TÉCNICO EM
AGRIMENSURA

MÓDULO I

MATEMÁTICA APLICADA À AGRIMENSURA

Ineprotec

2025 - INEPROTEC

Diretor Pedagógico	EDILVO DE SOUSA SANTOS
Diagramação	MICHEL MARTINS NOGUEIRA
Capa	MICHEL MARTINS NOGUEIRA
Elaboração	INEPROTEC

Atualizações: A presente obra pode apresentar atualizações futuras. Esforçamo-nos ao máximo para entregar ao leitor uma obra com a melhor qualidade possível e sem erros técnicos ou de conteúdo. No entanto, nem sempre isso ocorre, seja por motivo de alteração de software, interpretação ou falhas de diagramação e revisão. Sendo assim, disponibilizamos em nosso site a seção mencionada (Atualizações), na qual relataremos, com a devida correção, os erros encontrados na obra e sua versão disponível. Solicitamos, outros sim, que o leitor faça a gentileza de colaborar com a perfeição da obra, comunicando eventual erro encontrado por meio de mensagem para contato@ineprotec.com.br.

VERSÃO 2.0 (01.2025)

Ineprotec - Instituto de Ensino Profissionalizante e Tecnico Eireli
Quadra 101, Conjunto: 02, Lote: 01 - Sobreloja
Recanto das Emas - CEP: 72.600-102 - Brasília/DF
E-mail: contato@ineprotec.com.br
www.ineprotec.com.br

Sumário

MÓDULO I

MATEMÁTICA APLICADA À AGRIMENSURA

TÉCNICO EM AGRIMENSURA

Abertura

SOBRE A INSTITUIÇÃO

Educação Tecnológica, Inteligente e Eficiente

O Instituto de Ensino Profissionalizante e Técnico (INEPROTEC) é uma instituição de ensino que valoriza o poder da educação e seu potencial de transformação.

Nascemos da missão de levar educação de qualidade para realmente impactar a vida dos nossos alunos. Acreditamos muito que a educação é a chave para a mudança.

Nosso propósito parte do princípio de que a educação transforma vidas. Por isso, nossa base é a inovação que, aliada à educação, resulta na formação de alunos de grande expressividade e impacto para a sociedade. Aqui no INEPROTEC, o casamento entre tecnologia, didática e interatividade é realmente levado a sério e todos os dias otimizado para constante e contínua evolução.

Missão

A nossa missão é ser símbolo de qualidade, ser referência na área educacional presencial e a distância, oferecendo e proporcionando o acesso e permanência a cursos técnicos, desenvolvendo e potencializando o talento dos estudantes, tornando-os, assim, profissionais de sucesso e cidadãos responsáveis e capazes de atuar como agentes de mudança na sociedade.

Visão

O INEPROTEC visa ser um instituto de ensino profissionalizante e técnico com reconhecimento nacional, comprometido com a qualidade e excelência de seus cursos, traçando pontes para oportunidades de sucesso, tornando-se, assim, objeto de desejo para os estudantes.

Valores

Ciente das qualificações exigidas pelo mercado de trabalho, o INEPROTEC tem uma visão que prioriza a valorização de cursos essenciais e pouco ofertados para profissionais que buscam sempre a atualização e especialização em sua área de atuação.

SOBRE O CURSO

O curso TÉCNICO EM AGRIMENSURA pertence ao Eixo Tecnológico de INFRAESTRUTURA. Vejamos algumas informações importantes sobre o curso TÉCNICO EM AGRIMENSURA relacionadas ao **perfil profissional de conclusão e suas habilidades**,

quesitos fundamentais para atuação, campo de atuação e, também, algumas sugestões interessantes para continuação dos estudos optando por **Especializações Técnicas** e/ou **Cursos de Graduação.**

Perfil profissional de conclusão e suas habilidades

- Executar levantamentos geodésicos e topográficos.
- Utilizar equipamentos e métodos específicos.
- Fazer a locação de obras de sistemas de transporte, civis, industriais e rurais.
- Delimitar glebas.
- Identificar elementos na superfície e pontos de apoio para georreferenciamento e amarração.
- Organizar e supervisionar ações de levantamento e mapeamento.
- Efetuar aerotriangulação.
- Restituir fotografias aéreas para a elaboração de produtos cartográficos em diferentes sistemas de referências e projeções.
- Processar e interpretar dados de sensoriamento remoto, fotos terrestres e fotos aéreas de modo integrado a dados de cartas, mapas e plantas.
- Utilizar ferramentas de geoprocessamento.
- Executar cadastro técnico multifinalitário.
- Identificar métodos e equipamentos para a coleta de dados.
- Participar do planejamento de loteamentos, desmembramentos e obras de engenharia.
- Dar assistência técnica na compra, venda e utilização de produtos e equipamentos especializados.
- Executar levantamentos e coletas de dados espaciais e geométricos.

Quesitos fundamentais para atuação

- Conhecimentos e saberes relacionados à execução de levantamentos geodésicos e topográficos, a vistorias e arbitramentos relativos à Agrimensura, com o intuito de permitir a organização fundiária do espaço rural, incluindo as medições, as demarcações, as divisões, os mapeamentos, as avaliações e a regulamentação das terras.
- Compromisso e ética para assegurar o cumprimento da legislação e das normas técnicas vigentes.

- Habilidade de liderança de equipes para solução de problemas técnicos e trabalhistas e para a gestão de conflitos.

Campo de atuação

- Empresas de mapeamento e levantamento topográfico, de comercialização de equipamentos e instrumentos específicos da função, de aerolevantamentos, de logística e distribuição de cargas
- Forças Armadas.
- Concessionárias de serviços públicos.
- Agências reguladoras.

Sugestões para Especialização Técnica

- Especialização Técnica em Cadastramento Ambiental Rural.
- Especialização Técnica em Georreferenciamento de Imóveis Rurais.
- Especialização Técnica em Monitoramento de Estruturas.

Sugestões para Cursos de Graduação

- Curso Superior de Tecnologia em Agrimensura.
- Curso Superior de Tecnologia em Geoprocessamento.
- Curso Superior de Tecnologia em Estradas.
- Curso Superior de Tecnologia em Construção Civil.
- Bacharelado em Engenharia de Agrimensura.
- Bacharelado em Engenharia Cartográfica.
- Bacharelado em Engenharia Cartográfica e de Agrimensura.
- Bacharelado em Geografia.
- Bacharelado em Engenharia Ambiental.

SOBRE O MATERIAL

Os nossos materiais de estudos são elaborados pensando no perfil de nossos cursistas, contendo uma estruturação simples e clara, possibilitando uma leitura dinâmica e com volume de informações e conteúdos considerados básicos, mas fundamentais e essenciais para o desenvolvimento de cada disciplina. Lembrando que nossas apostilas não são os únicos meios de estudo.

Elas, juntamente com as videoaulas e outras mídias complementares, compõem os vários recursos midiáticos que são disponibilizados por nossa Instituição, a fim de proporcionar subsídios suficientes a todos no processo de ensino-aprendizagem durante o curso.

Divisão do Conteúdo

Este material está estruturado em três partes:

1) ABERTURA.
2) BASE TEÓRICA.
3) SESSÕES ESPECIAIS.

Parte 1 - ABERTURA

- Sobre a Instituição.
- Sobre o Curso.
- Sobre o Material.

Parte 2 – BASE TEÓRICA

- Conceitos.
- Observações.
- Exemplos.

Parte 3 – SESSÕES ESPECIAIS

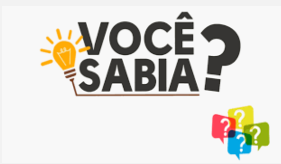
- Mapa de Estudo.
- Síntese Direta.
- Momento Quiz.

Boxes

Além dessas três partes, no desenvolvimento da BASE TEÓRICA, temos alguns BOXES interessantes, com intuito de tornar a leitura mais agradável, mesclando um estudo mais profundo e teórico com pausas pontuais atrativas, deixando a leitura do todo “mais leve” e interativa.

Os BOXES são:

- VOCÊ SABIA

	São informações complementares contextualizadas com a base teórica, contendo curiosidades que despertam a imaginação e incentivam a pesquisa.

- PAUSA PARA REFLETIR...

