$$

## **4. SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES E O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS**

### **4.1. Resolução de Sistema de Equações Lineares**

Dada uma equação do tipo

$$ax = L$$

onde:  $x$  é um valor incógnito,  $L$  é um valor conhecido e “ $a$ ” é uma constante qualquer. Então a solução é:

$$x = \frac{L}{a}$$

No entanto, quando se tem um conjunto de equações formando um sistema, a solução não é tão direta.

Vamos imaginar um sistema de equações

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = L_1$$

$$a_4x_1 + a_5x_2 + a_6x_3 = L_2$$

$$a_7x_1 + a_8x_2 + a_9x_3 = L_3$$

Escrevendo este sistema na forma matricial

$${}_n A_{uu} X_1 = {}_n L_1$$

- onde :
- A - matriz formada pelos coeficiente  $a_i$
  - X - vetor formado pelos valores incógnitos  $x_i$
  - L - vetor formado pelos termos conhecidos  $L_i$
  - n - número de linhas (no exemplo é igual a 3)
  - u - número de colunas (no exemplo é igual a3)

No caso de matrizes as operações possíveis são a soma, a subtração e a multiplicação, não existindo a divisão. Deste modo a solução é dada por:

$${}_n X_1 = {}_u A_u^{-1} \times {}_u L_1$$

onde:  $A^{-1}$  é a matriz inversa<sup>2</sup> de A.

#### **4.2. O Método dos Mínimos Quadrados**

Quando um sistema de equações possui o número de equações iguais ao de incógnitas a solução é única. No entanto, quando existem mais equações que as necessárias, deve-se agrupá-las de forma que se tenham vários sistemas formados pelas combinações destas equações. Na teoria, independentemente do conjunto que se escolha, tem-se sempre a mesma solução.

Entretanto, quando se trabalha com dados reais, pela própria característica estocástica das observações, via de regra, se faz mais medidas que as necessárias. Cada observação ( $Lb$ ) resulta em uma equação e, como toda medida vem acompanhada de erros aleatórios, o sistema de equações resultante é inconsistente. É necessário então se proceder a uma homogeneização do sistema de modo que independente do conjunto de equações que se escolha tenha-se sempre a mesma solução.

Esta homogeneização é alcançada adicionando uma correção, também conhecida como resíduo ( $v_i$ ), a cada observação de modo a tornar o sistema consistente.

$$a_1x_1 + a_2x_2 = Lb_1 + v_1$$

$$a_3x_1 + a_4x_2 = Lb_2 + v_2$$

$$a_5x_1 + a_6x_2 = Lb_3 + v_3$$

---

<sup>2</sup> Uma matriz é dita inversa quando ao se pré-multiplicar ou pós-multiplicar a matriz original por ela, obtem-se a matriz identidade ( $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$ ). Para que uma matriz possua inversa é necessária que ela seja não singular (determinante diferente de zero) e que seja quadrada (número de linhas igual ao número de colunas).

ou no formato matricial

$$A\hat{X} = Lb + V$$

Dependendo do critério que se escolha para definir os valores desses resíduos, têm-se soluções diferentes para a incógnita  $\hat{X}$ , que agora é um valor estimado, por essa razão aparece o sinal circunflexo sobre a *v.a.* Entretanto, o critério aceito é o do Método dos Mínimos Quadrados (M.M.Q.), proposto por Gauss em 1795 e Legendre em 1805 que estudaram o problema de forma independente, sem que um, conhecesse o estudo do outro.

O M.M.Q. diz que a soma do quadrado dos resíduos tem que ser mínima, e pode ser expresso matematicamente:

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \min$$

Na forma matricial:

$$V^T V = \min$$

Para o caso de observações com graus diferentes de confiança introduz-se o critério de peso, e as equações passam a ser escritas:

$$\sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = \min \quad \text{ou} \quad V^T P V = \min$$

Isolando o vetor dos resíduos na equação matricial, vem:

$$V = A\hat{X} - Lb$$

Substituindo no critério de M.M.Q.

$$\phi = (A\hat{X} - Lb)^T \cdot (A\hat{X} - Lb) = \min \Leftrightarrow \phi = (\hat{X}^T A^T - Lb^T) \cdot (A\hat{X} - Lb) = \min$$

$$\phi = \hat{X}^T A^T A\hat{X} - X^T A^T Lb - Lb^T A\hat{X} + Lb^T Lb = \min$$

$$X^T A^T Lb \equiv Lb^T A\hat{X}^3, \text{ então}$$

$$\phi = \hat{X}^T A^T A\hat{X} - 2X^T A^T Lb + Lb^T Lb = \min$$

Para se determinar o mínimo da função deriva-se esta em relação às incógnitas e iguala a zero:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}} = 2A^T A\hat{X} - 2A^T Lb = 0 \quad \Rightarrow \quad 2A^T A\hat{X} = 2A^T Lb$$

Finalmente

$$\hat{X} = (A^T A)^{-1} (A^T Lb)$$

Se derivarmos novamente

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{X}^2} = 2A^T A > 0$$

o resultado é maior que zero indicando que a função resultante da 1ª derivada representa um ponto de mínimo.

Considerando observações com graus diferentes de confiança a matriz dos pesos entra como fator de ponderação e a equação assume o seguinte aspecto:

---

<sup>3</sup> Matematicamente  $X^T A^T Lb = (Lb^T A\hat{X})^T$ , entretanto elas são matrizes unitárias (com um único valor) e pode-se dizer então que  $X^T A^T Lb \equiv Lb^T A\hat{X}$ .

$$\hat{X} = (A^T P A)^{-1} (A^T P L b)$$

Esta equação representa a solução dos mínimos quadrados.

### 4.3. Condicionamento de Sistemas

Um sistema é dito mal condicionado quando, pequenas variações nos valores dos coeficientes ou dos termos independentes significa uma grande variação na solução do problema. Este fato ficará compreendido com o exemplo a seguir:

Dado o sistema de equações

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 - 2x_2 = -5 \end{array} \quad \text{ou na forma matricial} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

cuja solução é  $x_1 = 5$  e  $x_2 = 5$

Se introduzirmos uma pequena variação no termo independente, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,01 \\ -5 \end{bmatrix}$$

o resultado passa a ser  $x_1 = 5,007$  e  $x_2 = 5,003$ .

Observa-se que esta pequena variação introduziu uma pequena variação na resposta do problema. Este é o exemplo de um sistema bem condicionado.

Agora repetindo a experiência com outro sistema

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 10 \\ 1,001x_1 + x_2 = 10,005 \end{array} \quad \text{ou na forma matricial} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,001 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10,005 \end{bmatrix}$$

cuja solução é  $x_1 = 5$  e  $x_2 = 5$

Efetuada uma pequena alteração no termo independente, vem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,001 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10,1 \end{bmatrix}$$

o resultado passa a ser  $x_1 = 100$  e  $x_2 = -90$ .

Nota-se agora que uma variação não muito significativa resultou numa solução completamente diferente. Quando isso acontece, diz-se que o sistema é mal condicionado.

Este tipo de problema é importante porque os sistemas de equações utilizados na área da geomática são formados por valores observados e sabe-se que os erros de observação acompanham estes números.

Embora não seja um critério conclusivo, quando o determinante da matriz dos coeficientes resulta em um número pequeno e em contra posição a matriz inversa é composta por elementos grandes, geralmente este é um indicador de mal condicionamento.

Nos exemplos acima se verifica que no primeiro caso o determinante é igual a  $|A| = -3$  e sua inversa vale :

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e no segundo caso

$$|A| = -0,001 \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1000 & 1001 \\ 1000 & -1000 \end{bmatrix}$$

## **5. MÉTODOS DE AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES**

As observações são classificadas em diretas, indiretas e diretas condicionadas.

As diretas são aquelas onde se utiliza um medidor de mesma natureza que a grandeza procurada. Por exemplo, quando se emprega uma trena para medir uma distância ou um teodolito para um ângulo.

Ao contrário, são classificadas como indiretas quando se mede uma grandeza que se relaciona funcionalmente ou fisicamente com o valor procurado. É o caso de se determinar uma distância por estadimetria, onde se lê os fios, superior e inferior, da estadia e se obtém a distância entre o aparelho e ela.

Finalmente é classificada como direta condicionada quando além de ser direta, existir uma condição funcional. É o caso da medida dos ângulos de um triângulo. Se forem medidos apenas dois, a medida é direta, no entanto se o terceiro ângulo for medido, passa a existir a condição de que o somatório tem que ser  $180^{\circ}$ .

Em qualquer das situações, quando os valores não forem do mesmo grau de confiança, emprega-se o critério de pesos diferentes.

Cada um destes casos utiliza um método de ajustamento específico.

## **5.1. Ajustamento de observações diretas**

### **5.1.1. Estimativa pontual: média.**

Quando se mede várias vezes a mesma grandeza, o melhor estimador para, ela dependendo da amostra, é a média aritmética ou a ponderada. Pode-se demonstrar que este critério atende o dos mínimos quadrados, no entanto isso não será feito aqui. A equação para a média é a seguinte:

$$\bar{Lb} = \frac{\sum_{i=1}^n Lb_i}{n} \quad \text{ou} \quad \tilde{Lb} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i Lb_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

onde:  $\bar{Lb}$  - média aritmética dos valores observados

$\tilde{Lb}$  - média ponderada dos valores observados

$Lb_i$  - valores observados

$p_i$  - pesos das observações

$n$  - número de elementos da amostra

A primeira equação é a da média aritmética e a segunda da ponderada.

### **5.1.2. Estimativa da precisão: Desvio Padrão.**

No tópico 2.3 foi demonstrada a diferença entre acurácia e precisão. Lá fica claro que a precisão refere-se à dispersão das medidas ao redor de um valor médio e está intimamente ligada aos erros aleatórios. Esta grandeza é calculada através do desvio-padrão ( $\sigma$ ) que, no caso, deve considerar o duplo sinal ( $\pm$ ).

Gauss definiu que o desvio padrão é a raiz quadrada da média do quadrado dos erros verdadeiros (Gemael, 1994, p. 88), ou seja:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n}}$$

onde:  $\sigma$  - desvio-padrão

$\varepsilon_i^2$  - quadrado dos erros verdadeiros

n - número de elementos da amostra ou de observações

Entretanto, a não ser em alguns casos como os ângulos de um polígono fechado, não se têm como determinar o erro verdadeiro. Neste caso, se utilizam os erros aparentes que são calculados através dos resíduos ( $v_i$ ) em relação à média, ou seja:

$$\hat{\sigma} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{Lb} - Lb_i)^2}{n-1}}$$

Esta equação calcula o desvio padrão de uma amostra não ponderada (observações de igual confiança).

Na área de geomática, os valores utilizados nos cálculos, geralmente são resultado de uma série de observações de onde se determina o valor mais provável, ou seja, a média. Neste caso, a estimativa de precisão que se necessita não diz respeito à amostra, mas sim à média. Assim é necessário que se calcule o desvio padrão dela.

$$\hat{\sigma}_{\bar{Lb}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n(n-1)}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

A demonstração de como se chega a esta equação pode ser encontrada em Gemael, 1994, p. 89.

No caso de medidas de desigual confiança as equações ficam assim modificadas:

$$\hat{\sigma} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i (\tilde{L}b - Lb_i)^2}{n-1}} \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{L}b} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i (\tilde{L}b - Lb_i)^2}{(n-1)\sum_{i=1}^n p_i}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i}}$$

### 5.1.3. Estimativa por intervalo

A estimativa por intervalo de confiança fornece dois valores entre os quais, deve estar um parâmetro populacional estimado, com certa probabilidade, ou nível de confiança. Escrevendo em linguagem matemática:

$$P(a \leq \varepsilon \leq b) = 1 - \alpha$$

onde:  $a$  e  $b$  - extremos do intervalo

$\varepsilon$  - valor estimado

$\alpha$  - nível de significância

$1 - \alpha$  - grau de confiança

O valor do nível de significância normalmente é prefixado. Na área de geomática costuma-se usar 10%, 5% ou 2%.

Supondo o valor  $\alpha = 5\%$ , então:

$$P(a \leq \varepsilon \leq b) = 0,95$$

A expressão acima indica que há 95% de probabilidade ou confiança de que a variável estimada  $\varepsilon$  esteja entre os valores  $a$  e  $b$ .

### 5.1.3.1. Intervalo de confiança para a média

O intervalo de confiança pode ser aplicado na média em função do desvio padrão da média amostral. A expressão para o cálculo é a seguinte:

$$P\left(\bar{L}b - \hat{\sigma}_{\bar{L}b} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}; GL} \leq \mu \leq \bar{L}b + \hat{\sigma}_{\bar{L}b} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}\right) = 1 - \alpha$$

onde:  $\bar{L}b$  - média amostral

$\hat{\sigma}_{\bar{L}b}$  - desvio padrão da média aritmética amostral

$GL$  - graus de liberdade<sup>4</sup>

$t_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}$  - valor interpolado da tabela de distribuição de STUDENT com probabilidade de  $1-\frac{\alpha}{2}$  e  $GL$ .

$\mu$  - média populacional

Esta expressão indica que existe  $(1-\alpha)\%$  de probabilidade de que a média populacional esteja entre os valores extremos.

No caso de medidas com desigual confiança, a expressão acima assume a seguinte forma:

$$P\left(\tilde{L}b - \hat{\sigma}_{\tilde{L}b} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}; GL} \leq \mu \leq \tilde{L}b + \hat{\sigma}_{\tilde{L}b} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}\right) = 1 - \alpha$$

onde:  $\tilde{L}b$  - média amostral ponderada

$\hat{\sigma}_{\tilde{L}b}$  - desvio padrão da média ponderada

---

<sup>4</sup> Graus de liberdade é o número de observações ou equações a mais que o necessário para resolver um problema ou sistema de equações. No caso de observações diretas, os graus de liberdade são calculados por  $GL = n - 1$ , porque basta uma única observação para se conhecer o valor da grandeza.

### 5.1.3.2. Intervalo de confiança para a variância e desvio padrão

Da mesma forma que para a média, pode-se aplicar o intervalo de confiança para a variância. A expressão para este caso é a seguinte:

$$P\left(\frac{\hat{\sigma}^2 \cdot GL}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\hat{\sigma}^2 \cdot GL}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; GL}}\right) = 1 - \alpha$$

onde:  $\hat{\sigma}^2$  - variância amostral

$GL$  - graus de liberdade

$\chi^2$  - valor interpolado da tabela de Qui-Quadrado com  $GL = n - 1$  e probabilidades de  $1 - \frac{\alpha}{2}$  e  $\frac{\alpha}{2}$ .

Na área de geomática substituem-se os valores medidos pelo valor médio e neste caso na fórmula, se substitui a variância amostral pela variância da média.

$$P\left(\frac{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sqrt{n}} GL}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sqrt{n}} GL}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; GL}}\right) = 1 - \alpha \quad \text{ou} \quad P\left(\frac{\hat{\sigma}_{Lb}^2 GL}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\hat{\sigma}_{Lb}^2 GL}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; GL}}\right) = 1 - \alpha$$

No caso de medidas com desigual confiança a expressão acima assume a seguinte forma:

$$P\left(\frac{\hat{\sigma}_{Lb}^2 GL}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\hat{\sigma}_{Lb}^2 GL}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; GL}}\right) = 1 - \alpha$$

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

*AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO*

Para se obter o intervalo do desvio padrão basta extrair a raiz quadrada dos extremos calculados, ou seja:

$$P \left( \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{Lb}^2 GL}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{Lb}^2 GL}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; GL}}} \right) = 1 - \alpha \quad < = \text{ Para medidas de igual confiança}$$

$$P \left( \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{Lb}^2 GL}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{Lb}^2 GL}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; GL}}} \right) = 1 - \alpha \quad < = \text{ Para medidas de desigual confiança.}$$

Exemplo 6 - Um ângulo foi medido dez vezes, com o resultado mostrado na tabela a seguir.

Calcule os estimadores pontuais e os por intervalo de confiança.

| n | Lbi   |     |       |
|---|-------|-----|-------|
| 1 | 120 ° | 31' | 40,1" |
| 2 | "     | "   | 41,2" |
| 3 | "     | "   | 40,8" |
| 4 | "     | "   | 42,1" |
| 5 | "     | "   | 42,9" |

| n  | Lbi |   |       |
|----|-----|---|-------|
| 6  | "   | " | 42,4" |
| 7  | "   | " | 43,0" |
| 8  | "   | " | 40,7" |
| 9  | "   | " | 41,9" |
| 10 | "   | " | 41,5" |

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

*AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO*

**1 Cálculo dos estimadores pontuais:**

| Medida | Lb <sub>i</sub> |      |        | $(\bar{L}b - Lb_i)$ | $(\bar{L}b - Lb_i)^2$ |
|--------|-----------------|------|--------|---------------------|-----------------------|
|        | 120°            | 31'  | 40,1"  |                     |                       |
| 1      | 120°            | 31'  | 40,1"  | 1,56 "              | 2,4336 "²             |
| 2      | "               | "    | 41,2"  | 0,46 "              | 0,2116 "²             |
| 3      | "               | "    | 40,8"  | 0,86 "              | 0,7396 "²             |
| 4      | "               | "    | 42,1"  | -0,44 "             | 0,1936 "²             |
| 5      | "               | "    | 42,9"  | -1,24 "             | 1,5376 "²             |
| 6      | "               | "    | 42,4"  | -0,74 "             | 0,5476 "²             |
| 7      | "               | "    | 43,0"  | -1,34 "             | 1,7956 "²             |
| 8      | "               | "    | 40,7"  | 0,96 "              | 0,9216 "²             |
| 9      | "               | "    | 41,9"  | -0,24 "             | 0,0576 "²             |
| 10     | "               | "    | 41,5"  | 0,16 "              | 0,0256 "²             |
| Σ      | 1200°           | 310' | 416,6" | Σ                   | 8,4640 "²             |

**a) média aritmética**

$$\bar{L}b = \frac{\sum_{i=1}^n Lb_i}{n} \Rightarrow \bar{L}b = \frac{1200^\circ 310' 416,6''}{10} \Rightarrow \bar{L}b = 120^\circ 31' 41,66''$$

**b) desvio padrão da amostra**

$$\hat{\sigma} = \pm \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{\sum (\bar{L}b - Lb_i)^2}{n-1}} \Rightarrow \hat{\sigma} = \pm \sqrt{\frac{8,4640}{10-1}} = \pm 0,9698$$

**c) desvio padrão da média**

$$\hat{\sigma}_{\bar{L}b} = \pm \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n(n-1)}} \Rightarrow \hat{\sigma}_{\bar{L}b} = \pm \sqrt{\frac{8,4640}{10(10-1)}} = \pm 0,3067 \quad \text{ou} \quad \hat{\sigma}_{\bar{L}b} = \frac{0,9698}{\sqrt{10}} = \pm 0,3067$$

**2 Cálculo dos estimadores por intervalo de confiança:**

Para se calcular utilizando intervalo de confiança é necessário escolher um nível de significância. Então supondo um nível de significância  $\alpha = 5\%$ .

**a) Cálculo do intervalo para a média:**

$$P\left(\bar{Lb} - \hat{\sigma}_{\bar{Lb}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2};GL} \leq \mu \leq \bar{Lb} + \hat{\sigma}_{\bar{Lb}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2};GL}\right) = 1 - \alpha$$

Dos estimadores pontuais se obtém os valores

$$\bar{Lb} = 120^\circ 31' 41,66'' \quad ; \quad \hat{\sigma}_{\bar{Lb}} = 0,3067''$$

O valor de  $t_{1-\frac{\alpha}{2};GL}$  é obtido na tabela de distribuição de Student (pág. 43) com

$$\begin{array}{llll} \alpha = 5\% = 0,05 & \Rightarrow & 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95 = 95\% & \\ & & 1 - \alpha/2 = 1 - 0,05/2 = 0,975 & \\ GL = n - 1 & & GL = 10 - 1 = 9 & \text{então } \Rightarrow \quad t_{0,975;9} = 2,26 \end{array}$$

Obs.: No Excel esse valor pode ser obtido pela função  $INV.T(1 - \alpha/2;GL)$ .

assim,

$$P(120^\circ 31' 41,66'' - 0,3067'' \cdot 2,26 \leq \mu \leq 120^\circ 31' 41,66'' + 0,3067'' \cdot 2,26) = 95\%$$

$$P(120^\circ 31' 41,66'' - 0,6931 \leq \mu \leq 120^\circ 31' 41,66'' + 0,6931) = 95\%$$

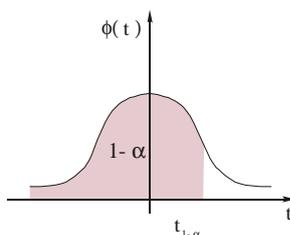
$$P(120^\circ 31' 40,97'' \leq \mu \leq 120^\circ 31' 42,35'') = 95\%$$

Esta expressão nos diz que a média populacional tem probabilidade de 95% de estar entre os valores  $120^\circ 31' 40,97''$  e  $120^\circ 31' 42,35''$ .

Se aumentarmos o nível de significância (p.ex. 10%) e, conseqüentemente, diminuirmos o nível de confiança (90%), este intervalo é diminuído, o que mostra que quanto maior o nível de significância mais rigoroso é a determinação do intervalo.