	Um momento especial para descansar a mente do estudo teórico, conduzindo o cursista a levar seus pensamentos para uma frase, mensagem ou indagação subjetiva que leve a uma reflexão pessoal e motivacional para o seu cotidiano.

- SE LIGA NA CHARADA!

	Se trata de um momento descontraído da leitura, com a apresentação de enigmas e indagações divertidas que favorecem não só a interação, mas também o pensamento e raciocínio lógico, podendo ser visto como um desafio para o leitor.

Base Teórica

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência que busca estabelecer, de maneira clara e estruturada, conceitos e técnicas para a compreensão de fenômenos. Entre os tópicos de estudo da Matemática, estão os números e suas operações, as estruturas algébricas, as formas geométricas, a probabilidade, a análise de dados, entre muitos outros. Apesar de presentes em todo o estudo matemático, esses conteúdos estão concentrados em áreas específicas, como a aritmética, álgebra, geometria e estatística.

Com a realidade da educação que se vivencia hoje, pode-se notar uma “bola de neve” de alunos que foram empurrados de ano a ano, com déficits de aprendizagem em matemática. O agravante disso são alunos desmotivados em sala de aula, pois aquilo que está sendo ensinado não faz nenhum sentido para eles; por mais que tentem, existe algo faltando, algo ficou para trás no decorrer dos seus anos escolares. Por essa razão, é preciso resgatar esses alunos, proporcionando momentos para que eles recuperem aquilo que não foi aprendido em anos anteriores, além de proporcionar situações para que esses alunos se reencontrem no processo da construção do saber, do conhecimento.

Na matemática, nota-se que os alunos possuem dificuldades nos processos aritméticos (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação), assim como em procedimentos algébricos, os quais necessitam dos conceitos aritméticos para sua construção e desenvolvimento. Se for feita uma análise dos currículos de cada ano escolar, será notado o quanto o conteúdo sofre pequenos acréscimos, criando-se, assim, um grande abismo quando o professor introduz os conceitos algébricos de maneira brusca, causando uma ruptura da álgebra em relação à aritmética. É comum notar alunos no final do Ensino Fundamental II ou até mesmo no Ensino Médio com dificuldades em processos aritméticos de multiplicação, divisão ou até mesmo adição, assim como alunos sem nenhuma noção de como solucionar uma equação do 1º grau.

Diante desses fatos, surge a necessidade de se trilhar um caminho paralelo ao ensino da matemática curricular (dos conteúdos programáticos de cada ano escolar). Este caminho é denominado “Ensino da Matemática Básica”**.** A importância da matemática básica provém justamente de todos esses fatores citados e suas consequências para a vida escolar e social do aluno. Sendo assim, torna-se essencial o acompanhamento de perto dos alunos, trabalhando essa dificuldade que possuem quanto aos conceitos matemáticos e com isso proporcionando motivação para o estudo da matemática, dando sentido àquilo que se aprende durante os anos escolares.

ARITMÉTICA BÁSICA

A aritmética é parte básica da Matemática que lida com números. Foca em operações simples e resolução de problemas cotidianos envolvendo os números. Inclui tópicos como adição, subtração, multiplicação e divisão. É a base para o aprendizado de áreas matemáticas mais avançadas, como a teoria dos números.

O estudo da aritmética é importante porque, para que seja possível resolver problemas mais complexos, é necessário compreender bem essas quatro operações matemáticas citadas. Além de serem úteis em cálculos mais complexos, essas quatro operações (soma, subtração, divisão e multiplicação) são muito utilizadas em situações do cotidiano, tais como a soma dos valores dos produtos em uma compra no supermercado, ou a multiplicação do valor do litro da gasolina para saber quanto deverá ser pago para encher o tanque do carro.

OBSERVAÇÕES:

Vale ressaltar que em muitos cálculos há a necessidade de saber manipular não somente números positivos e inteiros, mas também números negativos e com vírgula, visto que tais números também são frequentes no cotidiano.

As quatro operações

Soma

A soma (ou adição) é uma das operações matemáticas mais frequentes no cotidiano, podendo envolver tantos números positivos quanto negativos. O sinal indicativo é o sinal mais (**+**). A soma consiste em adicionar dois ou mais números, conhecido como parcelas, que produz em todos os casos um único resultado que chamamos de soma ou total**.**

EXEMPLOS:

a) João foi ao supermercado e comprou R$ 115,15 em mercadorias. Quando retornou a casa, ele viu que seu filho também havia ido ao mercado e comprado os mesmos produtos. Quanto os dois gastaram juntos?

Resolução:

Como eles gastaram a mesma quantia, basta realizar a soma de 115,15 e 115,15:

1 1

115,15

+ 115,15

230,30

Juntos, os dois gastaram R$ 230,30.

b) Ana foi no supermercado e comprou:

- 1 pacote de feijão por R$ 5,20.
- 1 pacote de arroz por R$ 10,50.
- 1 pacote de bolacha por R$ 1,30.
- 1 bandeja de iogurte por R$ 4,80.
- 2 litros de óleo por R$ 3,20 cada.

Calcule quanto Ana gastou.

Resolução:

Para resolver essa questão, devemos montar uma expressão numérica:

1 pacote de feijão + 1 pacote de arroz + 1 pacote bolacha + 1 bandeja de iogurte + 2 litros de óleo

Substitua os itens da lista pelos seus respectivos valores:

1 2

5,20

10,50

+1, 30

4,80

3,20

3,20

28,20

Logo, Ana gastou R$ 28,20.

Subtração

Subtração é uma das quatro operações matemáticas básicas na qual, para cada dois valores, um é subtraído do outro, ou seja, uma quantidade é retirada de outra, e o valor restante é o resultado dessa operação.

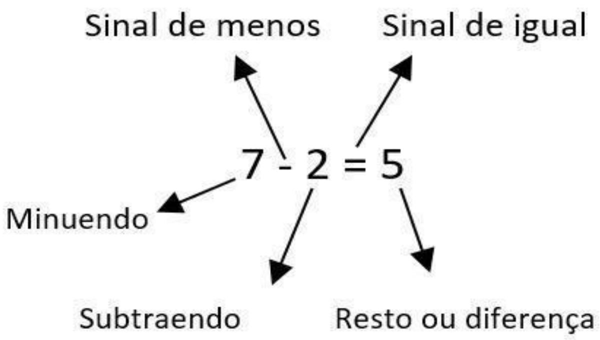


Figura 1: *Representação da operação de subtração.*

EXEMPLO:

Uma fábrica de sapatos possui 5 235 pares de calçados em estoque e recebe um pedido, de um único cliente, de 4989 pares de calçados. Quantas unidades de calçados sobraram em estoque após a entrega desse pedido?

Resolução:

Primeiro precisamos entender que um par de sapatos possui duas unidades de calçados, ou seja, 1 par é igual a 2 sapatos. Subtraindo do número de pares em estoque o número de pares que foi pedido, temos:

$$
\begin{array}{rcccc}
 & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 11} & {\scriptstyle 12} & {\scriptstyle 15} \\
 & \mathbf{5} & \cancel{\mathbf{2}} & \cancel{\mathbf{3}} & \cancel{\mathbf{5}} \\
- & \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \\
\hline
 & & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6}
\end{array}
$$

Repare que o exercício pergunta quantas unidades de calçados sobraram em estoque. O número 246 é relativo ao número de pares de calçados, logo:

$$
\begin{array}{rccc}
 & {\scriptstyle 1} & & \\
 & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\
+ & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\
\hline
 & \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{2}
\end{array}
$$

Portanto, são 492 unidades de calçados em estoque.

Multiplicação

A multiplicação é uma das operações matemáticas básicas. Ela é uma evolução natural da adição, pois é definida de modo que represente a soma de determinado número de conjuntos que possuem a mesma quantidade de elementos. Essa soma pode ser representada pelo símbolo "x" ou " · ".

Trazendo para o cotidiano, sabemos que é usual comprar muitos exemplares de um mesmo produto em supermercados. Caso compre oito produtos que custem R$ 2,00, o total a ser pago será de R$ 16,00, pois somamos o valor R$ 2,00 oito vezes.

2+2+2+2+2+2+2+2 = 8 . 2 = 16

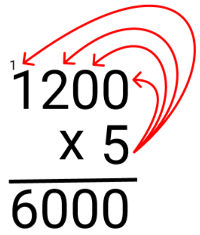


Figura 2: *Representação de multiplicação.*

EXEMPLO:

Flávia foi a uma loja de doces e comprou:

- 3 chocolates (cada um custou R$0,50);
- 4 chicletes (cada um custou R$ 0,30);
- 5 pirulitos (cada um custou R$1,00);
- 2 balinhas (cada um custou R$0,30).

Calcule o valor total que Flávia gastou em dinheiro.

Resolução:

Para resolver essa questão, devemos montar uma expressão numérica que apresente a quantidade de cada doce e seus respectivos valores:

(3 . 0,50) + (4 . 0,30) + (5 . 1,00) + (2 . 0,30)

1,50 + 1,20 + 5,00 + 0,60

8,30

Flávia gastou, no total, R$ 8,30.

Divisão

A divisão é uma das quatro operações fundamentais da aritmética. Consiste em dividir dois números, o dividendo e o divisor, que produz dois resultados chamados de quociente e resto. Seu símbolo é o " ÷ ". No entanto, pode variar, por exemplo, no teclado do computador o símbolo adotado é a barra " / ", em outros casos, " : ".

Figura 3: *Representação da divisão sem resto.*

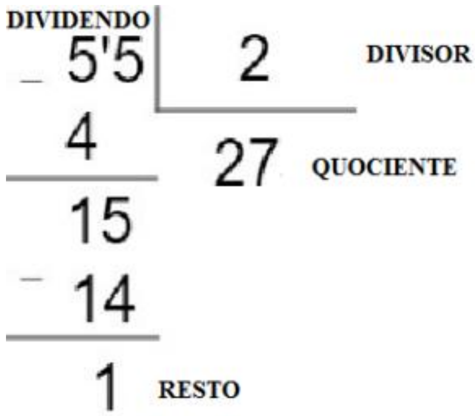


Figura 4: *Representação de divisão com resto.*

EXEMPLO:

Para realizar um campeonato de vôlei em uma escola, o professor de educação física decidiu dividir os 96 alunos em grupos. Sabendo que cada equipe para esse esporte deve ser composta por 6 pessoas, quantas equipes o professor conseguiu formar?

Resolução:

Para encontrar o número de equipes, basta dividir o número total de alunos pelo número de pessoas que deve conter em cada equipe.

```
dividendo →   9'6 |_6_  ←  divisor
             - 6   16   ←  quociente
               36
             - 36
resto     →     0
```

Portanto, não há resto na divisão e todos os alunos serão inseridos nas 16 equipes formadas.

Números primos

Um número é classificado como primo se ele é maior do que um e é divisível apenas por um e por ele mesmo. Apenas números naturais são classificados como primos. Antes de saber mais sobre o **número primo**, é importante relembrar algumas regras de divisibilidade, que ajudam na identificação de quais números não são primos.

Critérios de divisibilidade

Vejamos as principais regras de divisibilidade:

- ✓ **Divisibilidade por 2:** todo número par é divisível por 2. Os números pares são aqueles terminados em 0, 2, 4, 6 e 8.
- ✓ **Divisibilidade por 3**: um número é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos der um número divisível por 3.
- ✓ **Divisibilidade por 4**: um número é divisível por 4 se ele for divisível duas vezes por 2 ou, então, se seus dois últimos algarismos forem divisíveis por 4.
- ✓ **Divisibilidade por 5**: todo número terminado em 0 ou 5 é divisível por cinco.
- ✓ **Divisibilidade por 6:** se um número for divisível por 2 e também divisível por 3, será divisível por 6.
- ✓ **Divisibilidade por 7:** um número é divisível por 7 se a diferença entre o dobro do último algarismo e o restante do número resultar em um número múltiplo de 7.
- ✓ **Divisibilidade por 10:** um número é divisível por 10 quando termina em zero, ou seja, seu último algarismo for 0.

VOCÊ SABIA?

Para encontrar cada número primo menor do que 100, utilizamos o "**Crivo de Eratóstenes**".

Na tabela a seguir (figura 5), cancelaremos os números que não são primos seguindo esta ordem:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Figura 5: *Tabela para encontrar os números primos de 1 à 100 ("Crivo de Eratóstenes").*

- ✓ O número 1 estará fora, pois, pela condição inicial, os números primos são maiores que um (será destacado de **preto**);
- ✓ Os números terminados em 0, 2, 4, 6 e 8 estarão fora porque são divisíveis por dois (serão destacados **vermelho**);
- ✓ Os números terminados em 5 estarão fora porque são divisíveis por 5 (serão destacados de **azul**). Os números terminados em zero já foram cortados;
- ✓ Os números cuja soma dos algarismos for 3 estarão fora por serem divisíveis por três (serão destacados de **laranja**);
- ✓ Os números que são divisíveis por 7 serão retirados também (serão destacados de **verde**).

Os números destacados em amarelo são aqueles que só são divisíveis por 1 e por eles mesmos, isto é, não obedecem a nenhum dos critérios de divisibilidade que comentamos acima. Portanto, pelo "Crivo de

Eratóstenes", os números **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97** são os únicos números primos menores que 100.

Na imagem inicial do texto, há vários números primos entre 100 e 1000. Hoje já se conhece uma grande quantidade de números primos, mas não se sabe qual é o maior número primo existente. Esse é um dos grandes enigmas matemáticos que farão rico o seu desvendador.

"Há um prêmio milionário para aquele que descobrir o maior dos números primos".

MMC e MDC

Os cálculos de MMC e MDC estão ligados aos múltiplos e aos divisores de um número. Esse tipo de cálculo, aprendido no ensino fundamental, é essencial para resolver muitas questões e problemas no Enem.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

O mínimo múltiplo comum, ou MMC, de dois ou mais números inteiros é o menor múltiplo inteiro positivo comum a todos eles.

- ✓ MMC entre 6 e 8 é 24 (denotado por MMC 6, 8 = 24), pois o menor múltiplo inteiro positivo comum deles é 24.
- ✓ MMC entre 5, 6 e 8 é 120 (denotado por MMC 5, 6, 8 = 120), pois o menor múltiplo inteiro positivo comum deles é 120.

O MMC é muito útil quando se adicionam ou subtraem frações, pois é necessário um mesmo denominador comum durante esses processos. Não é necessário que esse denominador comum seja o MMC, mas a sua escolha minimiza os cálculos.

EXEMPLO:

Calcule o MMC entre 8, 12 e 28:

Resolução:

- Primeiro...

Alinhamos os três números, 8, 12 e 28, e dividimos todos os números que podem ser divididos pelo primeiro primo 2.

Na linha de baixo anotamos cada quociente obtido:

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 12 & 28 & 2 \\ 4 & 6 & 14 & \end{array}$$

- Depois...

Repetimos esse procedimento sucessivamente com o 2, depois com o 3 e, depois com o 7, até que a última linha só contenha algarismos 1:

8	12	28	2
4	6	14	2
2	3	7	2
1	3	7	3
1	1	7	7
1	1	1	

- Por último...

Agora, multiplicamos todos os fatores primos na coluna da direita, obtendo o MMC procurado:

MMC 8, 12, 28 = 2 · 2 · 2 · 3 · 7 = 168

Portanto, o MMC entre 8, 12 e 28 é 168.

MMC 8, 12, 28 = 168

Máximo Divisor Comum (MDC)

O máximo divisor comum, ou MDC, de dois ou mais números inteiros é o maior divisor inteiro comum a todos eles.

- ✓ MDC entre 16 e 36 é o 4 (denotado por MDC 16, 36 = 8), pois o maior divisor inteiro comum a todos eles é 4.
- ✓ MDC entre 30, 54 e 72 é 6 (denotado por MDC 30, 54, 72 = 6) pois o maior divisor inteiro comum a todos eles é 6.

EXEMPLO:

Calcule o MMC entre 30, 36 e 72:

Resolução:

- Primeiro...

Alinhamos os três números, 30, 36 e 72, e dividimos todos os números que podem ser divididos pelo primeiro primo 2. Na linha de baixo anotamos cada quociente obtido:

30	36	72	2
15	18	36	

- Depois...

Repetimos esse procedimento com o próximo primo que divida os três quocientes e, assim, sucessivamente, até que não haja mais primos comuns:

30	36	72	2
15	18	36	3
5	9	12	

- Por último...