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

*AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO*



Percentis da distribuição de Student ( $t_{1-\alpha}$ )

| P   | 0,550 | 0,600 | 0,650 | 0,700 | 0,750 | 0,800 | 0,850 | 0,900 | 0,950 | <b>0,975</b> | 0,990 | 0,995 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|-------|-------|
| GL  |       |       |       |       |       |       |       |       |       |              |       |       |
| 1   | 0,158 | 0,325 | 0,510 | 0,727 | 1,000 | 1,376 | 1,963 | 3,078 | 6,314 | 12,71        | 31,82 | 63,65 |
| 2   | 0,142 | 0,289 | 0,445 | 0,617 | 0,817 | 1,061 | 1,386 | 1,886 | 2,920 | 4,30         | 6,96  | 9,43  |
| 3   | 0,137 | 0,277 | 0,424 | 0,584 | 0,765 | 0,979 | 1,250 | 1,638 | 2,353 | 3,18         | 4,54  | 5,84  |
| 4   | 0,134 | 0,271 | 0,414 | 0,569 | 0,741 | 0,941 | 1,190 | 1,533 | 2,132 | 2,78         | 3,75  | 4,60  |
| 5   | 0,132 | 0,267 | 0,408 | 0,559 | 0,727 | 0,920 | 1,156 | 1,476 | 2,015 | 2,57         | 3,36  | 4,03  |
| 6   | 0,131 | 0,265 | 0,404 | 0,553 | 0,718 | 0,906 | 1,134 | 1,440 | 1,943 | 2,45         | 3,14  | 3,71  |
| 7   | 0,130 | 0,263 | 0,402 | 0,549 | 0,711 | 0,896 | 1,119 | 1,415 | 1,895 | 2,36         | 3,00  | 3,50  |
| 8   | 0,130 | 0,262 | 0,400 | 0,546 | 0,706 | 0,889 | 1,108 | 1,397 | 1,860 | 2,31         | 2,90  | 3,36  |
| 9   | 0,129 | 0,261 | 0,398 | 0,544 | 0,703 | 0,883 | 1,100 | 1,383 | 1,833 | <b>2,26</b>  | 2,82  | 3,25  |
| 10  | 0,129 | 0,260 | 0,397 | 0,542 | 0,700 | 0,879 | 1,093 | 1,372 | 1,813 | 2,23         | 2,76  | 3,17  |
| 11  | 0,129 | 0,260 | 0,396 | 0,540 | 0,697 | 0,876 | 1,088 | 1,363 | 1,796 | 2,20         | 2,72  | 3,11  |
| 12  | 0,128 | 0,259 | 0,395 | 0,539 | 0,696 | 0,873 | 1,083 | 1,356 | 1,782 | 2,18         | 2,68  | 3,05  |
| 13  | 0,128 | 0,259 | 0,394 | 0,538 | 0,694 | 0,870 | 1,080 | 1,350 | 1,771 | 2,16         | 2,65  | 3,01  |
| 14  | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,537 | 0,692 | 0,868 | 1,076 | 1,345 | 1,761 | 2,14         | 2,62  | 2,98  |
| 15  | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,536 | 0,691 | 0,866 | 1,074 | 1,341 | 1,753 | 2,13         | 2,60  | 2,95  |
| 16  | 0,128 | 0,258 | 0,392 | 0,535 | 0,690 | 0,865 | 1,071 | 1,337 | 1,746 | 2,12         | 2,58  | 2,92  |
| 17  | 0,125 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,689 | 0,863 | 1,069 | 1,333 | 1,740 | 2,11         | 2,57  | 2,90  |
| 18  | 0,127 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,688 | 0,862 | 1,067 | 1,330 | 1,734 | 2,10         | 2,55  | 2,88  |
| 19  | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,688 | 0,861 | 1,066 | 1,328 | 1,729 | 2,09         | 2,54  | 2,86  |
| 29  | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,687 | 0,860 | 1,064 | 1,325 | 1,725 | 2,09         | 2,53  | 2,85  |
| 21  | 0,128 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,686 | 0,859 | 1,063 | 1,323 | 1,721 | 2,08         | 2,52  | 2,83  |
| 22  | 0,125 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,686 | 0,858 | 1,062 | 1,321 | 1,717 | 2,07         | 2,51  | 2,82  |
| 23  | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,685 | 0,858 | 1,060 | 1,320 | 1,714 | 2,07         | 2,50  | 2,81  |
| 24  | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,685 | 0,857 | 1,059 | 1,318 | 1,711 | 2,06         | 2,49  | 2,80  |
| 25  | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,316 | 1,708 | 2,06         | 2,49  | 2,79  |
| 26  | 0,128 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,315 | 1,706 | 2,06         | 2,48  | 2,78  |
| 27  | 0,125 | 0,256 | 0,389 | 0,531 | 0,684 | 0,855 | 1,057 | 1,314 | 1,703 | 2,05         | 2,47  | 2,77  |
| 28  | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,855 | 1,056 | 1,313 | 1,701 | 2,05         | 2,47  | 2,76  |
| 29  | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,311 | 1,699 | 2,05         | 2,46  | 2,76  |
| 30  | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,310 | 1,697 | 2,04         | 2,46  | 2,75  |
| 40  | 0,127 | 0,255 | 0,388 | 0,529 | 0,681 | 0,851 | 1,050 | 1,303 | 1,684 | 2,02         | 2,42  | 2,70  |
| 50  | 0,126 | 0,255 | 0,388 | 0,528 | 0,679 | 0,849 | 1,047 | 1,299 | 1,676 | 2,01         | 2,40  | 2,68  |
| 60  | 0,126 | 0,255 | 0,387 | 0,527 | 0,679 | 0,848 | 1,046 | 1,296 | 1,671 | 2,00         | 2,39  | 2,66  |
| 70  | 0,126 | 0,254 | 0,387 | 0,527 | 0,678 | 0,847 | 1,044 | 1,294 | 1,667 | 1,99         | 2,38  | 2,65  |
| 80  | 0,126 | 0,254 | 0,387 | 0,527 | 0,678 | 0,846 | 1,043 | 1,292 | 1,664 | 1,99         | 2,37  | 2,64  |
| 90  | 0,126 | 0,254 | 0,387 | 0,526 | 0,677 | 0,846 | 1,042 | 1,291 | 1,662 | 1,99         | 2,37  | 2,63  |
| 100 | 0,126 | 0,254 | 0,386 | 0,526 | 0,677 | 0,845 | 1,042 | 1,290 | 1,660 | 1,98         | 2,36  | 2,63  |
| 200 | 0,126 | 0,254 | 0,386 | 0,525 | 0,676 | 0,843 | 1,039 | 1,285 | 1,652 | 1,97         | 2,34  | 2,60  |
| 300 | 0,126 | 0,253 | 0,386 | 0,525 | 0,675 | 0,843 | 1,038 | 1,284 | 1,649 | 1,97         | 2,34  | 2,59  |
| 400 | 0,126 | 0,253 | 0,386 | 0,525 | 0,675 | 0,842 | 1,037 | 1,283 | 1,648 | 1,96         | 2,33  | 2,58  |
| 500 | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,525 | 0,675 | 0,842 | 1,037 | 1,283 | 1,647 | 1,96         | 2,33  | 2,58  |
| 600 | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,525 | 0,675 | 0,842 | 1,037 | 1,283 | 1,647 | 1,96         | 2,33  | 2,58  |
| 700 | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,525 | 0,675 | 0,842 | 1,037 | 1,282 | 1,646 | 1,96         | 2,33  | 2,58  |
| 800 | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,524 | 0,675 | 0,842 | 1,037 | 1,282 | 1,646 | 1,96         | 2,33  | 2,58  |
| 900 | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,524 | 0,675 | 0,842 | 1,037 | 1,282 | 1,646 | 1,96         | 2,33  | 2,58  |
| ∞   | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,524 | 0,675 | 0,842 | 1,037 | 1,282 | 1,645 | 1,96         | 2,33  | 2,58  |

**b) Cálculo do intervalo para a variância da média:**

$$P\left(\frac{\bar{\sigma}_{Lb}^2 GL}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};GL}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\bar{\sigma}_{Lb}^2 GL}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};GL}}\right) = 1 - \alpha$$

Adotando o mesmo procedimento do cálculo anterior vem:

$$\bar{\sigma}_{Lb}^2 = (0,3067 \text{ "})^2 = 0,09406489 \text{ "}^2$$

o valor da variável  $\chi^2$  é obtida de uma tabela (pág. 45) com

$$\begin{array}{l} GL = 9 \\ 1 - \alpha/2 = 0,975 \\ \alpha/2 = 0,025. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \chi^2_{0,975;9} = 19,02 \\ \chi^2_{0,025;9} = 2,70 \end{array}$$

Obs.: No Excel esses valores podem se obtidos pela função INV.QUIQUA( $\alpha/2$ ;GL) e INV.QUIQUA( $1-\alpha/2$ ;GL).

substituindo os valores na fórmula vem:

$$P\left(\frac{0,09406489 \cdot 9}{19,02} \leq \sigma^2 \leq \frac{0,09406489 \cdot 9}{2,70}\right) = 95\%$$

$$P(0,0445 \text{ "}^2 \leq \sigma^2 \leq 0,3135 \text{ "}^2) = 95\%$$

Extraindo-se a raiz quadrada da expressão acima se obtém o intervalo para o desvio padrão da média populacional.

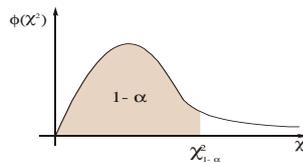
$$P(0,211 \text{ "} \leq \sigma \leq 0,560 \text{ "}) = 95\%$$

Esta expressão nos diz que o desvio padrão da média populacional tem probabilidade de 95% de estar entre os valores 0,211" e 0,560".

Novamente, se o nível de significância for aumentado e, conseqüentemente o nível de confiança diminuído, o intervalo também diminui.

# IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO



Distribuição de Qui-Quadrado ( $\chi^2$ )

| P    | 0,005 | 0,010 | 0,025       | 0,050 | 0,100 | 0,250 | 0,750  | 0,900  | 0,950  | <b>0,975</b> | 0,990  | 0,995  |
|------|-------|-------|-------------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------------|--------|--------|
| GL   |       |       |             |       |       |       |        |        |        |              |        |        |
| 1    | 0,00  | 0,00  | 0,00        | 0,00  | 0,02  | 0,10  | 1,32   | 2071   | 3,84   | 5,02         | 6,64   | 7,88   |
| 2    | 0,01  | 0,02  | 0,05        | 0,10  | 0,21  | 0,58  | 2,77   | 4,61   | 5,99   | 7,38         | 9,21   | 10,60  |
| 3    | 0,07  | 0,12  | 0,22        | 0,35  | 0,58  | 1,21  | 4,11   | 6,25   | 7,82   | 9,35         | 11,35  | 12,84  |
| 4    | 0,21  | 0,30  | 0,49        | 0,71  | 1,06  | 1,92  | 5,39   | 7,78   | 9,49   | 11,14        | 13,28  | 14,86  |
| 5    | 0,41  | 0,55  | 0,83        | 1,15  | 1,61  | 2,68  | 6,63   | 9,24   | 11,07  | 12,83        | 15,09  | 16,75  |
| 6    | 0,68  | 0,87  | 1,24        | 1,64  | 2,20  | 3,46  | 7,82   | 10,65  | 12,59  | 14,45        | 16,81  | 18,55  |
| 7    | 0,99  | 1,24  | 1,69        | 2,17  | 2,83  | 4,26  | 9,04   | 12,02  | 14,07  | 16,01        | 18,48  | 20,28  |
| 8    | 1,34  | 1,65  | 2,18        | 2,73  | 3,49  | 5,07  | 10,22  | 13,36  | 15,51  | 17,54        | 20,09  | 21,96  |
| 9    | 1,74  | 2,09  | <b>2,70</b> | 3,33  | 4,17  | 5,90  | 11,39  | 14,68  | 16,92  | <b>19,02</b> | 21,67  | 23,59  |
| 10   | 2,16  | 2,56  | 3,25        | 3,94  | 4,87  | 6,74  | 12,55  | 15,99  | 18,31  | <b>20,48</b> | 23,21  | 25,19  |
| 11   | 2,60  | 3,05  | 3,82        | 4,58  | 5,58  | 7,58  | 13,70  | 17,28  | 19,68  | 21,92        | 24,73  | 26,76  |
| 12   | 3,07  | 3,57  | 4,40        | 5,23  | 6,30  | 8,44  | 14,85  | 18,55  | 21,03  | 23,34        | 26,22  | 28,30  |
| 13   | 3,57  | 4,11  | 5,01        | 5,89  | 7,04  | 9,30  | 15,98  | 19,81  | 22,36  | 24,74        | 27,69  | 29,82  |
| 14   | 4,08  | 4,66  | 5,63        | 6,57  | 7,79  | 10,17 | 17,12  | 21,06  | 23,69  | 26,12        | 29,14  | 31,32  |
| 15   | 4,60  | 5,23  | 6,26        | 7,26  | 8,55  | 11,04 | 18,25  | 22,31  | 25,00  | 27,49        | 30,58  | 32,80  |
| 16   | 5,14  | 5,81  | 6,91        | 7,96  | 9,31  | 11,91 | 19,37  | 23,54  | 26,30  | 28,85        | 32,00  | 34,27  |
| 17   | 5,70  | 6,41  | 7,56        | 8,67  | 10,09 | 12,79 | 20,49  | 24,77  | 27,59  | 30,19        | 33,41  | 35,72  |
| 18   | 6,27  | 7,02  | 8,23        | 9,39  | 10,67 | 13,68 | 21,61  | 25,99  | 28,87  | 31,53        | 34,81  | 37,16  |
| 19   | 6,84  | 7,63  | 8,91        | 10,12 | 11,65 | 14,56 | 22,72  | 27,20  | 30,14  | 32,85        | 36,19  | 38,58  |
| 20   | 7,43  | 8,26  | 9,59        | 10,85 | 12,44 | 15,45 | 23,83  | 28,41  | 31,41  | 34,17        | 37,57  | 40,00  |
| 21   | 8,03  | 8,90  | 10,28       | 11,59 | 13,24 | 16,34 | 24,94  | 29,62  | 32,67  | 35,48        | 38,93  | 41,40  |
| 22   | 8,64  | 9,54  | 10,98       | 12,34 | 14,04 | 17,24 | 26,04  | 30,81  | 33,92  | 36,78        | 40,29  | 42,80  |
| 23   | 9,26  | 10,20 | 11,69       | 13,09 | 14,85 | 18,14 | 27,14  | 32,01  | 35,17  | 38,08        | 41,64  | 44,18  |
| 24   | 9,89  | 10,86 | 12,40       | 13,85 | 15,66 | 19,04 | 28,24  | 33,20  | 36,42  | 39,36        | 42,98  | 45,56  |
| 25   | 10,52 | 11,52 | 13,12       | 14,61 | 16,47 | 19,94 | 29,34  | 34,38  | 37,65  | 40,65        | 44,31  | 46,93  |
| 26   | 11,16 | 12,20 | 13,84       | 15,38 | 17,29 | 20,84 | 30,42  | 35,56  | 38,89  | 41,92        | 45,64  | 48,29  |
| 27   | 11,81 | 12,88 | 14,57       | 16,15 | 18,11 | 21,75 | 31,53  | 36,74  | 40,11  | 43,19        | 46,96  | 48,29  |
| 28   | 12,46 | 13,57 | 15,31       | 16,93 | 18,94 | 22,66 | 32,62  | 37,92  | 41,34  | 44,46        | 48,28  | 50,99  |
| 29   | 13,12 | 14,26 | 16,05       | 17,71 | 19,77 | 23,57 | 33,71  | 39,09  | 42,56  | 45,72        | 49,59  | 52,37  |
| 30   | 13,79 | 14,95 | 16,79       | 18,49 | 20,60 | 24,48 | 34,80  | 40,26  | 43,77  | 46,98        | 50,89  | 53,67  |
| 35   | 17,19 | 18,51 | 20,57       | 22,47 | 24,80 | 29,05 | 40,22  | 46,06  | 49,80  | 53,20        | 57,34  | 60,28  |
| 40   | 20,71 | 22,16 | 24,43       | 26,51 | 29,05 | 33,66 | 45,62  | 51,81  | 55,76  | 59,34        | 63,69  | 66,77  |
| 45   | 24,31 | 25,90 | 28,37       | 30,61 | 33,35 | 38,29 | 50,99  | 57,51  | 61,66  | 65,41        | 69,96  | 73,17  |
| 50   | 27,99 | 29,71 | 32,36       | 34,76 | 37,69 | 42,94 | 56,33  | 63,17  | 67,51  | 71,42        | 76,15  | 79,49  |
| 55   | 31,74 | 33,57 | 36,40       | 38,96 | 42,06 | 47,61 | 61,67  | 68,80  | 73,31  | 77,58        | 82,29  | 85,75  |
| 60   | 35,53 | 37,49 | 40,58       | 43,19 | 46,46 | 52,29 | 66,98  | 74,40  | 79,08  | 83,30        | 88,40  | 91,95  |
| 65   | 39,38 | 41,44 | 44,60       | 47,45 | 50,88 | 56,99 | 72,29  | 79,97  | 84,82  | 89,18        | 94,42  | 98,11  |
| 70   | 43,28 | 45,44 | 48,76       | 51,74 | 55,33 | 61,70 | 77,58  | 87,53  | 90,53  | 95,02        | 100,4  | 104,2  |
| 75   | 47,21 | 49,48 | 52,94       | 56,05 | 59,80 | 66,42 | 82,86  | 91,06  | 96,22  | 100,8        | 106,4  | 110,3  |
| 80   | 51,17 | 53,54 | 57,15       | 60,39 | 64,28 | 71,15 | 88,13  | 96,58  | 101,9  | 106,6        | 112,3  | 116,3  |
| 85   | 55,17 | 57,63 | 61,39       | 64,75 | 68,78 | 75,88 | 93,39  | 102,1  | 107,5  | 112,4        | 118,2  | 122,3  |
| 90   | 59,20 | 61,75 | 65,65       | 69,13 | 73,29 | 80,63 | 98,65  | 107,6  | 113,1  | 118,1        | 124,1  | 128,3  |
| 95   | 63,25 | 65,90 | 69,93       | 73,52 | 77,82 | 85,38 | 103,9  | 113,0  | 118,8  | 123,9        | 130,0  | 134,2  |
| 100  | 67,33 | 70,07 | 74,22       | 77,93 | 82,36 | 90,13 | 109,1  | 118,5  | 124,3  | 129,6        | 135,8  | 140,2  |
| 110  | 75,55 | 78,46 | 82,87       | 86,79 | 91,47 | 99,67 | 119,6  | 129,4  | 135,5  | 140,9        | 147,4  | 151,9  |
| 120  | 83,85 | 86,92 | 91,57       | 95,71 | 100,6 | 109,2 | 130,1  | 140,2  | 146,6  | 152,2        | 159,0  | 163,6  |
| 130  | 92,22 | 95,45 | 100,3       | 104,7 | 109,8 | 118,8 | 140,5  | 151,0  | 157,6  | 163,5        | 170,4  | 175,3  |
| 140  | 100,7 | 104,0 | 109,1       | 113,7 | 119,0 | 128,4 | 150,9  | 161,8  | 168,6  | 174,6        | 181,8  | 186,8  |
| 150  | 109,1 | 112,7 | 118,0       | 122,7 | 128,3 | 138,0 | 161,3  | 172,6  | 179,6  | 185,8        | 193,2  | 198,4  |
| 200  | 152,2 | 156,4 | 162,7       | 168,3 | 174,8 | 186,2 | 213,1  | 226,0  | 234,0  | 241,1        | 249,4  | 255,3  |
| 250  | 196,2 | 200,9 | 208,1       | 214,4 | 221,8 | 234,6 | 264,7  | 279,1  | 287,9  | 295,7        | 304,9  | 311,3  |
| 300  | 240,7 | 246,0 | 253,9       | 260,9 | 269,1 | 283,1 | 316,1  | 331,8  | 341,4  | 350,0        | 359,9  | 366,8  |
| 400  | 330,9 | 337,2 | 346,5       | 354,6 | 364,2 | 380,6 | 418,7  | 436,6  | 447,6  | 457,3        | 468,7  | 476,6  |
| 500  | 422,3 | 429,4 | 439,9       | 449,1 | 459,9 | 478,3 | 521,0  | 540,9  | 553,1  | 553,1        | 576,5  | 585,2  |
| 600  | 514,5 | 522,4 | 534,0       | 544,2 | 556,1 | 576,3 | 623,0  | 644,8  | 658,1  | 658,1        | 683,5  | 693,0  |
| 700  | 607,4 | 615,9 | 628,6       | 639,6 | 652,5 | 674,4 | 724,9  | 748,4  | 762,7  | 762,7        | 790,0  | 800,1  |
| 800  | 700,7 | 709,9 | 723,5       | 735,4 | 749,2 | 772,7 | 826,6  | 851,7  | 866,9  | 866,9        | 896,0  | 907,0  |
| 900  | 794,5 | 804,3 | 818,8       | 831,4 | 846,1 | 871,0 | 928,2  | 954,8  | 970,9  | 970,9        | 1002,0 | 1013,0 |
| 1000 | 888,6 | 898,9 | 914,3       | 927,6 | 943,1 | 969,5 | 1030,0 | 1058,0 | 1075,0 | 1090         | 1107,0 | 1119,0 |

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

*AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO*

Exemplo 7 - Um ângulo foi medido em quatro etapas, conforme a tabela abaixo. Adotando pesos proporcionais ao número de observações calcule os estimadores pontuais e por intervalo de confiança.

| n | ângulos ( Lb <sub>i</sub> ) |     |     | nº de obs |
|---|-----------------------------|-----|-----|-----------|
| 1 | 80°                         | 50' | 12" | 6         |
| 2 | "                           | "   | 14" | 3         |
| 3 | "                           | "   | 12" | 9         |
| 4 | "                           | "   | 18" | 6         |
| Σ |                             |     |     | 24        |

| p <sub>i</sub> | p <sub>i</sub> Lb <sub>i</sub> |      |      | ( $\tilde{L}b - Lb_i$ ) | p <sub>i</sub> ( $\tilde{L}b - Lb_i$ ) <sup>2</sup> |
|----------------|--------------------------------|------|------|-------------------------|---|
| 2              | 160°                           | 100' | 24"  | 1,75"                   | 6,1250 <sup>2</sup>                                 |
| 1              | 80°                            | 50'  | 14"  | -0,25"                  | 0,0625 <sup>2</sup>                                 |
| 3              | 240°                           | 150' | 36"  | 1,75"                   | 9,1875 <sup>2</sup>                                 |
| 2              | 160°                           | 100' | 36"  | -4,25"                  | 36,125 <sup>2</sup>                                 |
| 8              | 640°                           | 400' | 110" |                         | 51,500 <sup>2</sup>                                 |

**1 Estimadores pontuais:**

**a) Média ponderada**

$$\tilde{L}b = \frac{\sum_{i=1}^n p_i Lb_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \Rightarrow \tilde{L}b = \frac{640^\circ 400' 110''}{8} = 80^\circ 50' 13,75''$$

**b) Desvio padrão da amostra ponderada**

$$\hat{\sigma} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i (\tilde{L}b - Lb_i)^2}{n-1}} \Rightarrow \hat{\sigma} = \pm \sqrt{\frac{51,500}{4-1}} = \pm 4,14''$$

**c) Desvio padrão da média ponderada**

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{L}b} = \pm \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i}} \Rightarrow \tilde{\sigma}_{\tilde{L}b} = \pm \frac{4,14}{\sqrt{8}} = \pm 1,46''$$

**2 Cálculo dos estimadores por intervalo de confiança:**

Para se calcular utilizando intervalo de confiança é necessário escolher um nível de significância. Então supondo um nível de significância  $\alpha = 5\%$ .