Agora, multiplicamos todos os fatores primos na coluna da direita, obtendo o MDC procurado:

MDC 30, 36, 72 = 2 · 3 = 6

Portanto, o MDC entre 30, 36 e 72 é 6.

MMC 30, 36, 72 = 6

Frações

Representação de uma fração

Fração é a representação matemática das partes de determinada quantidade que foi dividida em pedaços ou fragmentos iguais. As frações são úteis em várias situações, principalmente para representar algo que não conseguimos apresentar através de números naturais.

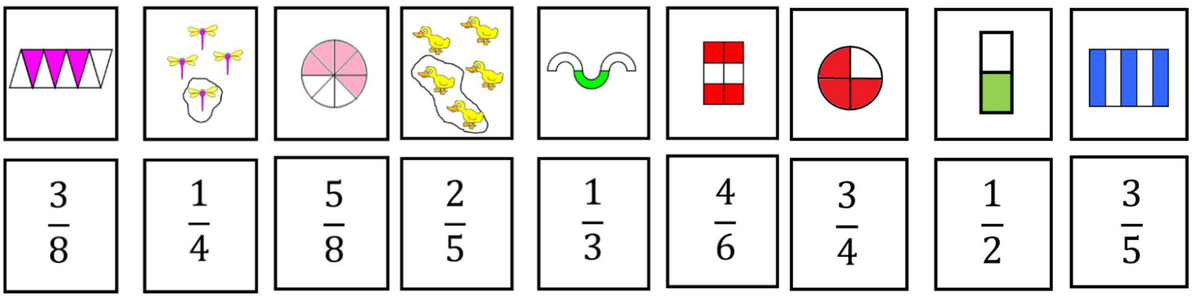


Figura 6: *Representação de fração.*

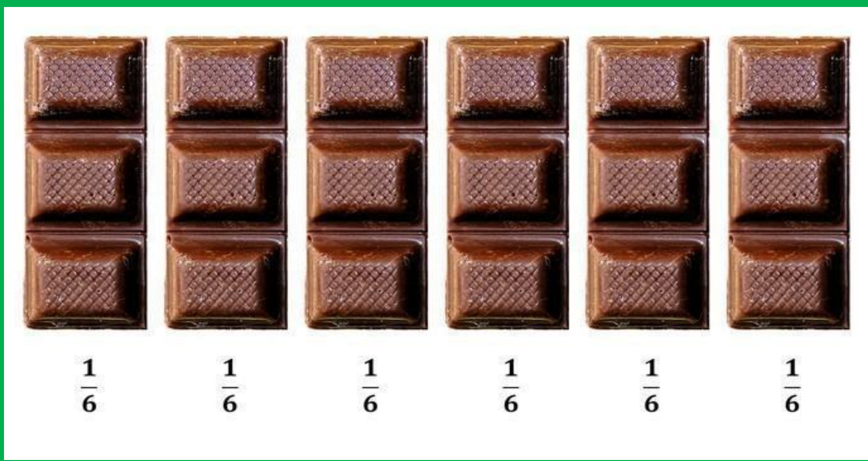
EXEMPLO:

Observe a barra de chocolate a seguir e responda: quantos quadradinhos deve-se comer para consumir 5/6 da barra?

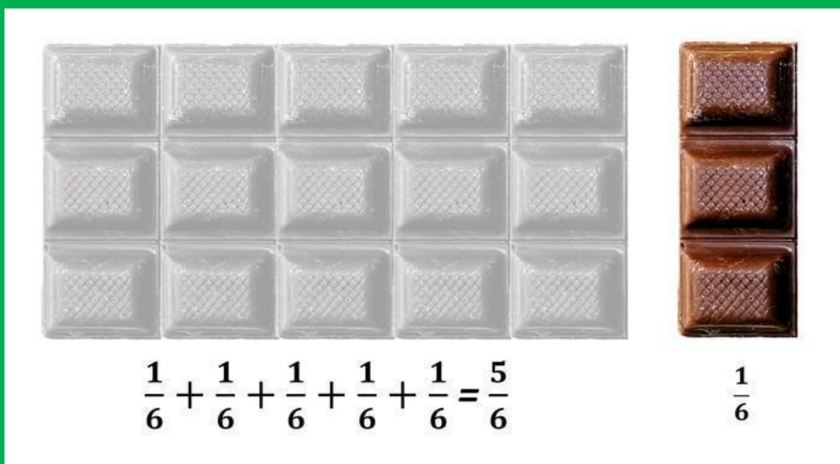
Figura 7: *Barra de chocolate.*

Resolução:

Se contarmos quantos quadradinhos de chocolate temos na barra apresentada na imagem encontraremos o número de 18. O denominador da fração consumida (5/6) é 6, ou seja, a barra foi dividida em 6 partes iguais, cada uma com 3 quadradinhos.



Para consumir a fração de 5/6 então devemos pegar 5 pedaços de 3 quadradinhos cada e, assim, consumir 15 quadradinhos de chocolate.



RESPOSTA: 15 quadrinhos.

VOCÊ SABIA?

A história das frações

A história das frações remonta o Antigo Egito (3.000 a.C.) e traduz a necessidade e a importância para o ser humano acerca dos números fracionários. Naquele tempo, os matemáticos marcavam suas terras para delimitá-las. Com isso, nas épocas chuvosas o rio passava do limite e inundava muitas terras e, consequentemente, as marcações. Diante disso, os matemáticos resolveram demarcá-las com cordas a fim de resolver o problema inicial das enchentes. Contudo, notaram que muitos terrenos não eram compostos somente por números inteiros, havia os terrenos que mediam partes daquele total. Foi a partir disso, que os geômetras dos faraós, começaram a utilizar os números fracionários. Note que a palavra Fração é proveniente do latim *fractus* e significa "partido".

Operações com frações

Adição de frações

Para somar frações é necessário identificar se os denominadores são iguais ou diferentes. Se forem iguais, basta repetir o denominador e somar os numeradores. Contudo, se os denominadores são diferentes, antes de somar devemos transformar as frações em frações equivalentes de mesmo denominador. Neste caso, calculamos o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre os denominadores das frações que queremos somar, esse valor passa a ser o novo denominador das frações.

Além disso, devemos dividir o MMC encontrado pelo denominador e o resultado multiplicamos pelo numerador de cada fração. Esse valor passa a ser o novo numerador.

EXEMPLOS:

$$a)\ \frac{5}{9}+\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

$$b)\ \frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{3.1+5.2}{15}=\frac{3+10}{15}=\frac{13}{15}$$

$$c)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{10.1+15.1+6.2}{30}=\frac{10+15+12}{30}=\frac{37}{30}$$

Subtração de frações

Para subtrair frações temos que ter o mesmo cuidado que temos na soma, ou seja, verificar se os denominadores são iguais. Se forem, repetimos o denominador e subtraímos os numeradores. Se forem diferentes, fazemos os mesmos procedimentos da soma, para obter frações equivalentes de mesmo denominador, aí sim podemos efetuar a subtração.

EXEMPLOS:

$a)\ \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$

$b)\ \frac{6}{7} - \frac{1}{3} = \frac{3.6 - 7.1}{21} = \frac{18 - 7}{21} = \frac{11}{21}$

Multiplicação de frações

A multiplicação de frações é feita multiplicando os numeradores entre si, bem como seus denominadores.

EXEMPLOS:

$a)\ \frac{3}{4} . \frac{1}{5} = \frac{3.1}{4.5} = \frac{3}{20}$

$b)\ \frac{7}{8} . \frac{3}{5} = \frac{21}{40}$

$c)\ \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{5}{7} = \frac{1.1.5}{2.3.7} = \frac{5}{42}$

Divisão de frações

Na divisão entre duas frações, multiplica-se a primeira fração pelo inverso da segunda, ou seja, inverte-se o numerador e o denominador da segunda fração.

EXEMPLOS:

$a)\ \frac{3}{4} : \frac{3}{2} = \frac{3}{4} . \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$b)\ \frac{15}{8} : 3 = \frac{15}{8} . \frac{1}{3} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

$c)\ \frac{3}{8} : \frac{15}{2} = \frac{3}{8} . \frac{2}{15} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$

Números decimais

Os números decimais são números racionais (Q) não inteiros expressos por vírgulas e que possuem casas decimais, por exemplo: 1,54; 4,6; 8,9, etc. Eles podem ser positivos ou negativos.