**a) Cálculo do intervalo para a média:**

$$P\left(\tilde{L}b - \hat{\sigma}_{\tilde{L}b} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}; GL} \leq \mu \leq \tilde{L}b + \hat{\sigma}_{\tilde{L}b} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}\right) = 1 - \alpha$$

da tabela de Student  $t_{0,975;3} = 3,18$  então :

$$P(80^{\circ}50'13,75'' - 1,46'' \cdot 3,18 \leq \mu \leq 80^{\circ}50'13,75'' + 1,46'' \cdot 3,18) = 95\%$$

$$P(80^{\circ}50'09,09'' \leq \mu \leq 80^{\circ}50'18,41'') = 95\%$$

**b) Cálculo do intervalo para a variância da média**

$$P\left(\frac{\hat{\sigma}_{\tilde{L}b}^2 GL}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; GL}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\hat{\sigma}_{\tilde{L}b}^2 GL}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; GL}}\right) = 1 - \alpha$$

da tabela de qui-quadrado

$$\chi^2_{0,025;3} = 0,22 \quad \text{e} \quad \chi^2_{0,975;3} = 9,35 \quad \text{então:}$$

$$P\left(\frac{1,46^2 \cdot 3}{9,35} \leq \sigma^2 \leq \frac{1,46^2 \cdot 3}{0,22}\right) = 95\% \quad \Rightarrow \quad P(0,68''^2 \leq \sigma^2 \leq 29,07''^2) = 95\%$$

Extraíndo-se a raiz tem-se o intervalo de confiança para o desvio padrão da média populacional

$$P(0,83'' \leq \sigma \leq 5,39'') = 95\%$$

## **5.2. Ajustamento de observações indiretas**

As observações são classificadas como diretas, indiretas e diretas condicionadas. As diretas, como visto no item anterior, são ajustadas usando-se a média aritmética, ou ponderada, em função dos dados serem de igual ou desigual confiança.

As indiretas envolvem um modelo matemático que relaciona o que foi medido com o que se quer determinar. Como exemplo pode-se medir um azimute e uma distância para obter-se a coordenada de um ponto.

As diretas condicionadas utilizam uma equação de condição ligando todas as medidas. Como exemplo pode-se afirmar que a soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Se ao montarmos o sistema de equações que descreve observações indiretas for possível isolar pela igualdade os valores incógnitos (parâmetros) dos valores observados, resolve-se pelo método paramétrico.

$$F(Xa) = La$$

Entretanto, se no sistema de equações não for possível isolar os parâmetros dos valores observados, a solução é dada pelo método combinado.

$$F(Xa, La) = 0$$

Finalmente, se as observações forem do tipo diretas condicionadas, a solução é dada pelo método correlato e, neste caso, só estarão envolvidas observações.

$$F(La) = 0$$

### **5.2.1. Método Paramétrico**

As equações que relacionam os valores medidos com os incógnitos, também denominados parâmetros, são conhecidas como equações de observação. A característica delas é que se pode separar observação de incógnita.

$$F(Xa) = La$$

Onde  $F(Xa)$  é uma função que envolve as incógnitas (parâmetros) e  $La$  as observações ajustadas, ou seja essa equação relaciona aquilo que se está procurando com a variável medida.

fazendo  $Xa = Xo + X$

$$La = Lb + V$$

onde :  $Xa$  - parâmetros incógnitos ajustados

$Xo$  - parâmetros aproximados

$X$  - correções aos parâmetros aproximados

$La$  - valores observados ajustados

$Lb$  - valores observados

$V$  - correções aos valores observados (resíduos)

Então  $F(Xo + X) = Lb + V$

O primeiro termo da igualdade normalmente é uma função do tipo não linear, portanto a sua linearização é feita por Taylor:

$$F(Xo) + \left. \frac{\partial F}{\partial Xa} \right|_{xa=x0} \cdot X = Lb + V$$

fazendo  $Lo = F(Xo)$  e  $A = \left. \frac{\partial F}{\partial Xa} \right|_{xa=x0}$  vem:

$$Lo + AX = Lb + V \Rightarrow AX + Lo - Lb = V$$

fazendo  $L = Lo - Lb$

Finalmente  $AX + L = V$

que é a equação linearizada no método paramétrico.

Aplicando o método dos mínimos quadrados nesta última equação

$$\phi = V^T P V = (AX + L)^T P (AX + L) = \min$$

Derivando essa equação e igualando a zero encontra-se um ponto de mínimo.

Esse procedimento já foi realizado de forma análoga no item sobre o M.M.Q. Assim:

$$X = - (A^T P A)^{-1} (A^T P L)$$

Fazendo  $N = (A^T P A)$  e  $U = (A^T P L)$

$$X = - N^{-1} U \Leftrightarrow Xa = Xo + X$$

Que é a solução de M.M.Q. para o método paramétrico.

### 5.2.1.1. Qualidade do ajustamento.

Após o ajustamento é preciso verificar a qualidade dos resultados. No método dos mínimos quadrados aplica-se um teste de hipótese para verificar se estatisticamente o *sigma a priori* ( $\sigma_0^2$ ), valor teórico normalmente igual a 1, é "igual" ao *sigma a posteriori* ( $\hat{\sigma}_0^2$ ), valor calculado.

O valor do *sigma a posteriori* é calculado pela seguinte equação

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{GL}$$

- onde :
- V - vetor dos resíduos
  - P - matriz dos pesos
  - $GL = n - u$  - Graus de liberdade<sup>5</sup>
  - n - número de observações ou equações superabundantes
  - u - número de parâmetros incógnitos

A matriz peso normalmente é definida como sendo a inversa da matriz variância-covariância das observações vezes o fator *sigma a priori*.

$$P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_{Lb}^{-1}$$

Para se comparar o *sigma a priori* ( $\sigma_0^2$ ) com o *sigma a posteriori* ( $\hat{\sigma}_0^2$ ) utiliza-se um teste de hipótese que pode ser bicaudal ou unicaudal. No teste bicaudal, a hipótese básica (Ho) define que estatisticamente *sigma a priori* é igual ao *sigma a posteriori*, contra a hipótese alternativa (H1) que *sigma a priori* é diferente do *sigma a posteriori*.

No caso do teste unicaudal, a hipótese básica (Ho) define que estatisticamente *sigma a priori* é igual ao *sigma a posteriori*, contra a hipótese alternativa (H1) que *sigma a priori* é maior que o *sigma a posteriori*.

| Hipótese | BICAUDAL                           | UNICAUDAL                       |
|----------|------------------------------------|---------------------------------|
| Ho :     | $\sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$    | $\sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$ |
| H1 :     | $\sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$ | $\sigma_0^2 > \hat{\sigma}_0^2$ |

---

<sup>5</sup> No caso de sistemas de equações, os graus de liberdade são determinados pelo número de equações a mais que as incógnitas de um problema.

Para fazer essas comparações utiliza-se a distribuição de qui-quadrado ( $\chi^2$ ) onde se define valores teóricos, formando um intervalo onde  $H_0$  é válida, no caso da bicaudal, ou apenas, um único valor teórico, no caso da unicaudal (figura 11).

Esses valores teóricos são definidos a partir do nível de significância ( $\alpha$ ) e dos grau de liberdade ( $GL = n - u$ ).

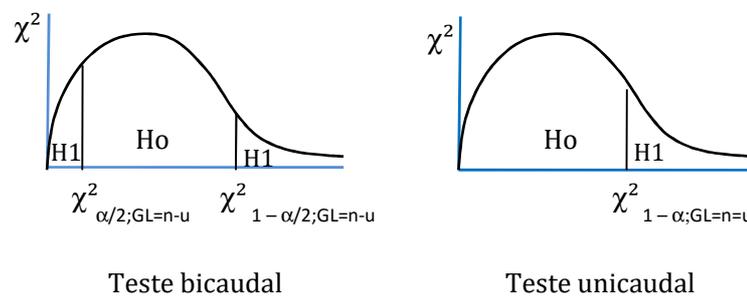


Figura 11 – Teste de hipótese com a distribuição  $\chi^2$ . Caso bicaudal e unicaudal.

A partir do estabelecimento dos limites calcula-se um qui-quadrado amostral pela seguinte expressão:

$$\hat{\chi}^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} GL = V^T P V \quad \Rightarrow \quad \text{considerando que } \sigma_0^2 = 1;$$

Para a hipótese  $H_0$  ser considerada válida esse valor calculado deve estar na área de aceitação, como mostra a figura 11, ou seja:

$$P(\chi_{\alpha/2; GL}^2 \leq \hat{\chi}^2 \leq \chi_{1-\alpha/2; GL}^2) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{caso bicaudal}$$

$$P(\hat{\chi}^2 \leq \chi_{1-\alpha; GL}^2) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{caso unicaudal}$$

Se a hipótese  $H_0$  for considerada válida o ajustamento não apresenta problemas e a qualidade dele está atestada.

No caso da hipótese alternativa H1 ser válida, o ajustamento apresenta problemas que podem ter como causa:

- a) modelo matemático inadequado;
- b) modelo estocástico inadequado ao se superestimar as observações e gerando uma matriz dos pesos com valores muito grandes;
- c) presença de erros grosseiros na amostra, o que afeta os valores dos resíduos;

Embora existam as duas possibilidades de teste (uni e bicaudal), utiliza-se o unicaudal para testar a qualidade do ajustamento.

#### **5.2.1.2. Matriz variância covariância dos parâmetros, das observações e dos resíduos**

Neste método a matriz variância-covariância dos parâmetros é obtida diretamente da matriz normal invertida ( $N^{-1}$ ) mais um fator de variância da unidade de peso *a posteriori*. ( $\hat{\sigma}_0^2$ )

$$\sum Xa = \hat{\sigma}_0^2 \cdot N^{-1}$$

A matriz variância-covariância dos valores ajustados é obtida pela seguinte equação:

$$\sum La = \hat{\sigma}_0^2 \cdot A \cdot N^{-1} \cdot A^T$$

e a matriz variância-covariância dos resíduos por:

$$\sum V = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A \cdot N^{-1} \cdot A^T - P^{-1})$$

### **5.2.1.3. Sequência prática de cálculo**

Quando se pretende ajustar pelo método paramétrico existe uma sequência de procedimentos que facilitam o cálculo.

**1º Passo** – Define-se o modelo matemático que liga parâmetros com observações;

**2º Passo** – A partir da matriz variância-covariância das observações, se estabelece a matriz dos pesos;

**3º Passo** – Atribuem-se valores aproximados aos parâmetros incógnitos gerando o vetor  $X_0$ ;

**4º Passo** – Calcula-se o vetor  $L = L_0 - L_b$ . O vetor  $L_0$  é obtido substituindo-se nas equações de observação os parâmetros por seus valores aproximados e o vetor  $L_b$  é montado com as observações.

**5º Passo** – Gera-se a matriz dos coeficientes ( $A$ ). Se o modelo é não linear é necessário derivar as equações de observação em relação aos parâmetros e substituir nestas derivadas, os parâmetros por valores aproximados;

**6º Passo** – Calculam-se as matrizes  $N = A^T P A$  (matriz normal) e a matriz  $U = A^T P L$ ;

**7º Passo** – Inverte-se a matriz normal ( $N^{-1}$ );

**8º Passo** – Calcula-se o vetor de correção aos parâmetros aproximados  $X = - N^{-1} U$ ;

**9º Passo** – Calculam-se os parâmetros ajustados ( $X_a$ ) e retorna-se ao quarto passo no caso de modelo não linear, fazendo  $X_0 = X_a$ . Procede-se desta forma até que o vetor das correções ( $X$ ) tenda a um valor que se considere igual a zero.

**10º Passo** – Encerrado o processo de iteração, calcula-se o valor das observações ajustadas substituindo-se os parâmetros ajustados nas equações de observação.

$$L_a = F(X_a)$$

**11º Passo** – Calcula-se o vetor dos resíduos fazendo a diferença entre os valores observados ajustados e os observados.  $V = L_a - L_b$  ou aplicando-se a equação matricial  $AX + L = V$ ;

**12º Passo** – Calcula-se o valor de sigma a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{GL}$$

**13º Passo** – Aplica-se o teste de hipótese. Se o teste for bem sucedido calculam-se as matrizes variância-covariância dos parâmetros, dos valores observados e dos resíduos. Caso contrário, se analisam os dados para procurar inadequações no modelo matemático e/ou estocástico ou erros grosseiros nos dados.

Esta sequência de cálculo não precisa ser seguida exatamente nesta ordem, mas, ela privilegia uma lógica no cálculo.

Exemplo 8 - A partir de quatro marcos com coordenadas conhecidas foi medida a distância a um ponto central. Calcule as coordenadas desse ponto, ajuste as distâncias observadas e determine a precisão dos valores ajustados.

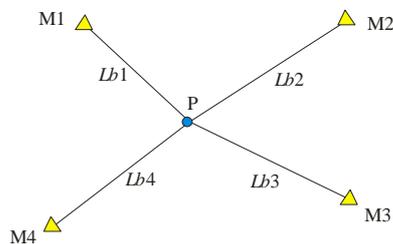


Figura 12 – Croqui ilustrativo do problema.

| Marco | X (m)    | Y (m)   |
|-------|----------|---------|
| M1    | 842,281  | 925,523 |
| M2    | 1337,554 | 996,249 |
| M3    | 1831,727 | 723,962 |
| M4    | 840,408  | 658,345 |

#### Caderneta de Campo

| n | Lbi (Distâncias) | Precisões ( $\sigma$ ) |
|---|------------------|------------------------|
| 1 | 244,512 m        | $\pm 0,012$ m          |
| 2 | 321,570 m        | $\pm 0,016$ m          |
| 3 | 773,154 m        | $\pm 0,038$ m          |
| 4 | 279,992 m        | $\pm 0,014$ m          |

## IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

### 1º Passo – Modelo matemático

Inicialmente devemos levar em conta que os parâmetros procurados são as coordenadas do ponto central P, que foram observadas distâncias e finalmente, que se conhecem as coordenadas dos marcos. Então a equação que envolve todos esses valores é a equação da reta, ou seja:

$$La_i = \sqrt{(xm_i - xp_a)^2 + (ym_i - yp_a)^2}$$

$i = 1,4$

- onde :
- $xm_i, ym_i$  - são as coordenadas dos quatro marcos
  - $xp_a, yp_a$  - são as coordenadas do ponto P ( parâmetros incógnitos) ajustadas
  - $La_i$  - são as distâncias observadas ajustadas

Observa-se que neste modelo os parâmetros estão de um lado da igualdade e as observações do outro.

### 2º Passo – Matriz dos Pesos

A matriz dos pesos e formada pela matriz inversa da variância-covariância das observações. As observações não são correlacionadas. Então:

$$\Sigma L_b = \begin{bmatrix} (0,012)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0,016)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0,038)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0,014)^2 \end{bmatrix} m^2$$
$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{(0,012)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(0,016)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(0,038)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(0,014)^2} \end{bmatrix}$$

Obs.: embora a matriz variância-covariâncias das observações possua unidade ( $m^2$ ) a matriz dos pesos é adimensional.

### 3º Passo – Atribuição de valores aproximados aos parâmetros.

Pode-se utilizar vários critérios para se estabelecer um valor inicial, como por exemplo, obter o valor médio entre os quatros marcos, ou ainda, escolher arbitrariamente um valor. Independentemente do valor escolhido, após algumas iterações, os parâmetros convergem para uma única resposta. Adotando, para efeito de exemplo, os valores da penúltima iteração como valores iniciais aproximados.