As casas decimais são contadas a partir da vírgula, por exemplo: o número 12,451 possui três casas decimais, ou seja, três algarismos após a vírgula (algarismos 4, 5 e 1).

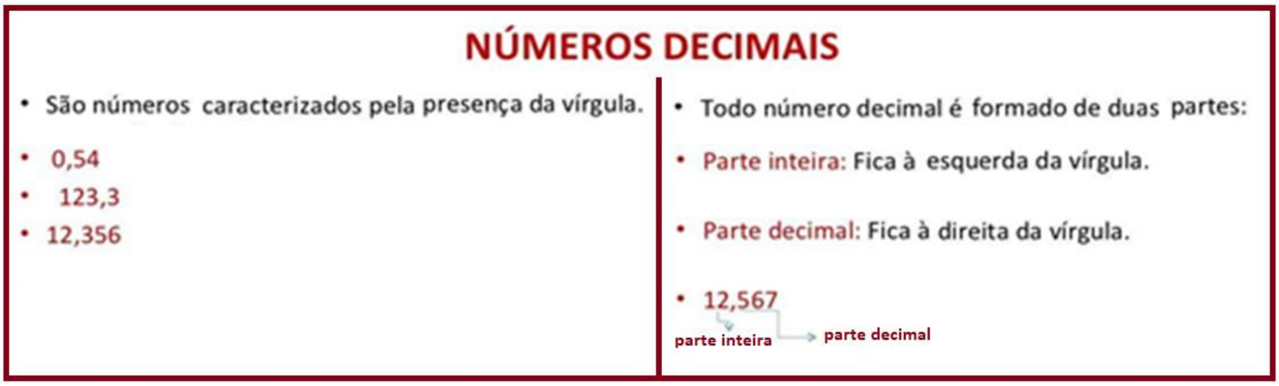


Figura 8: *Conceitos sobre os números decimais.*

OBSERVAÇÕES:

Os números decimais são aqueles que pertencem ao conjunto dos números racionais (Q) e são escritos com a utilização de uma vírgula. Esses números são formados por uma parte inteira e uma parte decimal, que se apresenta à direita da vírgula.

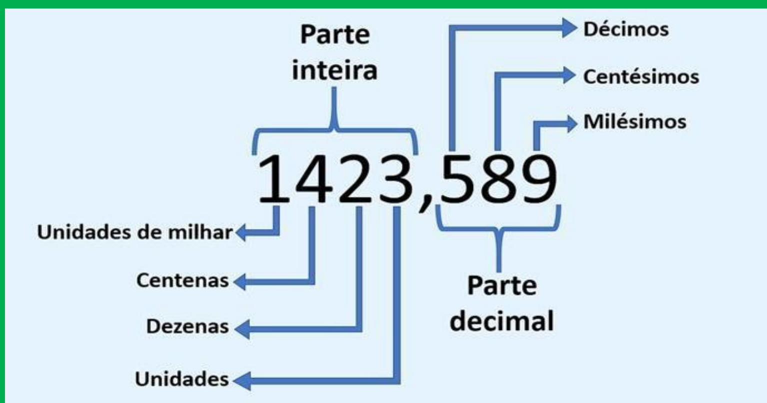


Figura 9: *Estrutura de um número decimal (ordens e partes).*

Operações com números decimais

As operações matemáticas básicas – adição, subtração, multiplicação e divisão – são realizadas com os números decimais mediante a aplicação de algumas regras que veremos a seguir.

Adição de números decimais

Na soma de números decimais, devemos somar os respectivos números de cada casa decimal, ou seja, décimos são somados com décimos, centésimos com centésimos e milésimos com milésimos. Para facilitar os cálculos, escreva os números de forma que as vírgulas fiquem uma abaixo da outra e no resultado a vírgula também deve estar alinhada.

EXEMPLOS:

a) 0,6 + 1,2

$$\begin{array}{r}
0{,}6 \\
+\ 1{,}2 \\
\hline
1{,}8
\end{array}$$

Portanto, 0,6 + 1,2 = 1,8.

Se um número apresentar mais casas decimais que o outro, você pode adicionar zeros ao número com menos casas após a vírgula para igualar a quantidade de termos.

b) 2,582 + 5,6 + 7,31

$$\begin{array}{rcccc}
U & & d & c & m \\
\overset{1}{2} & , & 5 & 8 & 2 \\
5 & , & 6 & 0 & 0 \\
+\ 7 & , & 3 & 1 & 0 \\
\hline
15 & , & 4 & 9 & 2
\end{array}$$

Portanto, 2,582 + 5,6 + 7,31 = 15,492.

Subtração de números decimais

Assim como na adição, a subtração de números decimais deve ser feita alinhando-se às vírgulas.

EXEMPLOS:

a) 3,57 – 1,45

$$\begin{array}{rccc}
U & & d & c \\
3 & , & 5 & 7 \\
-\ 1 & , & 4 & 5 \\
\hline
2 & , & 1 & 2
\end{array}$$

Portanto, 3,57 – 1,45 = 2,12.

b) 15,879 – 12,564

	D	U	,	d	c	m
	1	5	,	8	7	9
−	1	2	,	5	6	4
	0	3	,	3	1	5

Portanto, 15,879 – 12,564 = 3,315.

Multiplicação de números decimais

A operação de multiplicação com números decimais pode ser feita efetuando uma multiplicação normalmente e ao resultado adiciona-se uma vírgula para que o número de casas decimais seja igual à soma das casas decimais dos números multiplicados. Outra maneira é escrever os números decimais na forma de fração e multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador.

EXEMPLOS:

Multiplicação de um número decimal por um número natural

Ao multiplicar um número decimal por um número natural devemos repetir no resultado o número de casas decimais.

a) 3,25 x 4

$$\begin{array}{r} {}^{1}3,{}^{2}25 \\ \times\ \ \ 4 \\ \hline 13,00 \end{array}$$

Isso seria o mesmo que:

$$\text{I. } 4 \times 3,25 = 3,25 + 3,25 + 3,25 + 3,25 = 13$$

$$\text{II. } 4 \times 3,\underline{25} = 4 \times \frac{325}{100} = \frac{13\cancel{00}}{1\cancel{00}} = 13$$

Multiplicação entre números decimais

Para multiplicar números decimais realizamos, primeiramente, a multiplicação normalmente, sem levar em consideração a vírgula. Após isso, no resultado deve ser acrescentado a vírgula com o número de casas decimais após ela que corresponde à soma das casas decimais dos números multiplicados.

b) 3,5 x 2,5

Método 1:

$$\begin{array}{rl} 3{,}5 & \leftarrow \text{um algarismo após a vírgula} \\ \times\ 2{,}5 & \leftarrow \text{um algarismo após a vírgula} \\ \hline 175 & \\ 70+ & \\ \hline 8{,}75 & \leftarrow \text{dois algarismos após a vírgula} \end{array}$$

Método 2:

$$3{,}\underline{5} \times 2{,}\underline{5} = \frac{35}{10} \times \frac{25}{10} = \frac{35 \times 25}{10 \times 10} = \frac{875}{100} = 8{,}75$$

<u>Multiplicação de um número decimal por 10, 100, 1000, ...</u>

Quando multiplicamos um número decimal por 10, 100, 1000, … devemos "andar" com a vírgula para direita de acordo com o número de zeros.

c)

$$5{,}4321 \times 10 = 54{,}321$$
$$5{,}4321 \times 100 = 543{,}21$$
$$5{,}4321 \times 1000 = 5432{,}1$$

Portanto, ao multiplicar por:

- 10, "andamos" com a vírgula uma casa para direita;
- 100, "andamos" com a vírgula duas casas para direita;
- 1000, "andamos" com a vírgula três casas para direita e assim sucessivamente.

Divisão de números decimais

Para efetuar a divisão, tanto o dividendo quanto o divisor devem ter o mesmo número de casas decimais.

EXEMPLOS:

<u>Divisão de um número decimal por outro número decimal</u>

Se, por exemplo, os dois termos da divisão possuem um algarismo à direita da vírgula, então podemos multiplicar por 10 e eliminá-la.

a) 3,5 : 0,5

1º passo:

$$3{,}\underline{5} \div 0{,}\underline{5} \xrightarrow{\times 10} 35 \div 5$$

2º passo:

$$\begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ \hline -35 & 7 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Portanto, 3,5 ÷ 0,5 = 7.

<u>Divisão de um número decimal por um número natural</u>

Para efetuar esse tipo de divisão, devemos reescrever o divisor para que apresente o mesmo número de casas decimais que o dividendo. Após isso, eliminamos a vírgula, multiplicando os dois termos por 10, 100, 1000… de acordo com o número de casas decimais, e realizamos a divisão.

b) 20,5 : 5

1º passo:

20,5 ÷ 5 → 20,5 ÷ 5,0

2º passo:

$$20{,}5 \div 5{,}0 \xrightarrow{x\ 10} 205 \div 50$$

3º passo:

$$\begin{array}{r|l} 205 & 50 \\ \hline -200 & 4 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Observe que ocorreu uma divisão não exata, ou seja, a operação apresenta resto. Para continuar, devemos adicionar uma vírgula ao divisor e um zero ao resto.

4º passo:

$$\begin{array}{r|l} 205 & 50 \\ \hline -200 & 4{,}1 \\ \hline 50 & \\ -50 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Portanto, 20,5 ÷ 5 = 4,1.

<u>Divisão de um número natural por um número decimal</u>

Para efetuar a divisão, devemos adicionar uma vírgula ao dividendo e, em seguida, colocamos algarismos zeros à direita da vírgula igual ao número de casas decimais do divisor.

Se, por exemplo, o divisor apresenta uma casa decimal, então adicionamos uma vírgula seguida de um algarismo 0 ao dividendo. Multiplicando os dois termos por 10, eliminamos a vírgula e realizamos a operação normalmente.

c) 14 : 0,7

1º passo:

$$14 \div 0{,}7 \rightarrow 14{,}0 \div 0{,}7$$

2º passo:

$$14{,}\underline{0} \div 0{,}7 \xrightarrow{x\ 10} 140 \div 7$$

3º passo:

$$\begin{array}{rl} 14'0 & \underline{|\ 7\ \ } \\ \underline{-\ 14} & \ \ 20 \\ 00 & \\ \underline{-\ 00} & \\ 0 & \end{array}$$

Portanto, $14 \div 0{,}7 = 20$.

Potenciação

Potenciação ou exponenciação é a forma de abreviar a multiplicação de uma sequência de fatores iguais. Dessa forma, quando multiplicamos um número sucessivas vezes, podemos abreviar elevando-o a quantidade de vezes que o número é multiplicado.

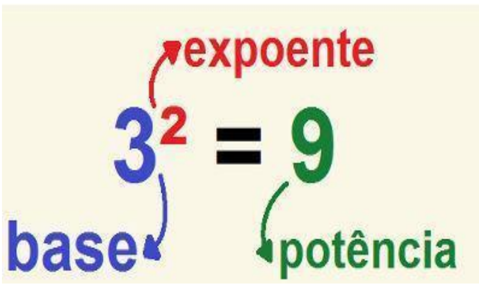


Figura 10: *Representação de potenciação.*

EXEMPLO:

Sabendo que o valor de 5^7 é 78 125, qual o resultado de 5^8?

Resolução:

Como sabemos o valor de 5^7, transformamos o número 5^8 da seguinte forma:

$$5^8 = 5^7 . 5, \text{ pois } 5^7 . 5 = 5^{7+1} = 5^8$$

Sendo assim, para encontrar o resultado, precisamos apenas substituir o valor de 5^7 e multiplicar por 5.

$$5^7 . 5 = 78\ 125 . 5 = 390\ 625$$

RESPOSTA: 390 625.

Radiciação

Radiciação é a operação que realizamos quando queremos descobrir qual o número que multiplicado por ele mesmo uma determinada quantidade de vezes dá um valor que conhecemos.

Termos da radiciação e cálculo de uma raiz

Os termos de uma radiciação e sua representação é dada na figura a seguir (*figura 11*):

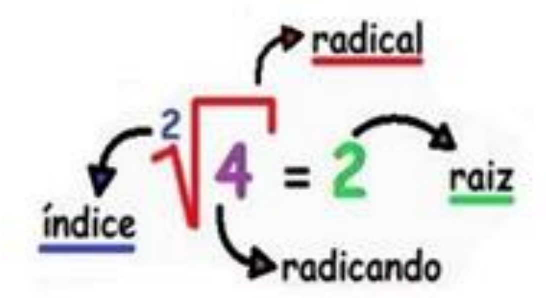


Figura 11: *Representação e termos da radiciação.*

Já o cálculo de uma raiz é simples, basta encontrar o número que multiplicado por ele mesmo a quantidade de vezes indicada no índice resulta no valor do radicando.

Ou seja, a raiz quadrada de 4 é 2, pois o índice sendo 2 e o radicando 4, temos que o número 2 é o número que multiplicado por ele mesmo duas vezes dá 4.

Se o índice fosse 3 e o radicando fosse 64, a raiz cúbica dessa radiciação seria 4, pois multiplicando o 4 por si mesmo 3 vezes, teríamos 4 vezes 4 vezes 4 que é igual a 64.

EXEMPLO:

a) Qual é a raiz de $\sqrt{36}$?

No exemplo temos o índice igual a 2 e o radicando igual a 36, assim temos um radical com nome raiz quadrada de trinta e seis, cuja raiz será o número que multiplicado por si mesmo 2 vezes dará 36.

RESPOSTA: 6

(Pois, 6 vezes 6 é igual a 36)

$$\sqrt{36} = 6, pois\ 6 \, . \, 6 = 36$$

b) Qual é a raiz de $\sqrt[3]{125}$?

No exemplo temos o índice igual a 3 e o radicando igual a 125, assim temos um radical com nome raiz cúbica de cento e vinte e cinco, cuja raiz será o número que multiplicado por si mesmo 3 vezes dará 125.

RESPOSTA: 5

(Pois, 5 vezes 5 vezes 5 é igual a 125)

$$\sqrt[3]{125} = 5, pois\ 5 \, . \, 5 \, . \, 5 = 125$$

OBSERVAÇÕES:

- ✓ Quando não aparecer o valor do índice em um radical, significa que ele vale 2.
- ✓ Quando o valor do índice é 2 e do radicando é 9, o nome do radical será raiz quadrada de nove.
- ✓ Quando o valor do índice é 3 e do radicando é 8, o nome do radical será raiz cúbica de oito.
- ✓ Quando o valor do índice é 4 e do radicando é 16, o nome do radical será raiz quarta de dezesseis.
- ✓ Quando o valor do índice é 5 e do radicando é 32, o nome do radical será raiz quinta de trinta.

Portanto, temos que o nome de um radical depende do valor de seu índice e de seu radicando, cuja nomenclatura seguirá a lógica dos exemplos citados acima.

SE LIGA NA CHARADA!

PERGUNTA:

O que o zero (0) disse para o oito (8)?

RESPOSTA:

Que cinto maneiro.

GRANDEZAS E MEDIDAS

Sistema Internacional de Unidades (SI)

Vejamos uma tabela que mostra a relação entre Grandeza, Nome da Unidade e Símbolo, de acordo com o Sistema Internacional de Unidades (SI):

Nome	Símbolo	Grandeza
Metro	m	Comprimento
Metro cúbico	m^3	Volume
Metro quadrado	m^2	Área
Segundo	s	Tempo
Quilograma	kg	Massa
Hertz	hz	Freqüência
Watt	w	Fluxo de energia, potência
Ampére	a	Medir corrente elétrica
Volts	v	Medir tensão elétrica
Litro	l	Volume
Tonelada	t	Massa
Minuto	min	Tempo = 60 s
Horas	h	Tempo = 3600 s
Newton	n	Medir força

***Figura 12**: Tabela indicando a relação entre Grandeza, Unidade e Símbolo de acordo com o Sistema Internacional de Unidades (SI).*

Medidas de comprimento

As medidas de comprimento são os mecanismos de medição mais utilizados no dia a dia. O **metro** é a unidade de medida principal para medir comprimento. A partir do metro são obtidas outras medidas de comprimentos que são múltiplos e submúltiplos do metro. Os múltiplos do metro são: decâmetro (dam)**,** hectômetro (hm) **e** quilômetro (km)**;** os submúltiplos são: milímetro (mm)**,** centímetro (cm) **e** decímetro (dm)**.**