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1065,2 \text{ m} \\ 825,2 \text{ m} \end{bmatrix}$$

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

*AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO*

**4º Passo** – Cálculo do valor L

$$L = L_o - L_b \quad e \quad L_o = F(X_o)$$

$$L_o = \begin{bmatrix} \sqrt{(842,281 - 1065,2)^2 + (925,523 - 825,2)^2} \\ \sqrt{(1337,544 - 1065,2)^2 + (996,249 - 825,2)^2} \\ \sqrt{(1831,727 - 1065,2)^2 + (723,962 - 825,2)^2} \\ \sqrt{(840,408 - 1065,2)^2 + (658,345 - 825,2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 244,45365m \\ 321,60382m \\ 773,18353m \\ 279,95006m \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 244,45365 \\ 321,60382 \\ 773,18353 \\ 279,95006 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 244,512 \\ 321,570 \\ 773,154 \\ 279,992 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,05835m \\ 0,03382m \\ 0,02953m \\ -0,04194m \end{bmatrix}$$

**5º Passo** – Matriz dos coeficientes (A)

O modelo matemático é do tipo não linear. Deste modo é necessário se determinar as equações derivadas da função em relação a xp e yp e substituir nelas os parâmetros aproximados.

$$La_i = \sqrt{(xm_i - xp_a)^2 + (ym_i - yp_a)^2}$$

$$\frac{\partial F(La_1)}{\partial xp} = -\frac{xm_1 - xp}{Lo_1} = 0,911907$$

$$\frac{\partial F(La_1)}{\partial yp} = -\frac{ym_1 - yp}{Lo_1} = -0,410397$$

$$\frac{\partial F(La_2)}{\partial xp} = -\frac{xm_2 - xp}{Lo_2} = -0,846831$$

$$\frac{\partial F(La_2)}{\partial yp} = -\frac{ym_2 - yp}{Lo_2} = -0,531862$$

$$\frac{\partial F(La_3)}{\partial xp} = -\frac{xm_3 - xp}{Lo_3} = -0,991391$$

$$\frac{\partial F(La_3)}{\partial yp} = -\frac{ym_3 - yp}{Lo_3} = 0,130937$$

$$\frac{\partial F(La_4)}{\partial xp} = -\frac{xm_4 - xp}{Lo_4} = 0,802972$$

$$\frac{\partial F(La_4)}{\partial yp} = -\frac{ym_4 - yp}{Lo_4} = 0,596017$$

Colocando estes resultados na matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0,911907 & -0,410397 \\ -0,846831 & -0,531862 \\ -0,991391 & 0,130937 \\ 0,802972 & 0,596017 \end{bmatrix}$$

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

*AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO*

**6º Passo** – Cálculo da matriz N (normal) e da matriz U

$$N = A^T P A \quad e \quad U = A^T P L$$

$$N = \begin{bmatrix} 0,911907 & -0,846831 & -0,991391 & 0,802972 \\ -0,410397 & -0,531862 & 0,130937 & 0,596017 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6.944,44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.906,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 692,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.102,04 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,911907 & -0,410397 \\ -0,846831 & -0,531862 \\ -0,991391 & 0,130937 \\ 0,802972 & 0,596017 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 12.546,340 & 3 & 1.512,3141 \\ 1.512,3141 & 4.098,9158 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0,911907 & -0,846831 & -0,991391 & 0,802972 \\ -0,410397 & -0,531862 & 0,130937 & 0,596017 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6.944,44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.906,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 692,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.102,04 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,05835 \\ 0,03382 \\ 0,02953 \\ -0,04194 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -673,5104 \\ -28,8255 \end{bmatrix}$$

**7º Passo** – Cálculo da matriz inversa de N

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0,083414 & -0,03078 \\ -0,03078 & 0,25532 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

**8º Passo** – Vetor de correção aos parâmetros.

$$X = -N^{-1}U \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0,055294 \\ -0,013371 \end{bmatrix}$$

## IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

**9º Passo** – Parâmetros ajustados.

$$X_a = \begin{bmatrix} 1.065,2m \\ 825,2m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,055294 m \\ -0,013371 m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.065,2553 m \\ 825,1866m \end{bmatrix}$$

Voltando com esses valores no 4º Passo fazendo  $X_o = X_a$ , obtem-se

$$X = \begin{bmatrix} 0,000000 \\ -0,000002 \end{bmatrix}$$

Este vetor de correção pode ser considerado igual a zero e, portanto chegou-se ao valor ajustado para as coordenadas do ponto P.

$$X_a = \begin{bmatrix} 1.065,2553 m \\ 825,1866 m \end{bmatrix}$$

**10º Passo** – Cálculo dos valores observados ajustados

$$L_a = \begin{bmatrix} \sqrt{(842,281 - 1.065,2553)^2 + (925,523 - 825,1866)^2} \\ \sqrt{(1337,544 - 1.065,2553)^2 + (996,249 - 825,1866)^2} \\ \sqrt{(1831,727 - 1.065,2553)^2 + (723,962 - 825,1866)^2} \\ \sqrt{(840,408 - 1.065,2553)^2 + (658,345 - 825,1866)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 244,50956m \\ 321,56411m \\ 773,12696m \\ 279,98649m \end{bmatrix}$$

**11º Passo** – Cálculo dos resíduos

$$V = L_a - L_b \Rightarrow V = \begin{bmatrix} 244,50956m \\ 321,56411m \\ 773,12696m \\ 279,98649m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 244,512m \\ 321,570m \\ 773,154m \\ 279,992m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0024m \\ -0,0059m \\ -0,0270m \\ -0,0055m \end{bmatrix}$$

**12º Passo** – Cálculo do sigma a posteriori.

$$V^T PV = 0,8383 \Rightarrow \hat{\sigma}_0^2 = \frac{0,8383}{4-2} = 0,4191$$

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

**AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO**

**13º Passo – Teste de Hipótese**

Embora exista o teste bicaudal, alguns autores entendem que o unicaudal é mais representativo e por essa razão ele será empregado nesse exercício.

|                       |                          |   |                                 |
|-----------------------|--------------------------|---|---------------------------------|
| Hipótese básica       | Ho:                      | ⇒ | $\sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$ |
| Hipótese alternativa  | H1:                      | ⇒ | $\sigma_0^2 > \hat{\sigma}_0^2$ |
| qui-quadrado amostral | $\hat{\chi}^2 = V^T P V$ |   |                                 |

$$\hat{\chi}^2 = 0,8383$$

Determinação do  $\chi^2$  teórico.

Considerando  $\alpha = 10\%$  de nível de significância  $\Rightarrow 1 - \alpha = 90\%$

$$GL = n - u = 4 - 2 = 2 \text{ (graus de liberdade)}$$

Da tabela de  $\chi^2$  obtém-se :  $\chi^2_{0,90;2} = 4,61$

$$P(0,8383 < 4,61) = 90\%$$

Como o qui-quadrado amostral é menor que o teórico, então a hipótese  $H_0$  é considerada válida, e neste caso considera-se que o ajustamento não apresenta problemas.

**14º Passo – Cálculo das matrizes variância-covariância**

$$\sum Xa = \hat{\sigma}_0^2 \cdot N^{-1} \Rightarrow \sum Xa = \begin{bmatrix} 0,00003496 & -0,00001290 \\ -0,00001290 & 0,00010703 \end{bmatrix} m^2$$

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

*AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO*

$$\sum La = \hat{\sigma}_0^2 \cdot A \cdot N^{-1} \cdot A^T$$

$$\sum V = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A \cdot N^{-1} \cdot A^T - P^{-1})$$

$$\sum L_a = \begin{bmatrix} 56,753 & -1,856 & -44,147 & -3,328 \\ -1,856 & 43,732 & 16,520 & -45,680 \\ -44,147 & 16,520 & 39,546 & -13,218 \\ -3,328 & -45,680 & -13,218 & 48,203 \end{bmatrix} \times 10^{-6} m^2$$

$$\sum V = \begin{bmatrix} 3,602 & 1,856 & 44,147 & 3,328 \\ 1,856 & 63,566 & -16,520 & 45,680 \\ 44,147 & -16,520 & 565,684 & 13,218 \\ 3,328 & 45,680 & 13,218 & 33,947 \end{bmatrix} \times 10^{-6} m^2$$

A partir destes resultados monta-se uma tabela resumo:

| n | Distância medidas (m) | $\pm \sigma$ (m) | Distância ajustadas (m) | $\pm \sigma$ (m) |
|---|-----------------------|------------------|-------------------------|------------------|
| 1 | 244,512               | 0,012            | 244,50956               | 0,008            |
| 2 | 321,570               | 0,016            | 321,56411               | 0,007            |
| 3 | 773,154               | 0,038            | 773,12696               | 0,006            |
| 4 | 279,992               | 0,014            | 279,98649               | 0,007            |

|    | Coordenadas (m) | $\pm \sigma$ (m) |
|----|-----------------|------------------|
| xp | 1.065,2553      | 0,006            |
| yp | 825,1866        | 0,010            |

$$\rho_{xpyy} = -21,09 \%$$

A partir desse exemplo, observa-se que a grande diferença entre um processo de compensação, comum em topografia, com o de mínimos quadrados, é que no segundo, além de se ter a coordenadas ajustadas, tem-se também a estimativa de precisão dos valores envolvidos.

### 5.3. Ajustamento de observações diretas condicionadas

As observações diretas condicionadas são aquelas onde as observações são obtidas diretamente com um mensurador de mesma natureza que a grandeza procurada e se relacionam através de uma equação ou função de condição. Neste caso a solução de mínimos quadrados é dada pelo método conhecido como Correlatos ou das equações de condição.

#### 5.3.1. Método dos Correlatos

O modelo matemático do método dos correlatos ou das equações de condição envolve apenas os valores observados e é dado por:

$$F(La) = 0 \quad \text{e} \quad La = Lb + V$$

onde :  $La$  - valores observados ajustados

$Lb$  - valores observados

$V$  - correções aos valores observados (resíduos)

Aplicando a equação no modelo, vem

$$F(Lb + V) = 0$$

Fazendo-se uma linearização por Taylor, obtém-se

$$F(La) = F(Lb + V) \cong F(Lb) + \left. \frac{\partial F}{\partial La} \right|_{Lb} \cdot V = 0$$

chamando por  $W = F(Lb)$  e  $B = \left. \frac{\partial F}{\partial La} \right|_{Lb}$

onde :  $W$  - que corresponde a um vetor erro de fechamento;

$B$  - a matriz das derivadas parciais das equações de condição em relação as observações.

$$BV + W = 0$$

Equação linearizada correspondente ao modelo dos correlatos ou das equações de condição.

Aplicando o princípio do método dos mínimos quadrados ao modelo, vem:

$$\phi = V^T P V - 2K^T (BV + W) = \min$$

- onde :
- $V$  - correções aos valores observados (resíduos)
  - $P$  - matriz dos pesos
  - $K$  - vetor dos multiplicadores de Lagrange ou dos correlatos
  - $B$  - matriz das derivadas parciais
  - $W$  - vetor erro de fechamento

Derivando a equação acima parcialmente em relação aos resíduos e aos multiplicadores de Lagrange e igualando a zero as duas equações resultantes, tem-se :

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} = 2PV - 2K^T B = 0 \quad \text{mas} \quad K^T B \equiv B^T K \quad \therefore PV - B^T K = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial K} = -2(BV + W) = 0 \quad \Rightarrow \quad BV + W = 0 \quad (2)$$

isolando V na equação (1)

$$V = P^{-1} B^T K$$

e substituindo na (2), vem:

$$K = -(BP^{-1}B^T)^{-1}W \quad \text{fazendo} \quad M = (BP^{-1}B^T) \quad \Rightarrow \quad K = -M^{-1}W$$

### **5.3.1.1. Sequência prática de cálculo**

Para ajustar pelo método correlato existe uma sequência de procedimentos que facilitam o cálculo.

**1º Passo** – Define-se o modelo matemático, ou seja, as equações de condição;

$$F(La) = 0$$

**2º Passo** – A partir da matriz variância-covariância das observações, se estabelece a matriz dos pesos;

$$P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_{Lb}^{-1}$$

**3º Passo** – Calcula-se o vetor erro de fechamento (W) substituindo-se os valores observados nas equações de condição;

$$W = F(Lb)$$

**4º Passo** – Calcula-se a matriz das derivadas parciais das equações de condição em relação às observações;

$$B = \left. \frac{\partial F}{\partial La} \right|_{Lb}$$

**5º Passo** – Calcula-se o vetor dos multiplicadores de Lagrange ou dos correlatos;

$$K = -M^{-1}W \quad \text{com} \quad M = (BP^{-1}B^T)$$

**6º Passo** – Calcula-se o vetor dos resíduos;

$$V = P^{-1}B^T K$$

**7º Passo** – Calcula-se o vetor dos valores observados ajustados;

$$La = Lb + V$$

**8º Passo** – Calcula-se o sigma a posteriori e se procede ao teste de qualidade

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{GL} = \frac{-K^T W}{r}$$

onde : r – número de equações de condição ou graus de liberdade do problema

A qualidade do ajustamento é feita com a aplicação do mesmo teste de hipótese utilizado no método paramétrico.

**9º Passo** – Calcula-se a matriz variância covariância das observações ajustadas e dos resíduos. As equações matriciais são as seguintes:

$$\sum L_a = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1})$$

$$\sum V = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1})$$

### 5.3.2. Método dos Correlatos com Iterações.

Quando a equação de condição não é um modelo linear é preciso utilizar iterações no ajustamento. Ao contrário do método paramétrico onde a iteração era feita simplesmente adotando o valor ajustado em uma iteração como o valor aproximado para a próxima até que a correção aos parâmetros iniciais tenda a zero, no método correlato o processo é diferente. Sem entrar em detalhes, a seguir é apresentada a sequência de cálculos e a forma de controle.

**1º Passo** – Define-se o modelo matemático, ou seja, as equações de condição;

$$F(La) = 0$$

**2º Passo** – A partir da matriz variância-covariância das observações, se estabelece a matriz dos pesos;

$$P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_{Lb}^{-1}$$

**3º Passo** – cria-se uma vetor  $L_0$  que na 1ª etapa de cálculo é igual a  $Lb$ ;

$$L_{0i} = Lb$$

**4º Passo** – calcula-se a matriz B substituindo os valores observados por  $L_{0i}$ , onde  $i$  representa a iteração;

$$B_i = \left. \frac{\partial F}{\partial La} \right|_{L_{0i}}$$

**5º Passo** – calcula-se o vetor  $W$  pela seguinte fórmula:

$$W_i = B_i(Lb - Lo_i) + F(Lo_i)$$

observa-se que na 1ª etapa  $(Lb - Lo_i) = 0$ .

**6º Passo** – calcula-se a matriz  $M$  e os vetores  $K$  e  $V$ :

$$M_i = (B_i P^{-1} B_i^T); \quad K_i = -M_i^{-1} W_i; \quad V_i = P^{-1} B_i^T K_i$$

**7º Passo** – calcula-se o vetor das observações ajustadas:

$$La_i = Lb + V_i$$

**8º Passo** – Na 1ª iteração iguala-se o vetor  $Lo$  com o vetor das observações ajustadas  $La_i$  da 1ª etapa e retorna-se ao 4º passo. Como no método correlato, não existe um parâmetro que deve se aproximar de zero, este processo é repetido até que a forma quadrática fundamental estabilize ( $V^T P V$ ). Então, a cada iteração se testa o valor dos resíduos calculados com os da etapa anterior até que:

$$V_{i+1} \cong V_i \quad \text{ou} \quad (V_{i+1} - V_i) \rightarrow 0$$

**9º Passo** – calcula-se o sigma a posteriori ( $\hat{\sigma}_0^2$ ) e se realiza o teste de qualidade.

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{GL}$$

**10º Passo** – calculam-se as matrizes variâncias-covariâncias das observações ajustadas e dos resíduos.

$$\sum L_a = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1})$$

$$\sum V = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1})$$

Exemplo 9 - Ajustar a rede de nivelamento geométrico dado, pelo método das equações de condição (correlato). Tolerância altimétrica (diferença entre o nivelamento e o contranivelamento) adotada:  $T = 30mm\sqrt{K}$ , sendo K distância em quilômetros.

| Linha | $\Delta h$ (m) | Dist. (km) |
|-------|----------------|------------|
| 1     | 6,16           | 4,5        |
| 2     | 12,57          | 2,0        |
| 3     | 6,41           | 1,8        |
| 4     | 1,09           | 4,0        |
| 5     | 11,58          | 2,2        |
| 6     | 5,07           | 4,5        |

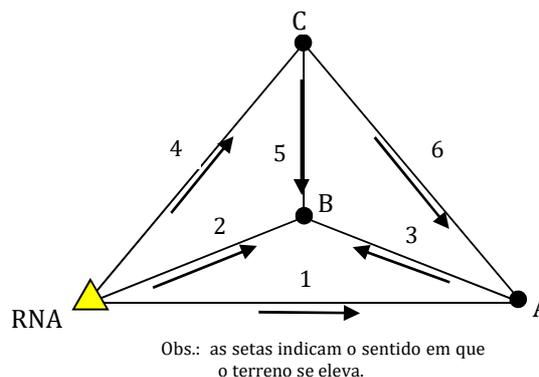


Figura 13 - Nivelamento geométrico  
Croqui ilustrativo do problema.

### 1º - Modelo Matemático

Para se determinar o número de equações independentes é necessário calcular  $r = GL = n - u$ . Embora não se esteja procurando valores incógnitos, ao analisar o croqui da figura 13, percebe-se que as altitudes dos pontos A, B e C são desconhecidas, então:

$$n = 6 \text{ e } u = 3 \quad r = 6 - 3 = 3$$

Da figura 13 se extrai três circuitos diferentes que corresponde a três equações de condição. Considerando que todas as vezes que o sentido de caminhamento for contrário à seta (elevação do terreno) adota-se o sinal negativo na equação, vem:

$$Lb_1 - Lb_2 + Lb_3 = 0$$

$$Lb_2 - Lb_4 - Lb_5 = 0 \quad \text{que são as equações de condição e são do tipo linear, sem iterações.}$$

$$Lb_3 - Lb_5 + Lb_6 = 0$$

**2º - Vetor das observações (Lb) e dos erros de fechamento (W)**

$$Lb = \begin{bmatrix} 6,16 \\ 12,57 \\ 6,41 \\ 1,09 \\ 11,58 \\ 5,07 \end{bmatrix} \quad W = F(Lb) = \begin{bmatrix} 6,16 - 12,57 + 6,41 \\ 12,57 - 1,09 - 11,58 \\ 6,41 - 11,58 + 5,07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ -0,10 \\ -0,10 \end{bmatrix}$$

**3º - Matriz das derivadas parciais (B) e dos Pesos (P)**

$$B = \frac{\partial F(La)}{\partial La} \Big|_{Lb} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

No caso de nivelamentos geométricos o fator que influencia na precisão é o número de seções que compõe uma linha ou circuito nivelado. Então, costuma-se usar como fator de peso, o inverso da distância de cada circuito. Esse procedimento acaba criando um modelo estocástico inadequado porque não reflete a precisão do nivelamento. Uma forma de se contornar o problema é utilizar a tolerância altimétrica como fator de precisão, ou seja:

$$\sigma = T = 30mm\sqrt{K}$$

Quadrando-se estes valores têm-se as variâncias de cada circuito. Como as observações são não correlacionadas, a matriz dos pesos só terá valores na diagonal principal.

No método correlato necessita-se do peso invertido. Neste caso será gerada a matriz inversa diretamente. No caso de matrizes diagonais, basta inverter os valores da diagonal. Então a matriz invertida de P recebe os seguintes valores:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0,00405 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00180 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,00360 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,00198 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,00405 \end{bmatrix}$$

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

*AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO*

**4º - Cálculo da Matriz M e dos vetores dos coeficientes de Lagrange (K), dos resíduos (V) e dos valores observados (La)**

$$M = BP^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 0,00747 & -0,0018 & 0,00162 \\ -0,0018 & 0,00738 & 0,00198 \\ 0,00162 & 0,00198 & 0,0765 \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 156,0121 & 50,4165 & -46,0868 \\ 50,4165 & 161,9052 & -52,5813 \\ -46,0868 & -52,5813 & 154,0878 \end{bmatrix}$$

$$K = -M^{-1}W = \begin{bmatrix} 0,4330 \\ 10,9324 \\ 10,1506 \end{bmatrix} \quad V = P^{-1}B^TK = \begin{bmatrix} 0,0018 \\ 0,0189 \\ 0,0171 \\ -0,0394 \\ -0,0417 \\ 0,0411 \end{bmatrix} \quad La = Lb + V = \begin{bmatrix} 6,162 \\ 12,589 \\ 6,427 \\ 1,051 \\ 11,538 \\ 5,111 \end{bmatrix}$$

**5º - Cálculo de sigma a posteriori ( $\hat{\sigma}_0^2$ ) e teste de qualidade**

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{-K^TW}{r} = \frac{2,108}{3} = 0,703$$

Calculando o qui-quadrado amostral para o problema  $\Rightarrow \hat{\chi}^2 = -K^TW = 2,108$

Considerando  $\alpha = 10\%$  de nível de significância  $\Rightarrow 1 - \alpha = 90\%$

$GL = n - u = 6 - 3 = 3$  (graus de liberdade)

Da tabela de  $\chi^2$  obtém-se :  $\chi^2_{0,90;3} = 6,25$

$$P(2,108 < 6,25) = 90\%$$

Como o qui-quadrado amostral é menor que o teórico, então a hipótese  $H_0$  é considerada válida, e neste caso considera-se que o ajustamento não apresenta problemas.

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

*AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO*

**6º -Matriz variância-covariância dos valores observados ajustados ( $\Sigma La$ ) e dos resíduos ( $\Sigma V$ )**

$$\sum La = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} P^{-1}) = \frac{1}{10000} \begin{bmatrix} 10,48 & 5,41 & -5,07 & 5,17 & 0,24 & 5,31 \\ 5,41 & 7,71 & 2,30 & 5,08 & 2,63 & 0,33 \\ -5,07 & 2,30 & 7,37 & -0,09 & 2,39 & -4,98 \\ 5,17 & 5,08 & -0,09 & 10,55 & -5,48 & -5,39 \\ 0,24 & 2,63 & 2,39 & -5,48 & 8,11 & 5,72 \\ 5,31 & 0,33 & -4,98 & -5,39 & 5,72 & 10,70 \end{bmatrix}$$

$$\sum V = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} B^T M^{-1} P^{-1}) = \frac{1}{10000} \begin{bmatrix} 17,98 & -5,41 & 5,07 & -5,17 & -0,24 & -5,31 \\ -5,41 & 4,94 & -2,30 & -5,08 & -2,63 & -0,33 \\ 5,07 & -2,30 & 4,02 & 0,09 & -2,39 & 4,98 \\ -5,17 & -5,08 & 0,09 & 14,75 & 5,48 & 5,39 \\ -0,24 & -2,63 & -2,39 & 5,48 & 5,81 & -5,72 \\ -5,31 & -0,33 & 4,98 & 5,39 & -5,72 & 17,76 \end{bmatrix}$$

A partir desta matriz obtêm-se as precisões dos valores observados ajustados

| Linha | $\Delta h_{\text{obs}}$ (m) | Dist. (km) | $\Delta h_{\text{ajust}}$ (m) | $\sigma_{\Delta h}$ (m) |
|-------|-----------------------------|------------|-------------------------------|-------------------------|
| 1     | 6,16                        | 4,5        | 6,162                         | $\pm 0,032$             |
| 2     | 12,57                       | 2,0        | 12,589                        | $\pm 0,028$             |
| 3     | 6,41                        | 1,8        | 6,427                         | $\pm 0,027$             |
| 4     | 1,09                        | 4,0        | 1,051                         | $\pm 0,032$             |
| 5     | 11,58                       | 2,2        | 11,538                        | $\pm 0,028$             |
| 6     | 5,07                        | 4,5        | 5,111                         | $\pm 0,033$             |

#### 5.4. Método Combinado

Quando não for possível explicitar as observações em função dos parâmetros a solução por M.M.Q. é dada pelo método Combinado, cuja equação de definição é a seguinte:

$$F(La, Xa) = 0$$

onde :  $La = Lb + V$  - valores observados ajustados

$Xa = Xo + X$  - parâmetros ajustados

$Lb$  - valores observados

$V$  - correções aos valores observados (resíduos)

$Xo$  - parâmetros iniciais

$X$  - correção aos parâmetros iniciais

Substituindo na equação do modelo, vem

$$F(Lb + V, Xo + X) = 0$$

Fazendo-se uma linearização por Taylor, obtém-se

$$F(La, Xa) = F(Lb + V, Xo + X) \cong F(Lb, Xo) + \left. \frac{\partial F}{\partial Xa} \right|_{Xo, Lb} \cdot (X) + \left. \frac{\partial F}{\partial Lb} \right|_{Xo, Lb} \cdot (V) = 0$$

chamando por  $W = F(Lb; Xo)$ ;  $A = \left. \frac{\partial F}{\partial Xa} \right|_{Xo, Lb}$  e  $B = \left. \frac{\partial F}{\partial La} \right|_{Xo, Lb}$

onde :  $W$  - calculado a partir dos valores observados e dos parâmetros iniciais aplicados no modelo matemático;

$A$  - matriz das derivadas parciais das equações de observação em relação aos parâmetros.