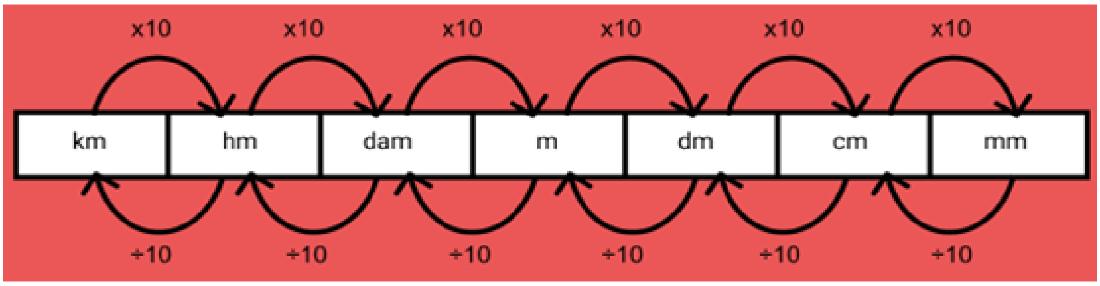


***Figura 13:** Representação de conversão de unidade de medidas de comprimento.*

As principais relações nas medidas de comprimento são:

- ✓ Quilômetros → 1 km = 1.000 m.
- ✓ Hectômetro → 1 hm = 100 m.
- ✓ Decâmetro → 1 dam = 10 m.

- ✓ Metro → 1 m.
- ✓ Decímetro → 1 dm = 0,1 m.
- ✓ Centímetro → 1 cm = 0,01 m.
- ✓ Milímetro → 1 mm = 0,001 m.

EXEMPLO:

Fazendo a conversão de 12 km para metro, quanto obtemos?

Resolução:

Para converter 12 km em metros devemos multiplicar o 12 por 10^3, ou seja, por:

$$10 \times 10 \times 10 \text{ ou direto por } 1\ 000$$

Fazendo os cálculos temos:

$$\mathbf{12 \times 10 \times 10 \times 10 = 12\ 000\ m}$$

RESPOSTA: 12 000 m.

*"Note que **multiplicar por 1 000** é o mesmo que "**andar**" com a vírgula **três casas para direita**."*

Medidas de área

Área é um conceito matemático que pode ser definida como quantidade de espaço bidimensional, ou seja, de superfície. Existem várias unidades de medida de área, sendo a mais utilizada o metro quadrado (m²) e os seus múltiplos: decâmetros ao quadrado (dam²), hectômetro ao quadrado (hm²) e quilômetro ao quadrado (km²) e os submúltiplos: decímetro ao quadrado (dm²), centímetro ao quadrado (cm²) e milímetro ao quadrado (mm²).

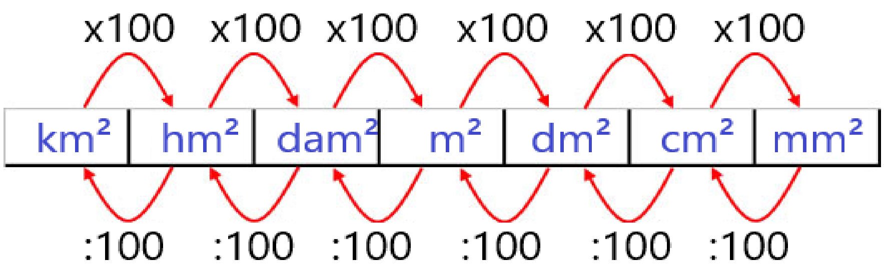


Figura 14: *Representação de conversão de unidade de medidas de área.*

As principais relações nas medidas de superfície ou área são:

- ✓ Quilômetro quadrado → 1 km² = 1.000.000 m² = 10^6 m².
- ✓ Hectômetro quadrado → 1 hm² = 10.000 m² = 10^4 m².

- ✓ Decâmetro quadrado → 1 $dam^2 = 100\ m^2 = 10^2\ m^2$.
- ✓ Metro quadrado → 1 m^2.
- ✓ Decímetro quadrado → 1 $dm^2 = 0{,}01\ m^2 = 10^{-2}\ m^2$.
- ✓ Centímetro quadrado → 1 $cm^2 = 0{,}0001\ m^2 = 10^{-4}\ m^2$.
- ✓ Milímetro quadrado → 1 $mm^2 = 0{,}000001\ m^2 = 10^{-6}\ m^2$.

EXEMPLO:

2 km^2 equivale a quantos metros quadrados?

Resolução:

Para converter 2 km^2 para m^2, basta multiplicar o 2 por 100^3, ou seja, por:

100 x 100 x 100 ou direto por 1 000 000

Fazendo os cálculos temos:

2 x 100 x 100 x 100 = 2 000 000 m²

RESPOSTA: 2 000 000 m^3.

*"Note que **multiplicar por 1 000 000** é o mesmo que "**andar**" com a vírgula **seis casas para direita**."*

Medidas de volume

A medida de volume no sistema internacional de unidades (SI) é o metro cúbico (m^3). As unidades do sistema métrico decimal de volume são: quilômetro cúbico (km^3), hectômetro cúbico (hm^3), decâmetro cúbico (dam^3), metro cúbico (m^3), decímetro cúbico (dm^3), centímetro cúbico (cm^3) e milímetro cúbico (mm^3). As transformações entre os múltiplos e submúltiplos do m^3 são feitas multiplicando ou dividindo por 1000.

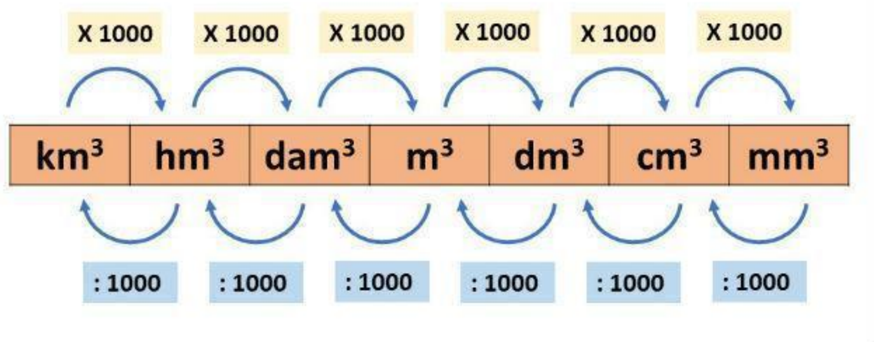


Figura 15: *Representação de conversão de unidade de medidas de volume.*

As principais relações nas medidas de volume são:

- ✓ Quilômetro cúbico → 1 $km^3 = 10^9\ m^3$ = 1.000.000.000 m^3.
- ✓ Hectômetro cúbico → 1 $hm^3 = 10^6\ m^3$ = 1.000.000 m^3.
- ✓ Decâmetro cúbico → 1 $dam^3 = 10^3\ m^3$ = 1.000 m^3.
- ✓ Metro cúbico → 1 m^3.
- ✓ Decímetro cúbico → 1 $dm^3 = 10^{-3}\ m^3$ = 0,001 m^3.
- ✓ Centímetro cúbico → 1 $cm^3 = 10^{-6}\ m^3$ = 0,000001 m^3.
- ✓ Milímetro cúbico → 1 $mm^3 = 10^{-9}\ m^3$ = 0,000000001 m^3.

EXEMPLO:

Efetue a seguinte transformação: 6 m^3 em dm^3.

Resolução:

Basta multiplicar o 6 por 1 000. Assim temos:

6 x 1 000 = 6 000 dm^3

RESPOSTA: 6 000 dm^3.

*"Note que **multiplicar por 1 000** é o mesmo que "**andar**" com a vírgula **três casas para direita**."*

Medidas de massa

As medidas de massa são usadas quando queremos definir a quantidade exata de massa de um corpo. No nosso cotidiano, usamos o quilograma e o grama para medir essa quantidade em determinados objetos. A unidade de medida padrão para a massa no sistema internacional de medidas é o quilograma (kg), que pode ser divididos em 7 múltiplos e submúltiplos do grama: quilograma (kg), hectograma (hg), decagrama (dag), grama (g), decigrama (dg), centigrama (cg) **e** miligrama (mg).