$B$  - matriz das derivadas parciais das equações de observação em relação às observações.

Chega-se a equação correspondente ao modelo Linearizado do método combinado.

$$AX + BV + W = 0$$

Aplicando o princípio do método dos mínimos quadrados ao modelo, vem:

$$\phi = V^T P V - 2K^T (AX + BV + W) = \min$$

onde : P - matriz dos pesos

K - vetor dos multiplicadores de Lagrange ou dos correlatos

Derivando a equação acima parcialmente em relação aos resíduos (V), aos multiplicadores de Lagrange (K) e as correções (X) e igualando a zero as três equações resultantes, tem-se :

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} = 2PV - 2K^T B = 0 \quad \text{mas} \quad K^T B \equiv B^T K$$

$$\therefore PV - B^T K = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial K} = -2(AX + BV + W) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AX + BV + W = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = -2A^T K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^T K = 0 \quad (3)$$

isolando V na equação (1)

$$V = P^{-1} B^T K$$

e substituindo na equação (2), vem:

$$AX + BP^{-1} B^T K + W = 0$$

Lembrando que  $M = BP^{-1}B^T$

$$AX + MK + W = 0$$

Isolando K

$$K = -M^{-1}(AX + W)$$

Substituindo em (3)

$$-A^T M^{-1}(AX + W) = 0 \Rightarrow -A^T M^{-1}AX - A^T M^{-1}W = 0$$

$\therefore$

$$X = -(A^T M^{-1}A)^{-1}(A^T M^{-1}W)$$

#### 5.4.1. Sequência prática de cálculo

Para ajustar pelo método combinado existe uma sequência de procedimentos que facilitam o cálculo.

**1º Passo** - Define-se o modelo matemático;

$$F(La, Xa) = 0$$

**2º Passo** - A partir da matriz variância-covariância das observações, se estabelece a matriz dos pesos;

$$P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_{Lb}^{-1}$$

**3º Passo** - atribuem-se valores aproximados aos parâmetros incógnitos gerando o vetor  $X_0$ ;

**4º Passo** - Calcula-se o vetor W substituindo-se os valores observados e parâmetros aproximados nas equações do modelo matemático;

$$W = F(Lb, X_0)$$

**5º Passo** - Calcula-se a matriz das derivadas parciais das equações do modelo matemático em relação aos parâmetros incógnitos e às observações;

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial Xa} \right|_{X_0; Lb} \quad B = \left. \frac{\partial F}{\partial La} \right|_{X_0; Lb}$$



### 5.4.2. Método Combinado com Iterações.

Quando a equação de condição não é um modelo linear é preciso utilizar iterações no ajustamento. No método combinado o controle de iterações é feita tanto pela forma quadrática ( $V^T P V$ ) que deve estabilizar, como pelo vetor das correções aos parâmetros iniciais que deve tender a zero. Novamente sem entrar em detalhes, a seguir é apresentada a seqüência de cálculos e a forma de controle.

**1º Passo** – Define-se o modelo matemático;

$$F(La, Xa) = 0$$

**2º Passo** – A partir da matriz variância-covariância das observações, se estabelece a matriz dos pesos;

$$P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_{Lb}^{-1}$$

**3º Passo** – cria-se uma vetor  $L_0$  que na 1ª etapa de cálculo é igual a  $Lb$  e define-se os parâmetros iniciais;

$$L_{0_1} = Lb \quad e \quad X_0$$

**4º Passo** – Calcula-se a matriz das derivadas parciais das equações do modelo matemático em relação aos parâmetros incógnitos e às observações, substituindo os valores observados por  $L_{0_i}$ , onde  $i$  representa a iteração;

$$A_i = \left. \frac{\partial F}{\partial Xa} \right|_{X_0; L_{0_i}} \quad B_i = \left. \frac{\partial F}{\partial La} \right|_{X_0; L_{0_i}}$$

**5º Passo** – calcula-se o vetor  $W$  pela seguinte fórmula:

$$W_i = B_i(Lb - L_{0_i}) + F(L_{0_i}, X_0)$$

observa-se que na 1ª etapa  $(Lb - L_{0_1}) = 0$ .

**6º Passo** – calcula-se o matriz  $M$  e o vetor das correções aos parâmetros iniciais  $X$ :

$$M_i = B_i P^{-1} B_i^T \quad ; \quad X_i = -\left(A_i^T M_i^{-1} A_i\right)^{-1} \left(A_i^T M_i^{-1} W_i\right)$$

**7º Passo** – calcula-se o vetor dos multiplicadores de Lagrange  $K$ :

$$K_i = -M_i^{-1}(A_i X_i + W_i);$$

**8º Passo** – calcula-se o vetor dos resíduos  $V$ :

$$V_i = P^{-1}B_i^T K_i$$

**9º Passo** – calcula-se os vetores dos parâmetros e das observações ajustadas:

$$Xa = Xo + X_i \quad ; \quad La_i = Lb + V_i$$

**10º Passo** – Na 1ª iteração iguala-se o vetor  $Lo$  com o vetor das observações ajustadas  $La_1$  da 1ª etapa, e o vetor dos parâmetros aproximados  $Xo$  com os parâmetros ajustados  $Xa_1$ . Retorna-se ao 4º passo e recalcula-se tudo. Este processo é repetido até que a forma quadrática estabilize ( $V^T P V$ ) e o vetor das correções aos parâmetros iniciais tenda a zero. Então, a cada iteração se testa o valor dos resíduos calculados com os da etapa anterior até que:

$$V_{i+1} \cong V_i \quad \text{ou} \quad (V_{i+1} - V_i) \rightarrow 0$$

e em seguida se  $X \rightarrow 0$  ou se é menor que um valor considerado “zero”.

**11º Passo** – calcula-se o sigma a posteriori ( $\hat{\sigma}_0^2$ ) e se realiza o teste de qualidade.

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{GL}$$

**12º Passo** – Se a qualidade foi atestada, calcula-se a matriz variância covariância dos parâmetros e das observações ajustadas e dos resíduos.

$$\sum Xa = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T M^{-1} A)^{-1}$$

$$\sum La = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} + P^{-1} B^T M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} B P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1})$$

$$\sum V = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} B P^{-1})$$

Exemplo 10 – Um agrimensor precisa medir a área coberta por um pivô central e só dispõe, no momento, de um GPS de Navegação. Uma solução possível seria a de se obter as coordenadas do centro e de um ponto na periferia do pivô e calcular o seu raio. Ocorre que a definição do centro não lhe pareceu algo simples e ele optou por determinar as coordenadas de 4 pontos não alinhados pertencentes ao contorno da área do pivô. Tendo as coordenadas e sabendo que a acurácia de um GPS de Navegação gira ao redor de 10 m, calcule a área do pivô central e estime a precisão dessa determinação.

| Ponto | E (m)   | N (m)     |
|-------|---------|-----------|
| 1     | 654.216 | 8.250.517 |
| 2     | 654.445 | 8.250.498 |
| 3     | 654.422 | 8.250.299 |
| 4     | 654.221 | 8.250.302 |

### 1º - Modelo Matemático

Para determinar a área do pivô é necessário se calcular o raio desse pivô. Então, é indispensável que se gere um modelo onde seja possível o cálculo dessa grandeza. Assim, pode-se usar a equação da circunferência que envolve as coordenadas medidas, as coordenadas do centro e o raio da circunferência.

Fazendo a coordenada E = x e N = y, vem:

$$(x_1 - x_c)^2 + (y_1 - Y_c)^2 - R^2 = 0 \quad \text{onde: } x_i, y_i - \text{coordenadas medidas (LB)}$$

$$(x_2 - x_c)^2 + (y_2 - Y_c)^2 - R^2 = 0 \quad x_c, Y_c - \text{coordenadas do centro (parâmetro)}$$

$$(x_3 - x_c)^2 + (y_3 - Y_c)^2 - R^2 = 0 \quad R - \text{raio do pivô (parâmetro)}$$

$$(x_4 - x_c)^2 + (y_4 - Y_c)^2 - R^2 = 0$$

Neste modelo se tem três incógnitas e quatro equações, o que nos dá 1 grau de liberdade, o que permite proceder ao ajustamento. Observa-se ainda, que incógnitas e observações, não podem ser separadas pelo sinal de igualdade e o modelo é do tipo não linear. Assim, o ajustamento é feito pelo método combinado com iterações.

$$F(Xa, La) = 0$$

## IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

### 2º - Cálculo da Matriz dos Pesos.

A matriz dos pesos é calculada multiplicando-se a matriz variância covariância das observações invertida pelo *sigma a priori*. Considerando que a acurácia de um GPS de navegação é de  $\pm 10m$  e que não se tem como saber da existência de tendência na presente situação, vamos assumir que este valor também é o da precisão. Decompondo esse valor nas componentes X e Y, assumidas como iguais:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\pm 10}{\sqrt{2}} = 7,07 \text{ m}$$

Elevando-se esse valor ao quadrado têm-se as variâncias das coordenadas x e y de todos os pontos

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 50 \text{ m}^2$$

Montando-se a matriz dos pesos e não esquecendo que *sigma a priori* é igual a 1:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{50} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{50} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{50} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{50} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{50} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{50} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{50} \end{bmatrix} \frac{1}{m^2}$$
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} m^2$$

### 3º - Parâmetros aproximados e vetor $Lo_1$

Existem várias formas de se escolher o parâmetro inicial. Vamos adotar a média das coordenadas observadas para determinar as coordenadas do ponto central e a distância do ponto 1 até esse, como raio inicial.

Procedendo-se aos cálculos chega-se a:

$$Xo = \begin{bmatrix} 654.326 \\ 8.250.404 \\ 157,8 \end{bmatrix}$$

O valor de  $Lo_1$  na 1ª etapa é igual ao valor de  $Lb$ , assim:

$$Lo_1 = Lb = \begin{bmatrix} 654.216 \\ 8.250.517 \\ 654.445 \\ 8.250.498 \\ 654.422 \\ 8.250.299 \\ 654.221 \\ 8.250.302 \end{bmatrix}$$

4º - Cálculo das Matrizes A e B

$$A_i = \left. \frac{\partial F}{\partial Xa} \right|_{x_0; L_0_i} \quad B_i = \left. \frac{\partial F}{\partial La} \right|_{x_0; L_0_i}$$

onde  $i$  corresponde ao número da iteração.

Derivando as equações do modelo em relação aos parâmetros  $x_c, y_c$  e  $R$  vem:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial F1}{\partial x_c} = -2 \times (x_1 - x_c) = 220,00 & \frac{\partial F1}{\partial y_c} = -2 \times (y_1 - y_c) = -226,00 & \frac{\partial F1}{\partial R} = -2 \times R = -315,60 \\ \frac{\partial F2}{\partial x_c} = -2 \times (x_2 - x_c) = -238,00 & \frac{\partial F2}{\partial y_c} = -2 \times (y_2 - y_c) = -188,00 & \frac{\partial F2}{\partial R} = -2 \times R = -315,60 \\ \frac{\partial F3}{\partial x_c} = -2 \times (x_3 - x_c) = -192,00 & \frac{\partial F3}{\partial y_c} = -2 \times (y_3 - y_c) = 210,00 & \frac{\partial F3}{\partial R} = -2 \times R = -315,60 \\ \frac{\partial F4}{\partial x_c} = -2 \times (x_4 - x_c) = 210,00 & \frac{\partial F4}{\partial y_c} = -2 \times (y_4 - y_c) = 204,00 & \frac{\partial F4}{\partial R} = -2 \times R = -315,60 \end{array}$$

e derivando em relação as observações  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$ , tem-se:

$$\begin{array}{lllllllll} \frac{\partial F1}{\partial x_1} = 2 \times (x_1 - x_c) = -220,00 & \frac{\partial F1}{\partial y_1} = 2 \times (y_1 - y_c) = 226,00 & \frac{\partial F1}{\partial x_2} = 0 & \frac{\partial F1}{\partial y_2} = 0 & \frac{\partial F1}{\partial x_3} = 0 & \frac{\partial F1}{\partial y_3} = 0 & \frac{\partial F1}{\partial x_4} = 0 & \frac{\partial F1}{\partial y_4} = 0 \\ \frac{\partial F2}{\partial x_2} = 2 \times (x_2 - x_c) = 238,00 & \frac{\partial F2}{\partial y_2} = 2 \times (y_2 - y_c) = 188,00 & \frac{\partial F2}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial F2}{\partial y_1} = 0 & \frac{\partial F2}{\partial x_3} = 0 & \frac{\partial F2}{\partial y_3} = 0 & \frac{\partial F2}{\partial x_4} = 0 & \frac{\partial F2}{\partial y_4} = 0 \\ \frac{\partial F3}{\partial x_3} = 2 \times (x_3 - x_c) = 192,00 & \frac{\partial F3}{\partial y_3} = 2 \times (y_3 - y_c) = -210,00 & \frac{\partial F3}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial F3}{\partial y_1} = 0 & \frac{\partial F3}{\partial x_2} = 0 & \frac{\partial F3}{\partial y_2} = 0 & \frac{\partial F3}{\partial x_4} = 0 & \frac{\partial F3}{\partial y_4} = 0 \\ \frac{\partial F4}{\partial x_4} = 2 \times (x_4 - x_c) = -210,00 & \frac{\partial F4}{\partial y_4} = 2 \times (y_4 - y_c) = -204,00 & \frac{\partial F4}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial F4}{\partial y_1} = 0 & \frac{\partial F4}{\partial x_2} = 0 & \frac{\partial F4}{\partial y_2} = 0 & \frac{\partial F4}{\partial x_3} = 0 & \frac{\partial F4}{\partial y_3} = 0 \end{array}$$

Arranjando esses valores nas respectivas matrizes, vem

$$A_1 = \begin{bmatrix} 220,00 & -226,00 & -315,60 \\ -238,00 & -188,00 & -315,60 \\ -192,00 & 210,00 & -315,60 \\ 210,00 & 204,00 & -315,60 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -220,00 & 226,00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 238,00 & 188,00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 192,00 & -210,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -210,00 & -204,00 \end{bmatrix}$$

**5º - Cálculo do vetor W**

Como o método é iterativo, a fórmula utilizada é a seguinte:

$$W_i = B_i(Lb - L_{o_i}) + F(L_{o_i}, X_{o_i})$$

onde  $i$  corresponde ao número da iteração

Na 1ª etapa de cálculo  $Lb = L_{o_1}$ , portanto  $W_1 = F(L_{o_1}, X_{o_1})$

$$W_1 = F(L_{o_1}, X_{o_1}) = \begin{bmatrix} (654.216 - 654.326)^2 + (8.250.517 - 8.250.404)^2 - 157,8^2 \\ (654.445 - 654.326)^2 + (8.250.498 - 8.250.404)^2 - 157,8^2 \\ (654.422 - 654.326)^2 + (8.250.299 - 8.250.404)^2 - 157,8^2 \\ (654.221 - 654.326)^2 + (8.250.302 - 8.250.404)^2 - 157,8^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31,84 \\ -1.903,84 \\ -4.659,84 \\ -3.372,83 \end{bmatrix}$$

**6º - Cálculo das Matrizes M, X, K e V.**

$$M_1 = B_1 \cdot P^{-1} \cdot B_1^T = \begin{bmatrix} 4.973.800 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.599.400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.048.200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.285.580 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = -(A_1^T \cdot M_1^{-1} \cdot A_1)^{-1} \cdot A_1^T \cdot M_1^{-1} \cdot W_1 = \begin{bmatrix} -3,1675 \\ 7,6213 \\ -7,9754 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = -M_1^{-1} \cdot (A_1 \cdot X_1 + W_1) = \begin{bmatrix} -0,0000133 \\ 0,0000143 \\ -0,0000163 \\ 0,0000152 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = P_1^{-1} \cdot B_1^T \cdot K_1 = \begin{bmatrix} 0,0809 \\ -0,0800 \\ 0,1005 \\ 0,0711 \\ -0,0927 \\ 0,1050 \\ -0,0888 \\ -0,0960 \end{bmatrix}$$

**7º - Cálculo das Matrizes dos parâmetros ajustados ( $Xa$ ) e das observações ajustadas ( $La$ ).**

$$Xa_1 = Xo_1 + X_1 = \begin{bmatrix} 654.326,00 \\ 8.250.404,00 \\ 157,80 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3,1675 \\ 7,6213 \\ -7,9754 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 654.322,8325 \\ 8.250.411,6213 \\ 149,8246 \end{bmatrix}$$

$$La_1 = Lb + V_1 = \begin{bmatrix} 654.216,0 \\ 8.250.517,0 \\ 654.445,0 \\ 8.250.498,0 \\ 654.422,0 \\ 8.250.299,0 \\ 654.221,0 \\ 8.250.302,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0809 \\ -0,0800 \\ 0,1005 \\ 0,0711 \\ -0,0927 \\ 0,1050 \\ -0,0888 \\ -0,0960 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 654.216,146 \\ 8.250.516,850 \\ 654.445,170 \\ 8.250.498,134 \\ 654.421,844 \\ 8.250.299,171 \\ 654.220,840 \\ 8.250.301,845 \end{bmatrix}$$

Como dito, o modelo deste problema é do tipo não linear, e por essa razão, é necessário se aplicar algumas iterações até que a fórmula quadrática ( $V^T PV$ ) estabilize e o vetor  $X$  (das correções) se aproxime de “zero”. Fazendo  $Xa = Xo_1$  e  $Lo_2 = La_1$ , após 3 iterações, quando as condições acima são alcançadas, tem-se:

$$Xa = \begin{bmatrix} 654.322,8121 \\ 8.250.411,6329 \\ 149,8412 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad La = \begin{bmatrix} 654.216,139 \\ 8.250.516,863 \\ 654.445,172 \\ 8.250.498,122 \\ 654.421,641 \\ 8.250.299,180 \\ 654.220,847 \\ 8.250.301,835 \end{bmatrix}$$

**8º - Teste de qualidade do ajustamento**

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{GL} = \frac{0,00382}{1} = 0,00382$$

Calculando o qui-quadrado amostral para o problema  $\Rightarrow \hat{\chi}^2 = \frac{V^T PV}{\sigma_0^2} = 0,00382$

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

*AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO*

Considerando  $\alpha = 10\%$  de nível de significância  $\Rightarrow 1 - \alpha = 90\%$

$$GL = r - u = 4 - 3 = 1 \text{ (graus de liberdade)}$$

Da tabela de  $\chi^2$  obtém-se :  $\chi^2_{0,90;1} = 2,71$

$$P(0,00382 < 2,71) = 90\%$$

Como o qui-quadrado amostral é menor que o teórico, então a hipótese  $H_0$  é considerada válida, e neste caso considera-se que o ajustamento não apresenta problemas.

**9º - Cálculo das Matrizes variância-covariância dos parâmetros e das observações ajustadas**

$$\sum X_a = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (A^T M^{-1} A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0922238 & 0,0010409 & -0,0019091 \\ 0,0010409 & 0,0997104 & 0,0050571 \\ -0,0019091 & 0,0050571 & 0,0480571 \end{bmatrix} m^2$$

| INCÓGNITA |                | $\sigma$ (m)   |
|-----------|----------------|----------------|
| Xc =      | 654.322,81 m   | $\pm 0,3037$ m |
| Yc =      | 8.250.411,63 m | $\pm 0,3158$ m |
| R =       | 149,82 m       | $\pm 0,2192$ m |

$$\rho_{XcYc}=1,09\% ; \rho_{XcR}=-2,87\%; \rho_{YcR}=7,31\%$$

$$\sum La = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} + P^{-1} B^T M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} B P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1})$$

$$\sum La = \begin{bmatrix} 0,172 & 0,019 & -0,024 & -0,017 & 0,022 & -0,025 & 0,021 & 0,023 \\ 0,019 & 0,172 & 0,024 & 0,017 & -0,022 & 0,025 & -0,021 & -0,023 \\ -0,024 & 0,024 & 0,161 & -0,021 & 0,027 & -0,031 & 0,026 & 0,028 \\ -0,017 & 0,017 & -0,021 & 0,176 & 0,019 & -0,022 & 0,019 & 0,020 \\ 0,022 & -0,022 & 0,027 & 0,019 & 0,166 & 0,029 & -0,024 & -0,026 \\ -0,025 & 0,025 & -0,031 & -0,022 & 0,029 & 0,159 & 0,028 & 0,030 \\ 0,021 & -0,021 & 0,026 & 0,019 & -0,024 & 0,028 & 0,168 & -0,025 \\ 0,023 & -0,023 & 0,028 & 0,020 & -0,026 & 0,030 & -0,025 & 0,164 \end{bmatrix}$$

# IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

| Ponto | E (m)        | $\sigma_E$ (m) | N (m)          | $\sigma_N$ (m) |
|-------|--------------|----------------|----------------|----------------|
| 1     | 654.216,1393 | +/- 0,4143     | 8.250.516,8626 | +/- 0,4149     |
| 2     | 654.445,1724 | +/- 0,4016     | 8.250.498,1218 | +/- 0,4198     |
| 3     | 654.421,8413 | +/- 0,4072     | 8.250.299,1802 | +/- 0,3982     |
| 4     | 654.220,8471 | +/- 0,4094     | 8.250.301,8353 | +/- 0,4049     |

## 10º - Cálculo da área do pivô e precisão da área.

A equação da área de uma circunferência é dada por:

$$A = \pi \cdot R^2$$

Basta substituir o valor do raio calculado na equação para se obter a área.

$$A = \pi \cdot (149,82 \text{ m})^2 = 70.536,22 \text{ m}^2$$

Para se determinar a precisão dessa área é só fazer uma propagação de variância.

$$\Sigma A = D \cdot \Sigma R \cdot D^T$$

$$D = \frac{\partial A}{\partial R} = 2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot 149,82 = 941,48 \text{ m}$$

$$\Sigma R = (0,2192)^2 = 0,0481 \text{ m}^2$$

$$\Sigma A = 942,48 \text{ m} \times 0,0481 \text{ m}^2 \times 942,48 \text{ m} = 42.597,08 \text{ m}^4$$

Extraíndo-se a raiz da variância da área, obtem-se a precisão:

$$\sigma_A = 206,391 \text{ m}^2$$

Finalmente, a área e a precisão procuradas são:

$$A = 70.536,22 \text{ m}^2 \pm 206,391 \text{ m}^2$$

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

CAMARGO, P. O. **Ajustamento de Observações**. Presidente Prudente. (Notas de aula do Curso de Graduação em Engenharia Cartográfica, FCT/UNESP) , 2000.

DALMOLIM, Q. **Ajustamento por Mínimos Quadrados**. Curitiba: Ed. UFPR, 2002.

GEMAEL, C. **Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas**. Curitiba: Ed. UFPR, 1994.

MONICO, J. F. G et al. **Acurácia e precisão**: Revendo os conceitos de forma acurada. Boletim Ciências Geodésicas, sec. Comunicações, Curitiba, v. 15, no 3, p.469-483, jul-set, 2009.

**APÊNDICE A**

## Ajustamento de poligonais topográficas (planas) pelo método dos correlatos.

Normalmente quando é feito um levantamento topográfico, seja ele para definir a divisa de uma propriedade ou para alguma obra de engenharia, é necessária a utilização de poligonais neste levantamento. As poligonais podem ser classificadas como abertas ou fechadas e com controle e sem controle. O que se tratará neste texto é o ajustamento de poligonais planas abertas e controladas pelo método dos correlatos ou das equações de condição. O modelo matemático funcional é do tipo não linear e neste caso será necessária a aplicação do modelo iterativo.

Se os dados da poligonal forem oriundos da superfície elipsoidal, deve-se proceder inicialmente a transformação destes para a superfície de projeção (UTM). Estas transformações são objetos da Geodésia e não serão tratadas aqui.

Inicialmente é preciso estabelecer algumas condições deste problema:

- toda poligonal controlada sai de um marco de coordenadas conhecidas e termina em outro de coordenadas também conhecidas;
- é necessário que se conheça o azimute de uma direção tanto no marco inicial como no final. Estes azimutes são definidos como de saída e chegada;

Para entender o processo de ajustamento vamos imaginar a poligonal esquematizada na figura 1.

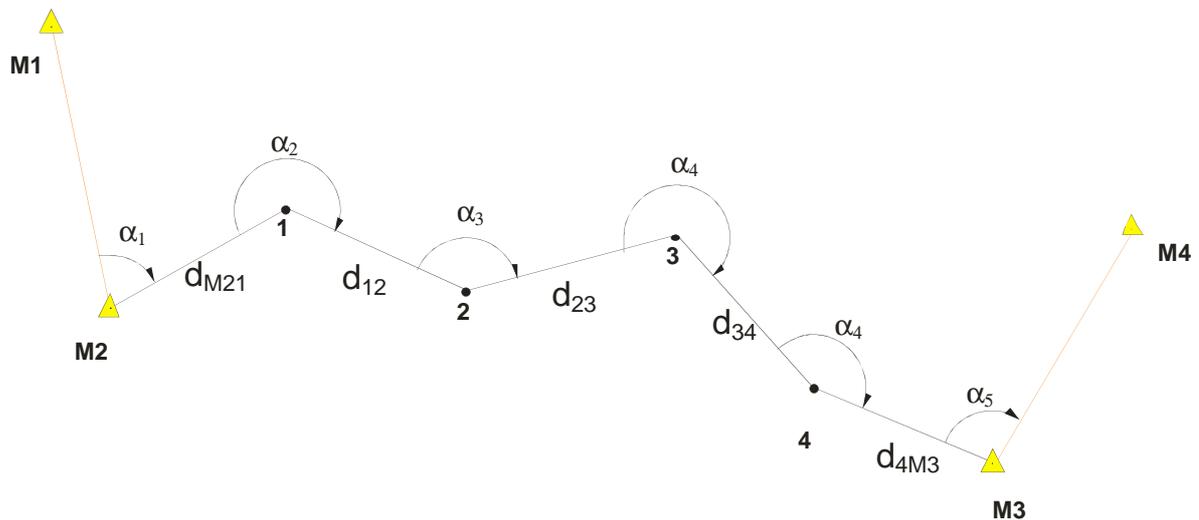


Figura 1 – Poligonal plana controlada

Os marcos **M1**, **M2**, **M3** e **M4** têm coordenadas conhecidas e, deste modo, tem-se as coordenadas de saída (**M2**) e chegada (**M3**) e os marcos **M2** associado ao **M1** e o **M3**

## IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

associado ao **M4** permitem que se calcule os azimutes de quadrícula de saída e chegada. Estão explicitados ainda nesta figura, os valores observados (ângulos e distâncias).

Nota-se que o número de distâncias medidas é igual aos dos ângulos horizontais diminuídos de 1, ou seja: são 6 ângulos e 5 distâncias. Essa regra vale sempre e o número de observações totais (ângulos horizontais e distâncias) é dado por:

$$n = 2v - 1$$

onde:  $v$  = é o número de vértices efetivamente ocupados.

No presente caso, 6 vértices (**M2, 1, 2, 3, 4** e **M3**).

O método correlato ou das equações de condição, ao ser aplicado a este tipo de problema, impõe 3 equações de condição, independente do número de observações; uma relativa ao azimute e outras duas as coordenadas  $x$  e  $y$ .

No que diz respeito à equação de azimute, ao se transportar o azimute da direção **M2M1**, através dos ângulos horizontais medidos, para a direção **M3M4**, esse valor calculado, se não existissem erros de observação, seria igual ao azimute calculado através das coordenadas dessa direção. Assim, a equação de condição do azimute é:

$$AZ_{M3M4}^C - AZ_{M3M4} = 0 \quad (1)$$

onde:  $AZ_{M3M4}^C$  - é o azimute final ou de chegada transportado a partir dos ângulos horizontais.

$AZ_{M3M4}$  - é o azimute de chegada calculado pelas coordenadas (conhecido).

Com respeito às equações de coordenadas, o princípio do raciocínio é o mesmo, ou seja, as coordenadas  $X$  e  $Y$ , do marco **M3**, transportadas através das observações, devem ser iguais às coordenadas do próprio marco, ou seja:

$$X_{M3}^C - X_{M3} = 0; \quad (2)$$

$$Y_{M3}^C - Y_{M3} = 0; \quad (3)$$

onde:  $X_{M3}^C, Y_{M3}^C$  - são as coordenadas do marco **M3** transportadas a partir das observações.

$X_{M3}, Y_{M3}$  - são as coordenadas do marco **M3** (conhecido).

O azimute é transportado pela seguinte equação genérica:

$$AZ_i^C = AZ_{Saída} + \sum \alpha_i - (i - 1) \times 180^\circ \quad (4)$$

$$i = 1, v$$

Considerando que no caso estudado  $v = 6$ , vem:

$$AZ_{M3M4}^C = AZ_{M2M1} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - 900^\circ$$

As coordenadas por sua vez são transportadas pelas equações:

$$X_i^C = X_{Saída} + \sum d_i * \text{sen } Az_i \quad (5)$$

$$Y_i^C = Y_{Saída} + \sum d_i * \text{cos } Az_i \quad (6)$$

$$i = 1, v-1$$

ou seja:

$$X_{M3}^C = X_{M2} + d_{M21} \text{sen} Az_{M21} + d_{12} \text{sen} Az_{12} + d_{23} \text{sen} Az_{23} + d_{34} \text{sen} Az_{34} + d_{4M3} \text{sen} Az_{4M3}$$

$$Y_{M3}^C = Y_{M2} + d_{M21} \text{cos} Az_{M21} + d_{12} \text{cos} Az_{12} + d_{23} \text{cos} Az_{23} + d_{34} \text{cos} Az_{34} + d_{4M3} \text{cos} Az_{4M3}$$

reescrevendo as equações de condições:

$$AZ_{M3M4}^C - AZ_{M3M4}^C = 0$$

$$X_{M2} + d_{M21} \text{sen} Az_{M21} + d_{12} \text{sen} Az_{12} + d_{23} \text{sen} Az_{23} + d_{34} \text{sen} Az_{34} + d_{4M3} \text{sen} Az_{4M3} - X_{M3} = 0 \quad (7)$$

$$Y_{M2} + d_{M21} \text{cos} Az_{M21} + d_{12} \text{cos} Az_{12} + d_{23} \text{cos} Az_{23} + d_{34} \text{cos} Az_{34} + d_{4M3} \text{cos} Az_{4M3} - Y_{M3} = 0$$

As três equações envolvem azimutes que não foram observados. É necessário então que se faça uma propagação de variâncias para determinar a precisão destes azimutes a partir dos ângulos horizontais medidos. Como a equação dos azimutes é do tipo linear basta aplicar a seguinte equação de propagação:

$$\sum AZ = G \times \sum \alpha \times G^T$$

- onde: G - Matriz dos coeficientes
- $\Sigma\alpha$  - Matriz variância-covariância (M.V.C.) dos ângulos horizontais medidos.
- $\Sigma AZ$  - Matriz variância-covariância (M.V.C.) dos azimutes calculados.

A partir da equação (4) e adotando o superíndice <sup>T</sup> para transportado, os azimutes podem ser calculados por:

$$\begin{aligned} AZ_{M21}^C &= AZ_{M2M1} + \alpha_1 \\ AZ_{12}^C &= AZ_{M2M1} + \alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ \\ AZ_{23}^C &= AZ_{M2M1} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 360^\circ \\ AZ_{34}^C &= AZ_{M2M1} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 540^\circ \\ AZ_{4M3}^C &= AZ_{M2M1} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 720^\circ \\ AZ_{M3M4}^C &= AZ_{M2M1} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - 900^\circ \end{aligned}$$

Escrevendo sobre forma matricial:

$$\begin{bmatrix} AZ_{M21}^C \\ AZ_{12}^C \\ AZ_{23}^C \\ AZ_{34}^C \\ AZ_{4M3}^C \\ AZ_{M3M4}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} AZ_{M2M1} \\ AZ_{M2M1} - 180^\circ \\ AZ_{M2M1} - 360^\circ \\ AZ_{M2M1} - 540^\circ \\ AZ_{M2M1} - 720^\circ \\ AZ_{M2M1} - 900^\circ \end{bmatrix}$$

que é uma expressão do tipo  $Y = G X + C$

Os ângulos horizontais são oriundos de observações independentes e, portanto, a M.V.C é uma matriz diagonal.

$$\sum_{\alpha} = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\alpha_2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\alpha_3}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\alpha_4}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\alpha_5}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\alpha_6}^2 \end{bmatrix}$$

É importante frizar que as variâncias de todos os ângulos são iguais uma vez que foram medidos com o mesmo equipamento. O resultado dessa propagação e previsível e pode ser expressa pela seguinte matriz genérica.

$$\sum_{Az} = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha_1}^2 & \sigma_{\alpha_1}^2 & \sigma_{\alpha_1}^2 & \sigma_{\alpha_1}^2 & \dots & \sigma_{\alpha_1}^2 \\ \sigma_{\alpha_1}^2 & 2\sigma_{\alpha_2}^2 & 2\sigma_{\alpha_2}^2 & 2\sigma_{\alpha_2}^2 & \dots & 2\sigma_{\alpha_2}^2 \\ \sigma_{\alpha_1}^2 & 2\sigma_{\alpha_2}^2 & 3\sigma_{\alpha_3}^2 & 3\sigma_{\alpha_3}^2 & \dots & 3\sigma_{\alpha_3}^2 \\ \sigma_{\alpha_1}^2 & 2\sigma_{\alpha_2}^2 & 3\sigma_{\alpha_3}^2 & 4\sigma_{\alpha_4}^2 & \dots & 4\sigma_{\alpha_4}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{\alpha_1}^2 & 2\sigma_{\alpha_2}^2 & 3\sigma_{\alpha_3}^2 & 4\sigma_{\alpha_4}^2 & \dots & n\sigma_{\alpha_n}^2 \end{bmatrix}$$

Feita a propagação para os azimutes, o próximo passo e gerar a matriz dos pesos do problema que é definida por:

$$P = \sigma_0^2 \cdot \sum_{Lb}^{-1}$$

onde:  $\sigma_0^2$  - *Sigma-a-priori* ou fator de variância da matriz de peso unitária, normalmente igual a 1.

$\sum_{Lb}^{-1}$  - M.V.C. das observações invertida.

O método correlato utiliza a matriz peso invertida, ou seja:

$$P^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \sum_{Lb}$$

A M.V.C. das observações é composta por 4 sub-matrizes.

$$\sum Lb = \begin{bmatrix} \sum Az & \sum Azdist \\ \sum distAz & \sum dist \end{bmatrix}$$

A sub-matriz dos azimutes foi obtida pela propagação dos ângulos horizontais, e considerando que azimutes e distâncias são medidas não correlacionadas, as sub-matrizes referentes ao azimute e distância são nulas. As distâncias também são não correlacionadas entre si, o que faz com que a sub-matriz das distâncias seja uma matriz diagonal.

$$\sum dist = \begin{bmatrix} \sigma_{d_{M21}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{d_{12}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{d_{23}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{d_{34}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{d_{4M3}}^2 \end{bmatrix}$$

Definidos os elementos que compõem a M.V.C. da Lb é só montar a matriz dos pesos invertida.

$$\sum Lb = \begin{bmatrix} \sum Az & 0 \\ 0 & \sum dist \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{bmatrix} \sum Az & 0 \\ 0 & \sum dist \end{bmatrix}$$

Dando continuidade, é necessário se montar a matriz  $Lo_1$ , que na primeira iteração é igual a  $Lb$ .

$$Lb = \begin{bmatrix} Az_{M21} \\ Az_{12} \\ Az_{23} \\ Az_{34} \\ Az_{4M3} \\ Az_{M3M4} \\ d_{M21} \\ d_{12} \\ d_{23} \\ d_{34} \\ d_{4M3} \end{bmatrix} \Rightarrow Lo_1 = \begin{bmatrix} Az_{M21} \\ Az_{12} \\ Az_{23} \\ Az_{34} \\ Az_{4M3} \\ Az_{M3M4} \\ d_{M21} \\ d_{12} \\ d_{23} \\ d_{34} \\ d_{4M3} \end{bmatrix}$$

Na sequência se calcula a matriz B e o vetor W

$$B = \frac{\partial F}{\partial L_a} \Big|_{Lo_i} \quad e \quad W = B_{Lo_i}(Lb - Lo_i) + F(Lo_i).$$

A matriz B é gerada pela derivada parcial das equações (7) pelas “observações” ajustadas. O termo observação está entre aspas porque o azimute não é uma observação, mas um valor derivado dos ângulos horizontais observados.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial Az}{\partial Az_{M21}} & \frac{\partial Az}{\partial Az_{12}} & \frac{\partial Az}{\partial Az_{23}} & \frac{\partial Az}{\partial Az_{34}} & \frac{\partial Az}{\partial Az_{4M3}} & \frac{\partial Az}{\partial Az_{M3M4}} & \frac{\partial Az}{\partial d_{M21}} & \frac{\partial Az}{\partial d_{12}} & \frac{\partial Az}{\partial d_{23}} & \frac{\partial Az}{\partial d_{34}} & \frac{\partial Az}{\partial d_{4M3}} \\ \frac{\partial X}{\partial Az_{M21}} & \frac{\partial X}{\partial Az_{12}} & \frac{\partial X}{\partial Az_{23}} & \frac{\partial X}{\partial Az_{34}} & \frac{\partial X}{\partial Az_{4M3}} & \frac{\partial X}{\partial Az_{M3M4}} & \frac{\partial X}{\partial d_{M21}} & \frac{\partial X}{\partial d_{12}} & \frac{\partial X}{\partial d_{23}} & \frac{\partial X}{\partial d_{34}} & \frac{\partial X}{\partial d_{4M3}} \\ \frac{\partial Y}{\partial Az_{M21}} & \frac{\partial Y}{\partial Az_{12}} & \frac{\partial Y}{\partial Az_{23}} & \frac{\partial Y}{\partial Az_{34}} & \frac{\partial Y}{\partial Az_{4M3}} & \frac{\partial Y}{\partial Az_{M3M4}} & \frac{\partial Y}{\partial d_{M21}} & \frac{\partial Y}{\partial d_{12}} & \frac{\partial Y}{\partial d_{23}} & \frac{\partial Y}{\partial d_{34}} & \frac{\partial Y}{\partial d_{4M3}} \end{bmatrix}$$

aplicando as derivações às equações:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{M21}\cos Az_{M21} & d_{12}\cos Az_{12} & d_{23}\cos Az_{23} & d_{34}\cos Az_{34} & d_{4M3}\cos Az_{4M3} & 0 & \text{sen} Az_{M21} & \text{sen} Az_{12} & \text{sen} Az_{23} & \text{sen} Az_{34} & \text{sen} Az_{4M3} \\ -d_{M21}\text{sen} Az_{M21} & -d_{12}\text{sen} Az_{12} & -d_{23}\text{sen} Az_{23} & -d_{34}\text{sen} Az_{34} & -d_{4M3}\text{sen} Az_{4M3} & 0 & \cos Az_{M21} & \cos Az_{12} & \cos Az_{23} & \cos Az_{34} & \cos Az_{4M3} \end{bmatrix}$$

Este cálculo é feito a partir do vetor  $Lo$ , ou seja.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Lo(7)\cos Lo(1) & Lo(8)\cos Lo(2) & Lo(9)\cos Lo(3) & Lo(10)\cos Lo(4) & Lo(11)\cos Lo(5) & 0 & \text{sen} Lo(1) & \text{sen} Lo(2) & \text{sen} Lo(3) & \text{sen} Lo(4) & \text{sen} Lo(5) \\ -Lo(7)\text{sen} Lo(1) & -Lo(8)\text{sen} Lo(2) & -Lo(9)\text{sen} Lo(3) & -Lo(10)\text{sen} Lo(4) & -Lo(11)\text{sen} Lo(5) & 0 & \cos Lo(1) & \cos Lo(2) & \cos Lo(3) & \cos Lo(4) & \cos Lo(5) \end{bmatrix}$$

A matriz  $F(Lo_i)$  é obtida substituindo-se os valores “observados” nas equações de condição (7). Novamente utilizam-se os valores contidos no vetor  $Lo$ , ou seja:

$$F(Lo_i) = \begin{bmatrix} Lo(6) - AZ_{M3M4}^c \\ X_{M2} + Lo(7)\text{sen} Lo(1) + Lo(8)\text{sen} Lo(2) + Lo(9)\text{sen} Lo(3) + Lo(10)\text{sen} Lo(4) + Lo(11)\text{sen} Lo(5) - X_{M3} \\ Y_{M2} + Lo(7)\cos Lo(1) + Lo(8)\cos Lo(2) + Lo(9)\cos Lo(3) + Lo(10)\cos Lo(4) + Lo(11)\cos Lo(5) - Y_{M3} \end{bmatrix}$$

Finalmente é só proceder a sequência de cálculos do método.

$$M_i = (B_i P^{-1} B_i^T);$$

$$K_i = -M_i^{-1} W_i;$$

$$V_i = P^{-1} B_i^T K_i;$$

$$La_i = Lb + V_i$$

Na segunda iteração atribui-se a  $Lo$  o valor de  $La$ . Esse processo é feito até quando a forma quadrática fundamental ( $V^T P V$ ) estabilizar ou quando

$$V_{i+1} \cong V_i \quad \text{ou} \quad V_{i+1} - V_i \rightarrow 0 \quad (\text{tender a zero}).$$

Na sequência verifica-se a qualidade do ajustamento pelo teste de hipótese onde:

$$H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 \quad \text{e} \quad H_1 : \sigma_0^2 > \hat{\sigma}_0^2$$

Se a hipótese  $H_0$  for válida o ajustamento não apresenta problemas, mas se a hipótese  $H_1$  for válida, o ajustamento está com problemas que pode ser:

- ✓ modelo matemático inadequado;
- ✓ modelo estocástico inadequado
- ✓ presença de erros grosseiros.

O modelo matemático está correto e, se forem utilizadas as variâncias das observações na geração da matriz dos pesos, não é questão de modelo estocástico. O que sobra é a presença de erros grosseiros nos dados, que devem ser examinados.

O cálculo do *sigma-a-posteriori* é feito pela seguinte fórmula:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{-K^T W}{r}$$

onde :  $r$  – número de equações de condição ou graus de liberdade do problema ( $r = 3$ )

As M.V.C dos valores observados ajustados e dos resíduos são calculados pelas seguintes expressões matriciais :

$$\sum L_a = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1})$$

$$\sum V = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1})$$

Calculado os valores observados ajustados é só aplicá-los no modelo matemático e obter as coordenadas dos vértices. Para obter a precisão das coordenadas é necessário se fazer uma propagação de variância.

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

*AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO*

No exercício seguinte são mostradas todas as etapas do cálculo.

Exemplo - Foi executada uma poligonal eletrônica cujos dados estão na sequência. Ajuste a poligonal pelo método dos mínimos quadrados, método correlato e calcule as coordenadas dos vértices 1, 2, 3 e 4, bem como a precisão de cada um deles.

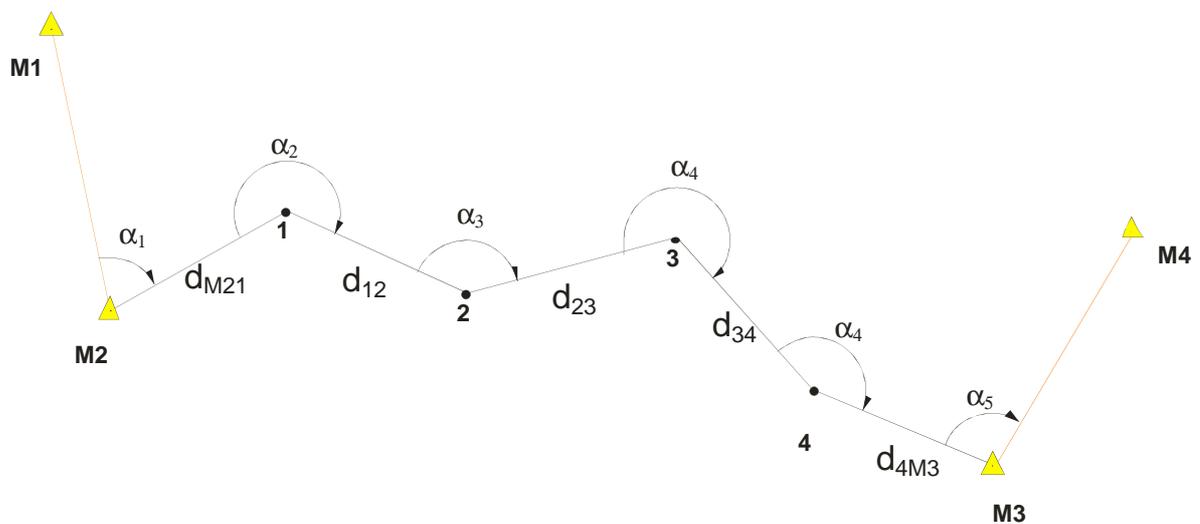
| Marcos | E (m)        | N (m)          |
|--------|--------------|----------------|
| M1     | 806.473,6434 | 8.161.899,6488 |
| M2     | 806.772,2698 | 8.160.426,9561 |
| M3     | 811.367,2610 | 8.159.608,7935 |
| M4     | 812.089,7437 | 8.160.840,8501 |

$\sigma_d = +/- 2mm +/- 2ppm$  (precisão linear)

$\sigma_\alpha = 1''$  (precisão angular)

| ESTAÇÃO | R  | DIREÇÃO         | Distância (m) |
|---------|----|-----------------|---------------|
|         | V  |                 |               |
| M2      | M1 | 72° 34' 46,50"  | 1.056,1560    |
|         | 1  |                 |               |
| 1       | M2 | 233° 15' 53,20" | 1.025,9100    |
|         | 2  |                 |               |
| 2       | 1  | 141° 14' 06,30" | 1.123,7600    |
|         | 3  |                 |               |

| ESTAÇÃO | R  | DIREÇÃO         | Distância (m) |
|---------|----|-----------------|---------------|
|         | V  |                 |               |
| 3       | 2  | 242° 17' 44,20" | 1.063,5452    |
|         | 4  |                 |               |
| 4       | 3  | 154° 59' 00,00" | 1.014,3341    |
|         | M3 |                 |               |
| M3      | 4  | 97° 29' 27,00"  | -             |
|         | M4 |                 |               |



## IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

O ajuste pelo método dos mínimos quadrados pelo método dos correlatos implica em três equações de condição, uma relativa a azimute e duas as coordenadas:

$$AZ_{M3M4}^C - AZ_{M3M4}^C = 0$$

$$E_{M3}^C - E_{M3} = 0;$$

$$N_{M3}^C - N_{M3} = 0;$$

Para se ter o azimute e as coordenadas transportadas são necessários inicialmente se calcular os azimutes de saída e chegada, depois calcular os azimutes de todas as direções e finalmente transportar as coordenadas. O cálculo dos azimutes de saída e chegada é feito pelas coordenadas dos marcos M1, M2, M3 e M4. Como se quer o azimute da direção M2M1 e M3M4 é importante se calcular a diferença de coordenadas  $\Delta E$  e  $\Delta N$  de forma correta. Isto é feito utilizando-se uma regra básica: coordenada do ponto visado menos a coordenada do ponto onde se está estacionado. Então:

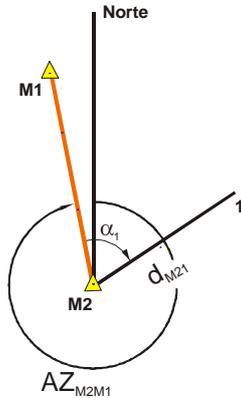
$$\Delta E_{2E1} = E_1 - E_2 \Rightarrow 806.473,6434\text{m} - 806.772,2698\text{m} \Rightarrow \Delta E_{2E1} = -298,6264 \text{ m}$$

$$\Delta N_{2N1} = N_1 - N_2 \Rightarrow 8.161.899,6488\text{m} - 8.160.426,9561\text{m} \Rightarrow \Delta N_{2N1} = 1.472,6927\text{m}$$

$$\Delta E_{3E4} = E_4 - E_3 \Rightarrow 812.089,7437\text{m} - 811.367,2610\text{m} \Rightarrow \Delta E_{3E4} = 722,4827\text{m}$$

$$\Delta N_{3N4} = N_4 - N_3 \Rightarrow 8.160.840,8501\text{m} - 8.159.608,7935\text{m} \Rightarrow \Delta N_{3N4} = 1.232,0566\text{m}$$

Aplicando uma relação trigonométrica calculam-se os azimutes



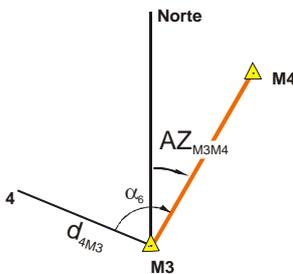
$$AZ_{M2M1} = \arctg \frac{\Delta E_{2E1}}{\Delta N_{2N1}} \Rightarrow AZ_{M2M1} = \arctg \frac{-298,6264 \text{ m}}{1.472,6927\text{m}}$$

$$AZ_{M2M1} = \arctg(-0,202775773) \Rightarrow AZ_{M2M1} = -11^{\circ}27' 45,9851''$$

Fazendo um estudo de sinal chega-se a conclusão que o azimute é um arco do 4º quadrante ( $\Delta E_{2E1} \Rightarrow -$  e  $\Delta N_{2N1} \Rightarrow +$ ). Então soma-se  $360^{\circ}$  ao valor calculado.

$$AZ_{M2M1} = 348^{\circ}32' 14,0149'' \text{ (azimute de saída)}$$

Fazendo o mesmo cálculo para a direção M3M4, vem:



$$AZ_{M3M4} = \arctg \frac{\Delta E_{3E4}}{\Delta N_{3N4}} \Rightarrow AZ_{M3M4} = \arctg \frac{722,4827\text{m}}{1.232,0566\text{m}}$$

$$AZ_{M3M4} = \arctg(0,586403823) \Rightarrow AZ_{M3M4} = 30^{\circ}23' 15,0816''$$

Pelo estudo de sinal chega-se a conclusão que o azimute de chegada é um arco do 1º quadrante ( $\Delta E_{3E4} \Rightarrow +$  e  $\Delta N_{3N4} \Rightarrow +$ ).

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

**AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO**

Com o azimute de saída se podem calcular todos os azimutes pela equação genérica:

$$AZ_i^C = AZ_{saída} + \sum \alpha_i - (i - 1) \times 180^\circ$$

$$i = 1, v$$

Então:

$$AZ_{M21}^C = 348^\circ 32' 14,0149'' + 72^\circ 34' 46,50''$$

$$AZ_{12}^C = 348^\circ 32' 14,0149'' + 72^\circ 34' 46,50'' + 233^\circ 15' 53,20'' - 180^\circ$$

$$AZ_{23}^C = 348^\circ 32' 14,0149'' + 72^\circ 34' 46,50'' + 233^\circ 15' 53,20'' + 141^\circ 14' 06,30'' - 360^\circ$$

$$AZ_{34}^C = 348^\circ 32' 14,0149'' + 72^\circ 34' 46,50'' + 233^\circ 15' 53,20'' + 141^\circ 14' 06,30'' + 242^\circ 17' 44,20'' - 540^\circ$$

$$AZ_{4M3}^C = 348^\circ 32' 14,0149'' + 72^\circ 34' 46,50'' + 233^\circ 15' 53,20'' + 141^\circ 14' 06,30'' + 242^\circ 17' 44,20'' + 154^\circ 59' 00,00'' - 720^\circ$$

$$AZ_{M3M4}^C = 348^\circ 32' 14,0149'' + 72^\circ 34' 46,50'' + 233^\circ 15' 53,20'' + 141^\circ 14' 06,30'' + 242^\circ 17' 44,20'' + 154^\circ 59' 00,00'' + 97^\circ 29' 27,00'' - 900^\circ$$

$$AZ_{M21}^C = 421^\circ 07' 00,5149'' \Rightarrow AZ_{M21}^C = 61^\circ 07' 00,5149''$$

$$AZ_{12}^C = 474^\circ 22' 53,7149'' \Rightarrow AZ_{12}^C = 114^\circ 22' 53,7149''$$

$$AZ_{23}^C = 435^\circ 37' 00,0149'' \Rightarrow AZ_{23}^C = 75^\circ 37' 00,0149''$$

$$AZ_{34}^C = 497^\circ 54' 44,2149'' \Rightarrow AZ_{34}^C = 137^\circ 54' 44,2149''$$

$$AZ_{4M3}^C = 472^\circ 53' 44,2149'' \Rightarrow AZ_{4M3}^C = 112^\circ 53' 44,2149''$$

$$AZ_{M3M4}^C = 390^\circ 23' 11,2149'' \Rightarrow AZ_{M3M4}^C = 30^\circ 23' 11,2149''$$

Com os azimutes calculados e as distâncias medidas, se monta o vetor Lb e Lo da primeira iteração.

$$Lb = \begin{bmatrix} 61^\circ 07' 00,5149'' \\ 114^\circ 22' 53,7149'' \\ 75^\circ 37' 00,0149'' \\ 137^\circ 54' 44,2149'' \\ 112^\circ 53' 44,2149'' \\ 30^\circ 23' 11,2149'' \\ 1.056,1560 \\ 1.025,9100 \\ 1.123,7600 \\ 1.063,5452 \\ 1.014,3341 \end{bmatrix} \Rightarrow Lo_1 = \begin{bmatrix} 61^\circ 07' 00,5149'' \\ 114^\circ 22' 53,7149'' \\ 75^\circ 37' 00,0149'' \\ 137^\circ 54' 44,2149'' \\ 112^\circ 53' 44,2149'' \\ 30^\circ 23' 11,2149'' \\ 1.056,1560 \\ 1.025,9100 \\ 1.123,7600 \\ 1.063,5452 \\ 1.014,3341 \end{bmatrix}$$

Com o vetor Lo calcula-se a matriz B e o vetor W

$$B_i = \frac{\partial F}{\partial L_a} \Big|_{Lo_i} \quad \text{e} \quad W_i = B_{Lo_i} (Lb - Lo_i) + F(Lo_i)$$

# IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

## AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Lo(7)\cos Lo(1) & Lo(8)\cos Lo(2) & Lo(9)\cos Lo(3) & Lo(10)\cos Lo(4) & Lo(11)\cos Lo(5) & 0 & \text{sen} Lo(1) & \text{sen} Lo(2) & \text{sen} Lo(3) & \text{sen} Lo(4) & \text{sen} Lo(5) \\ -Lo(7)\text{sen} Lo(1) & -Lo(8)\text{sen} Lo(2) & -Lo(9)\text{sen} Lo(3) & -Lo(10)\text{sen} Lo(4) & -Lo(11)\text{sen} Lo(5) & 0 & \cos Lo(1) & \cos Lo(2) & \cos Lo(3) & \cos Lo(4) & \cos Lo(5) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 510,15 & -423,51 & 279,15 & -789,28 & -394,63 & 0 & 0,87561 & 0,91082 & 0,96866 & 0,67027 & 0,92122 \\ -924,78 & -934,42 & -1088,54 & -712,86 & -934,42 & 0 & 0,48303 & -0,41281 & 0,24841 & -0,74212 & -0,38905 \end{bmatrix}$$

Na primeira iteração o vetor  $W = F(Lo_i)$

$$F(Lo_i) = \begin{bmatrix} Lo(6) - AZ_{M3M4}^C \\ X_{M2} + Lo(7)\text{sen} Lo(1) + Lo(8)\text{sen} Lo(2) + Lo(9)\text{sen} Lo(3) + Lo(10)\text{sen} Lo(4) + Lo(11)\text{sen} Lo(5) - X_{M3} \\ Y_{M2} + Lo(7)\cos Lo(1) + Lo(8)\cos Lo(2) + Lo(9)\cos Lo(3) + Lo(10)\cos Lo(4) + Lo(11)\cos Lo(5) - Y_{M3} \end{bmatrix}$$

$$F(Lo_i) = \begin{bmatrix} 30^{\circ}23'11,2149'' - 30^{\circ}23'15,0816'' \\ 806.772,2698 + 1.056,1560 \times \text{sen}(61^{\circ}07'00,5149'') + 1.025,9100 \times \text{sen}(114^{\circ}22'53,7149'') + 1.123,7600 \times \text{sen}(75^{\circ}37'00,0149'') \\ \quad + 1.063,5452 \times \text{sen}(137^{\circ}54'44,2149'') + 1.014,3341 \times \text{sen}(112^{\circ}53'44,2149'') - 811.367,2610 \\ 8.160.426,9561 + 1.056,1560 \times \cos(61^{\circ}07'00,5149'') + 1.025,9100 \times \cos(114^{\circ}22'53,7149'') + 1.123,7600 \times \cos(75^{\circ}37'00,0149'') \\ \quad + 1.063,5452 \times \cos(137^{\circ}54'44,2149'') + 1.014,3341 \times \cos(112^{\circ}53'44,2149'') - 8.159.608,7935 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} -03,8667'' \\ 0,0173\text{m} \\ 0,0484\text{m} \end{bmatrix}$$

Para dar continuidade no método é necessário se gerar a matriz dos pesos invertida P . É importante lembrar que no método correlato, o que se utiliza é a matriz peso invertida e assim se aplicam as próprias matrizes variâncias covariâncias.

$$P^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \times \begin{bmatrix} \sum AZ & 0 \\ 0 & \sum dist \end{bmatrix}$$

Considerando que a precisão dos ângulos é  $\sigma_{\alpha} = 1''$ :

$$\sum AZ = \begin{bmatrix} 1^{''2} & 1^{''2} & 1^{''2} & 1^{''2} & 1^{''2} & 1^{''2} \\ 1^{''2} & 2^{''2} & 2^{''2} & 2^{''2} & 2^{''2} & 2^{''2} \\ 1^{''2} & 2^{''2} & 3^{''2} & 3^{''2} & 3^{''2} & 3^{''2} \\ 1^{''2} & 2^{''2} & 3^{''2} & 4^{''2} & 4^{''2} & 4^{''2} \\ 1^{''2} & 2^{''2} & 3^{''2} & 4^{''2} & 5^{''2} & 5^{''2} \\ 1^{''2} & 2^{''2} & 3^{''2} & 4^{''2} & 5^{''2} & 6^{''2} \end{bmatrix}$$

A unidade dimensional ( $''^2$ ) tem que ser modificada para radianos. Isso pode ser feito multiplicando-se a matriz por  $\text{sen}^2 1''$ .

# IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

$$\sum AZ = \begin{bmatrix} 25^{n^2} & 25^{n^2} & 25^{n^2} & 25^{n^2} & 25^{n^2} & 25^{n^2} \\ 25^{n^2} & 50^{n^2} & 50^{n^2} & 50^{n^2} & 50^{n^2} & 50^{n^2} \\ 25^{n^2} & 50^{n^2} & 75^{n^2} & 75^{n^2} & 75^{n^2} & 75^{n^2} \\ 25^{n^2} & 50^{n^2} & 75^{n^2} & 100^{n^2} & 100^{n^2} & 100^{n^2} \\ 25^{n^2} & 50^{n^2} & 75^{n^2} & 100^{n^2} & 125^{n^2} & 125^{n^2} \\ 25^{n^2} & 50^{n^2} & 75^{n^2} & 100^{n^2} & 125^{n^2} & 150^{n^2} \end{bmatrix} \times \text{sen}^2(1'')$$

$$\sum AZ = \begin{bmatrix} 2,35044 & 2,35044 & 2,35044 & 2,35044 & 2,35044 & 2,35044 \\ 2,35044 & 4,70089 & 4,70089 & 4,70089 & 4,70089 & 4,70089 \\ 2,35044 & 4,70089 & 7,05133 & 7,05133 & 7,05133 & 7,05133 \\ 2,35044 & 4,70089 & 7,05133 & 9,40177 & 9,40177 & 9,40177 \\ 2,35044 & 4,70089 & 7,05133 & 9,40177 & 11,7522 & 11,7522 \\ 2,35044 & 4,70089 & 7,05133 & 9,40177 & 11,7522 & 14,1027 \end{bmatrix} \times 10^{-11} \text{radianos}$$

Com a M.V.C. dos azimutes conhecida, é necessário que se calcule a variância das distâncias.

A especificação do equipamento informa que a precisão da distância é dada pela equação:

$$\sigma_d = \pm 2\text{mm} \pm 2\text{ppm}$$

Então:

$$d_{M21} = 1.056,1560\text{m} \quad \sigma_{d_{M21}} = 0,002\text{m} + \frac{2 \times 1.056,1560\text{m}}{1.000.000} \quad \sigma_{d_{M21}} = 0,0041\text{m} \quad \sigma_{d_{M21}}^2 = 0,0000169\text{m}^2$$

$$d_{12} = 1.025,9100\text{m} \quad \sigma_{d_{12}} = 0,002\text{m} + \frac{2 \times 1.025,9100\text{m}}{1.000.000} \quad \sigma_{d_{12}} = 0,0041\text{m} \quad \sigma_{d_{12}}^2 = 0,0000164$$

$$d_{23} = 1.123,7600\text{m} \quad \sigma_{d_{23}} = 0,002\text{m} + \frac{2 \times 1.123,7600\text{m}}{1.000.000} \quad \sigma_{d_{23}} = 0,0042\text{m} \quad \sigma_{d_{23}}^2 = 0,0000180\text{m}^2$$

$$d_{34} = 1.063,5452\text{m} \quad \sigma_{d_{34}} = 0,002\text{m} + \frac{2 \times 1.063,5452\text{m}}{1.000.000} \quad \sigma_{d_{34}} = 0,0041\text{m} \quad \sigma_{d_{34}}^2 = 0,0000170\text{m}^2$$

$$d_{4M3} = 1.014,3341\text{m} \quad \sigma_{d_{4M3}} = 0,002\text{m} + \frac{2 \times 1.014,3341\text{m}}{1.000.000} \quad \sigma_{d_{4M3}} = 0,0040\text{m} \quad \sigma_{d_{4M3}}^2 = 0,0000162\text{m}^2$$

Lembrando que a M.V.C das distâncias é uma matriz diagonal, com esses valores é possível montar a matriz Peso invertida.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2,350 \times 10^{-11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,350 \times 10^{-11} & 4,701 \times 10^{-11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,350 \times 10^{-11} & 4,701 \times 10^{-11} & 7,051 \times 10^{-11} & 7,051 \times 10^{-11} & 7,051 \times 10^{-11} & 7,051 \times 10^{-11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,350 \times 10^{-11} & 4,701 \times 10^{-11} & 7,051 \times 10^{-11} & 9,402 \times 10^{-11} & 9,402 \times 10^{-11} & 9,402 \times 10^{-11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,350 \times 10^{-11} & 4,701 \times 10^{-11} & 7,051 \times 10^{-11} & 9,402 \times 10^{-11} & 11,752 \times 10^{-11} & 11,752 \times 10^{-11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,350 \times 10^{-11} & 4,701 \times 10^{-11} & 7,051 \times 10^{-11} & 9,402 \times 10^{-11} & 11,752 \times 10^{-11} & 14,103 \times 10^{-11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0000169 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0000164 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0000180 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0000170 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0000162 \end{bmatrix}$$

Agora é apenas uma questão de operações com matrizes:

$$M_i = B_i P^{-1} B_i^T$$

$$K_i = -M_i^{-1} W_i$$

$$V_i = P^{-1} B_i^T K_i$$

$$L a_i = L b + V_i$$

**IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

*AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO*

$$M_i = \begin{bmatrix} 1,41027 \times 10^{-10} & -1,08818 \times 10^{-07} & -3,19255 \times 10^{-07} \\ -1,08818 \times 10^{-07} & 0,000177985 & 0,000306661 \\ -3,19255 \times 10^{-07} & 0,000306661 & 0,001092814 \end{bmatrix}$$

$$M_i^{-1} = \begin{bmatrix} 22.863.997.163,742 & 4.782.636,199 & 5.337.412,192 \\ 4.782.636,199 & 11.878,160 & -1.935,998 \\ 5.337.412,192 & -1.935,998 & 3.017,6137 \end{bmatrix}$$

$$K_i = -M_i^{-1} W_i = \begin{bmatrix} 87.498,1094 \\ -22,6171 \\ -12,3594 \end{bmatrix}$$

$$V_i = P^{-1} B_i^T K_i = \begin{bmatrix} 0,0000038 \text{ rad} \\ 0,0000077 \text{ rad} \\ 0,0000110 \text{ rad} \\ 0,0000142 \text{ rad} \\ 0,0000167 \text{ rad} \\ 0,0000187 \text{ rad} \\ -0,0004359 \text{ m} \\ -0,0002544 \text{ m} \\ -0,0004506 \text{ m} \\ -0,0001020 \text{ m} \\ -0,0002601 \text{ m} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{transformando a correção dos ângulos para segundos} \Rightarrow V_i = \begin{bmatrix} 0,7892'' \\ 1,5790'' \\ 2,2663'' \\ 2,9191'' \\ 3,4425'' \\ 3,8667'' \\ -0,0004 \text{ m} \\ -0,0002 \text{ m} \\ -0,0004 \text{ m} \\ -0,0001 \text{ m} \\ -0,0003 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$La_i = Lb + V_i = \begin{bmatrix} 61^\circ 07' 01,3041'' \\ 114^\circ 22' 55,2939'' \\ 75^\circ 37' 02,2812'' \\ 137^\circ 54' 47,1339'' \\ 112^\circ 53' 47,6574'' \\ 30^\circ 23' 15,0816'' \\ 1.056,1557 \text{ m} \\ 1.025,9098 \text{ m} \\ 1.123,7596 \text{ m} \\ 1.063,5451 \text{ m} \\ 1.014,3339 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Os valores ajustados calculados na primeira iteração são atribuídos ao vetor  $Lo_2$  e procede-se a novo cálculo até que a forma quadrática fundamental estabilize. No presente exemplo, a diferença entre o resíduo calculado na primeira iteração e o da segunda, é da ordem de  $10^{-11}$  para os azimutes e  $10^{-8}$  para as distâncias. Considerando a precisão do levantamento pode-se dizer que a forma quadrática fundamental estabilizou e os valores ajustados, por essa razão, permaneceram inalterados.

Finalizada a fase de ajustamento, passa-se ao teste de qualidade deste. O teste é feito aplicando-se um teste de hipótese onde se compara o *sigma-a-priori* ( $\sigma_0^2$ ) com o *sigma-a-posteriori* ( $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{-K^T W}{GL}$ ), ou seja:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{-K^T W}{GL} = \frac{2,6303}{3} = 0,8768$$

**Teste de hipótese.**

# IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Hipótese básica       | <b>H<sub>0</sub></b> : $\sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$ |
| Hipótese alternativa  | <b>H<sub>1</sub></b> : $\sigma_0^2 > \hat{\sigma}_0^2$ |
| qui-quadrado amostral | $\hat{\chi}^2 = -K^T W$                                |

É verificado se o qui-quadrado amostral atende a equação abaixo:

$$P(\hat{\chi}^2 < \chi_{(\alpha, GL)}^2) = 1 - \alpha$$

O teórico é obtido de uma tabela ou diretamente no Excel através da função "inv.Qui( $\alpha, GL$ )".

Considerando um nível de significância  $\alpha = 10\%$  e  $GL = 3$ , vem  $\Rightarrow \chi_{(10\%, 3)}^2 = 6,25$  (valor teórico)

Aplicando a equação  $\Rightarrow \hat{\chi}^2 = -K^T W \Rightarrow \hat{\chi}^2 = 2,6303$

Como esse valor é menor que o qui-quadrado teórico entende-se que estatisticamente  $\sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$  o que indica que a hipótese  $H_0$  é válida e o ajustamento não apresenta problemas e, portanto, os resultados são confiáveis.

Dando continuidade ao problema é preciso calcular as M.V.C dos valores observados ajustados. Isso é feito através da equação matricial:

$$\sum L_a = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1})$$

|              |              |              |              |              |             |              |              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 9,42056E-12  | 2,32289E-12  | -2,4441E-12  | -3,01385E-12 | -2,69997E-12 | 0           | -3,96202E-11 | -2,19048E-09 | -7,85099E-10 | -2,74092E-09 | -2,12412E-09 |
| 2,32289E-12  | 9,19264E-12  | 1,62462E-14  | -3,81927E-12 | -4,19096E-12 | 0           | 1,68017E-09  | -1,43426E-09 | 9,0798E-10   | -2,65075E-09 | -1,33785E-09 |
| -2,4441E-12  | 1,62462E-14  | 7,70322E-12  | 6,481E-13    | -2,2851E-12  | 0           | 2,08031E-09  | -1,39143E-09 | 1,2562E-09   | -2,79755E-09 | -1,28392E-09 |
| -3,01385E-12 | -3,81927E-12 | 6,481E-13    | 8,75582E-12  | 1,78827E-12  | 0           | 3,4914E-09   | 8,56795E-10  | 3,20424E-09  | -6,71992E-10 | 9,38748E-10  |
| -2,69997E-12 | -4,19096E-12 | -2,2851E-12  | 1,78827E-12  | 9,53304E-12  | 0           | 2,35791E-09  | 7,28353E-10  | 2,21538E-09  | -2,6513E-10  | 7,7908E-10   |
| 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0           | 0            | 2,17572E-24  | -2,90096E-24 | 1,08786E-24  | 1,45048E-24  |
| -3,96202E-11 | 1,68017E-09  | 2,08031E-09  | 3,4914E-09   | 2,35791E-09  | 1,60755E-24 | 1,27777E-05  | -2,12245E-06 | -2,43685E-06 | -1,64676E-06 | -2,12058E-06 |
| -2,19048E-09 | -1,43426E-09 | -1,39143E-09 | 8,56795E-10  | 7,28353E-10  | 3,90151E-24 | -2,12245E-06 | 1,15999E-05  | -2,72839E-06 | -2,45667E-06 | -2,77382E-06 |
| -7,85099E-10 | 9,0798E-10   | 1,2562E-09   | 3,20424E-09  | 2,21538E-09  | 3,42999E-24 | -2,43685E-06 | -2,72839E-06 | 1,28502E-05  | -2,21604E-06 | -2,71986E-06 |
| -2,74092E-09 | -2,65075E-09 | -2,79755E-09 | -6,71992E-10 | -2,6513E-10  | 5,26215E-24 | -1,64676E-06 | -2,45667E-06 | -2,21604E-06 | 1,26638E-05  | -2,432E-06   |
| -2,12412E-09 | -1,33785E-09 | -1,28392E-09 | 9,38748E-10  | 7,7908E-10   | 2,31423E-24 | -2,12058E-06 | -2,77382E-06 | -2,71986E-06 | -2,432E-06   | 1,14759E-05  |

|                         |                              |                         |                         |                         |                         |                         |                         |                        |                         |                         |
|-------------------------|------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 9,42x10 <sup>-12</sup>  | 2,32x10 <sup>-12</sup>       | -2,44x10 <sup>-12</sup> | -3,01x10 <sup>-12</sup> | -2,70x10 <sup>-12</sup> | 0                       | -3,96x10 <sup>-10</sup> | -2,19x10 <sup>-9</sup>  | -7,85x10 <sup>-9</sup> | --2,74x10 <sup>-9</sup> | -2,12x10 <sup>-9</sup>  |
| 2,32x10 <sup>-12</sup>  | <b>8,80x10<sup>-12</sup></b> | -4,75x10 <sup>-13</sup> | -4,00x10 <sup>-12</sup> | -4,30x10 <sup>-12</sup> | 0                       | 8,27x10 <sup>-10</sup>  | -1,04x10 <sup>-9</sup>  | 3,37x10 <sup>-10</sup> | -1,74x10 <sup>-9</sup>  | -9,75x10 <sup>-10</sup> |
| -2,44x10 <sup>-12</sup> | -4,75x10 <sup>-12</sup>      | 7,23x10 <sup>-12</sup>  | 4,06x10 <sup>-13</sup>  | -2,44x10 <sup>-12</sup> | 0                       | 1,10 x10 <sup>-9</sup>  | -9,70x10 <sup>-10</sup> | 5,90x10 <sup>-10</sup> | -1,79x10 <sup>-9</sup>  | -9,03x10 <sup>-10</sup> |
| -3,01x10 <sup>-12</sup> | -4,00x10 <sup>-12</sup>      | 4,06x10 <sup>-13</sup>  | 7,95x10 <sup>-12</sup>  | 1,19 x10 <sup>-12</sup> | 0                       | 2,44 x10 <sup>-9</sup>  | 9,75x10 <sup>-10</sup>  | 2,42x10 <sup>-9</sup>  | 1,66x10 <sup>-11</sup>  | 1,02x10 <sup>-9</sup>   |
| -2,70x10 <sup>-12</sup> | -4,30x10 <sup>-12</sup>      | -2,44x10 <sup>-12</sup> | 1,19x10 <sup>-12</sup>  | 9,17 x10 <sup>-12</sup> | 0                       | 1,68 x10 <sup>-9</sup>  | 7,81x10 <sup>-10</sup>  | 1,70x10 <sup>-9</sup>  | 1,53x10 <sup>-10</sup>  | 8,05x10 <sup>-10</sup>  |
| 0                       | 0                            | 0                       | 0                       | 0                       | 0                       | -3,71x10 <sup>-24</sup> | 3,74x10 <sup>-24</sup>  | 3,74x10 <sup>-24</sup> | 2,10x10 <sup>-24</sup>  | 2,81x10 <sup>-24</sup>  |
| -3,96x10 <sup>-10</sup> | 8,27x10 <sup>-10</sup>       | 1,10x10 <sup>-9</sup>   | 2,44x10 <sup>-9</sup>   | 1,68x10 <sup>-9</sup>   | -3,71x10 <sup>-24</sup> | 7,56x10 <sup>-6</sup>   | -1,08x10 <sup>-6</sup>  | -1,23x10 <sup>-6</sup> | -8,83x10 <sup>-7</sup>  | -1,08x10 <sup>-6</sup>  |
| -2,19x10 <sup>-9</sup>  | -1,04x10 <sup>-9</sup>       | -9,70x10 <sup>-10</sup> | 9,75x10 <sup>-10</sup>  | 7,81x10 <sup>-10</sup>  | 3,74x10 <sup>-24</sup>  | -1,08x10 <sup>-6</sup>  | 6,84x10 <sup>-6</sup>   | -1,41x10 <sup>-6</sup> | -1,23x10 <sup>-6</sup>  | -1,37x10 <sup>-6</sup>  |
| -7,85x10 <sup>-9</sup>  | 3,37x10 <sup>-10</sup>       | 5,90x10 <sup>-10</sup>  | 2,42x10 <sup>-9</sup>   | 1,70x10 <sup>-9</sup>   | 3,74x10 <sup>-24</sup>  | -1,23x10 <sup>-6</sup>  | -1,41x10 <sup>-6</sup>  | 7,77x10 <sup>-6</sup>  | -1,18x10 <sup>-6</sup>  | -1,40x10 <sup>-6</sup>  |
| -2,74x10 <sup>-9</sup>  | -1,74x10 <sup>-9</sup>       | -1,79x10 <sup>-9</sup>  | 1,66x10 <sup>-11</sup>  | 1,53x10 <sup>-10</sup>  | -2,34x10 <sup>-25</sup> | -8,83x10 <sup>-7</sup>  | -1,23x10 <sup>-6</sup>  | -1,18x10 <sup>-6</sup> | 7,52x10 <sup>-6</sup>   | -1,21x10 <sup>-6</sup>  |
| -2,12x10 <sup>-9</sup>  | -9,75x10 <sup>-10</sup>      | -9,03x10 <sup>-10</sup> | 1,02x10 <sup>-9</sup>   | 8,05x10 <sup>-10</sup>  | 2,64x10 <sup>-24</sup>  | -1,08x10 <sup>-6</sup>  | -1,37x10 <sup>-6</sup>  | -1,40x10 <sup>-6</sup> | -1,21x10 <sup>-6</sup>  | 6,74x10 <sup>-6</sup>   |

## IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

Calculando a raiz quadrada das variâncias se chega às precisões dos valores ajustados, ou seja:

|                      | Azimutes Ajustados |     |           | $\sigma$     |
|----------------------|--------------------|-----|-----------|--------------|
| Az <sub>12</sub> =   | 61°                | 7'  | 1,2859''  | +/- 0,6107'' |
| Az <sub>23</sub> =   | 114°               | 22' | 55,2915'' | +/- 0,6118'' |
| Az <sub>34</sub> =   | 75°                | 37' | 2,2814''  | +/- 0,5546'' |
| Az <sub>45</sub> =   | 137°               | 54' | 47,1606'' | +/- 0,5815'' |
| Az <sub>5M3</sub> =  | 112°               | 53' | 47,6766'' | +/- 0,6247'' |
| Az <sub>M3M4</sub> = | 30°                | 23' | 15,0816'' | +/- 0,0000'' |

| Segmento | Distância Ajustadas | $\sigma$     |
|----------|---------------------|--------------|
| M2 - 1   | 1.056,1557 m        | +/- 0,0027 m |
| 1 - 2    | 1.025,9098 m        | +/- 0,0026 m |
| 2 - 3    | 1.123,7596 m        | +/- 0,0028 m |
| 3 - 4    | 1.063,5451 m        | +/- 0,0027 m |
| 4 - M3   | 1.014,3339 m        | +/- 0,0026 m |

Do ponto de vista do ajustamento por mínimos quadrados o cálculo terminaria aqui, todavia foram solicitadas as coordenadas dos vértices da poligonal e as respectivas precisões.

Com os valores observados ajustados aplicando-se as equações

$$X_i^T = X_{Saída} + \sum d_i * \text{sen } Az_i$$

$$Y_i^T = Y_{Saída} + \sum d_i * \text{cos } Az_i$$

obtm-se as coordenadas ajustadas dos vértices da poligonal

$$\begin{aligned} X1 &= 806.772,2698 + 1.056,1557 \times \text{sen}(61^\circ 07', 2859'') = 807.697,0482 \\ Y1 &= 8.160.426,9561 + 1.056,1557 \times \text{cos}(61^\circ 07', 2859'') = 8.160.937,1028 \\ X2 &= 807.697,0482 + 1.025,9098 \times \text{sen}(114^\circ 22' 55,2915'') = 808.631,4604 \\ Y2 &= 8.160.937,1028 + 1.025,9098 \times \text{cos}(114^\circ 22' 55,2915'') = 8.160.513,5880 \\ X3 &= 808.631,4604 + 1.123,77596 \times \text{sen}(75^\circ 37' 02,2814'') = 809.719,9994 \\ Y3 &= 8.160.513,5880 + 1.123,77596 \times \text{cos}(75^\circ 37' 02,2814'') = 8.160.792,7270 \\ X4 &= 809.719,9994 + 1.063,5451 \times \text{sen}(137^\circ 54' 47,1606'') = 810.432,8479 \\ Y4 &= 8.160.792,7270 + 1.063,5451 \times \text{cos}(137^\circ 54' 47,1606'') = 8.160.003,4393 \\ XM3 &= 810.432,8479 + 1.014,3339 \times \text{sen}(112^\circ 53' 47,6766'') = 811.367,2610 \\ YM3 &= 8.160.003,4393 + 1.014,3339 \times \text{cos}(112^\circ 53' 47,6766'') = 8.159.608,7935 \end{aligned}$$

Aplicando-se uma propagação de variâncias para se obter a precisão destas coordenadas

$$\sum XY = D \times \sum La \times D^T$$

onde  $D = \frac{\partial F}{\partial La}$  que é a derivada parcial das equações de cálculo das coordenadas em relação aos valores observados e  $\sum La$  é a M.V.C obtida no ajustamento.

# IFG - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE GOIÁS

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES - 2016/1 - PROF. NILTON RICETTI XAVIER DE NAZARENO

$$D = \begin{bmatrix} d_{M21}\cos(A_{M21}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen}(A_{M21}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{M21}\text{sen}(A_{M21}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(A_{M21}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{M21}\cos(A_{M21}) & d_{12}\cos(A_{12}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen}(A_{M21}) & \text{sen}(A_{12}) & 0 & 0 & 0 \\ -d_{M21}\text{sen}(A_{M21}) & -d_{12}\text{sen}(A_{12}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(A_{M21}) & \cos(A_{12}) & 0 & 0 & 0 \\ d_{M21}\cos(A_{M21}) & d_{12}\cos(A_{12}) & d_{23}\cos(A_{23}) & 0 & 0 & 0 & \text{sen}(A_{M21}) & \text{sen}(A_{12}) & \text{sen}(A_{23}) & 0 & 0 \\ -d_{M21}\text{sen}(A_{M21}) & -d_{12}\text{sen}(A_{12}) & -d_{23}\text{sen}(A_{23}) & 0 & 0 & 0 & \cos(A_{M21}) & \cos(A_{12}) & \cos(A_{23}) & 0 & 0 \\ d_{M21}\cos(A_{M21}) & d_{12}\cos(A_{12}) & d_{23}\cos(A_{23}) & d_{34}\cos(A_{34}) & 0 & 0 & \text{sen}(A_{M21}) & \text{sen}(A_{12}) & \text{sen}(A_{23}) & \text{sen}(A_{34}) & 0 \\ -d_{M21}\text{sen}(A_{M21}) & -d_{12}\text{sen}(A_{12}) & -d_{23}\text{sen}(A_{23}) & -d_{34}\text{sen}(A_{34}) & 0 & 0 & \cos(A_{M21}) & \cos(A_{12}) & \cos(A_{23}) & \cos(A_{34}) & 0 \\ d_{M21}\cos(A_{M21}) & d_{12}\cos(A_{12}) & d_{23}\cos(A_{23}) & d_{34}\cos(A_{34}) & d_{45}\cos(A_{45}) & 0 & \text{sen}(A_{M21}) & \text{sen}(A_{12}) & \text{sen}(A_{23}) & \text{sen}(A_{34}) & \text{sen}(A_{45}) \\ -d_{M21}\text{sen}(A_{M21}) & -d_{12}\text{sen}(A_{12}) & -d_{23}\text{sen}(A_{23}) & -d_{34}\text{sen}(A_{34}) & -d_{45}\text{sen}(A_{45}) & 0 & \cos(A_{M21}) & \cos(A_{12}) & \cos(A_{23}) & \cos(A_{34}) & \cos(A_{45}) \end{bmatrix}$$

Finalmente

| Vértice         | Coordenadas Calculadas Ajustadas |              |                  |              |
|-----------------|----------------------------------|--------------|------------------|--------------|
|                 | E                                | $\sigma_E$   | N                | $\sigma_N$   |
| 1               | 807.697,0482 m                   | +/- 0,0028 m | 8.160.937,1028 m | +/- 0,0031 m |
| 2               | 808.631,4604 m                   | +/- 0,0033 m | 8.160.513,5880 m | +/- 0,0044 m |
| 3               | 809.719,9994 m                   | +/- 0,0035 m | 8.160.792,7270 m | +/- 0,0044 m |
| 4               | 810.432,8479 m                   | +/- 0,0026 m | 8.160.003,4393 m | +/- 0,0031 m |
| M <sub>3c</sub> | 811.367,2610 m                   | +/- 0,0000 m | 8.159.608,7935 m | +/- 0,0000 m |

Obs: O último vértice se refere às coordenadas do marco M3 calculadas