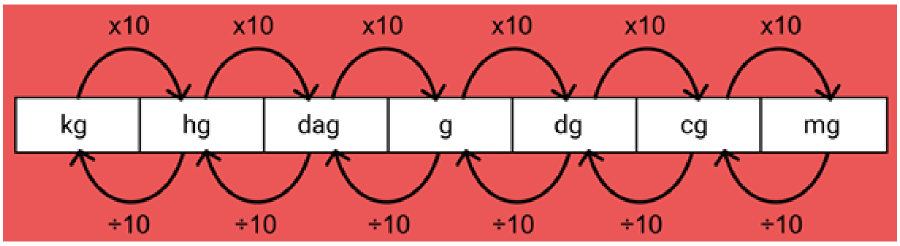


Figura 16: *Representação de conversão de unidade de medidas de massa.*

As principais relações nas medidas de massa são:

- ✓ Quilograma → 1 kg = 1.000 g.
- ✓ Hectograma → 1 hg = 100 g.
- ✓ Decagrama → 1 dag = 10 g.
- ✓ Grama → 1 g.
- ✓ Decigrama → 1 dg = 0,1 g.
- ✓ Centigrama → 1 cg = 0,01 g.
- ✓ Miligrama → 1 mg = 0,001 g.

EXEMPLO:

Converta 4 kg em mg.

Resolução:

Converter 4 kg para mg é o mesmo que multiplicar o 4 por 10^6, ou seja, por:

10 x 10 x 10 x 10 x 10 x10 ou direto por 1 000 000

Fazendo os cálculos temos:

4 x 1 000 000 = 4 000 000 mg

RESPOSTA: 4 000 000 mg.

*"Note que **multiplicar por 1 000 000** é o mesmo que "**andar**" com a vírgula **seis casas para direita**."*

Medidas de capacidade

As medidas de capacidade são grandezas utilizadas para estimar uma quantidade que está inserida em um reservatório/recipiente, ou seja, são empregadas na medição de líquidos. Ainda pode-se dizer que tais medidas são usadas para definir o volume no interior de um recipiente. Mas, antes de conhecer as unidades de medidas de capacidade é importante fazer a distinção entre alguns termos. Quando falarmos em volume, estamos nos referindo ao espaço que um corpo é capaz de ocupar. Mas ao falar de capacidade, estamos nos referindo ao volume de líquido que pode ser acomodado dentro do recipiente.

O litro foi definido pelo Sistema Internacional de Unidades (SI) como a unidade padrão de medidas de capacidade podendo ser utilizados também os seus múltiplos que são o quilolitro (kl), hectolitro (hl) e decalitro (dal), todos maiores que o litro e os submúltiplos que são menores que o litro e denominados por decilitro (dl), centilitro (cl) e mililitro (ml).

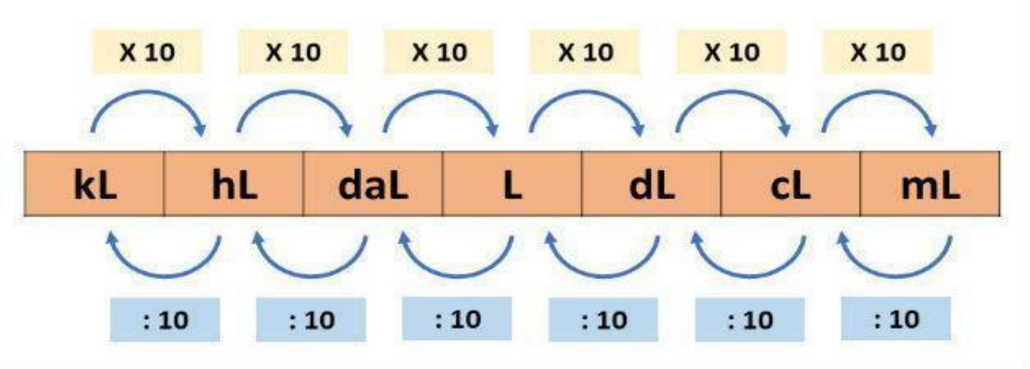


Figura 17: *Representação de conversão da unidade de medida de capacidade.*

As principais relações nas medidas de capacidade são:

- ✓ Quilolitro → 1 kL = 1.000 L.
- ✓ Hectolitro → 1 hL = 100 L.
- ✓ Decalitro → 1 daL = 10 L.
- ✓ Litro → 1 L.
- ✓ Decilitro → 1 dL = 0,1 L.
- ✓ Centilitro → 1 cL = 0,01 L.
- ✓ Mililitro → 1 mL = 0,001 L.

EXEMPLO:

Transforme 30 mL para em L.

Resolução:

Para transformar de 30 mL para L devemos dividir o número 30 por 10^3, ou seja, dividir por:

10 x 10 x 10 ou direto por 1 000

Calculando temos:

30 : 1 000 = 0,03 L

RESPOSTA: 0,03 L.

*"Note que **dividir por 1000** é o mesmo que "**andar**" com a vírgula **três casas para esquerda**."*

Medidas de tempo

Existem diversas unidades de medida de tempo, por exemplo: a hora, o dia, o mês, o ano, o século. No sistema internacional de medidas a unidades de tempo é o segundo (s). Para medir o tempo utilizamos relógios que são dispositivos que medem eventos que acontecem em intervalos regulares.

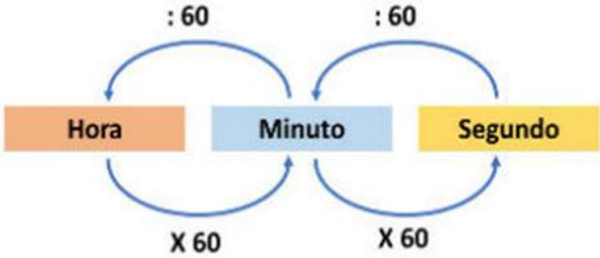


Figura 18: *Representação de conversão das medidas de tempo.*

Unidade	Corresponde a
1 dia	24 horas
1 semana	7 dias
1 quinzena	15 dias
1 bimestre	2 meses
1 trimestre	3 meses
1 quadrimestre	4 meses
1 semestre	6 meses
1 ano	365 dias ou 12 meses
1 década	10 anos
1 século	100 anos
1 milênio	1 000 anos

Figura 19: *Representação de unidades de medidas de tempo.*

Relações entre dias, horas, minutos e segundos:

- ✓ 1 minuto (min) = 60 segundos (s).
- ✓ 1 hora (h) = 60 minutos (min) = 3.600 segundos (s).
- ✓ 1 dia = 24 horas (h) = 1.440 minutos (min) = 86.400 segundos (s).

EXEMPLO:

a) Uma hora tem quantos segundos?

Resolução:

Como uma hora tem 60 minutos, e um minuto tem 60 segundos, então basta multiplicar os 60 minutos por 60 segundos.

60 x 60 = 3 600 s

RESPOSTA: 3 600 s.

b) Converter 3 horas para segundos:

3 h x 60 x 60 = 10.800 s

c) Converter 3 horas para minutos:

3 h x 60 = 180 min

d) Converter 3.600 segundos para horas:

3 600 s ÷ 60 ÷ 60 = 1 h

e) Converter 180 minutos para horas:

180 min ÷ 60 = 3 h

f) Converter 10.800 segundos para minutos:

10 800 s ÷ 60 = 180 min

Medidas agrárias

As medidas agrárias são muito utilizadas para medir áreas rurais, comuns na vida de fazendeiros, produtores e cidadãos que possuem chácara ou fazenda.

São elas:

- ✓ Are (a).
- ✓ Hectare (ha).
- ✓ Alqueire.

EXEMPLO:

Dificilmente se ouve falar:

*"Seu João comprou uma fazenda de **100 000 m²**."*

O mais comum é dizer:

*"Seu João comprou uma fazenda com **10 hectares**."*

As medidas de áreas rurais são diferentes das medidas urbanas (metro, centímetro, milímetro, etc.). Mas, elas se relacionam entre si.

Vejamos as referências:

1 a = 100 m²

(*um are corresponde a cem metros quadrados*)

1 ha = 100 a = 10.000 m²

(um hectare corresponde a cem ares ou a dez mil metros quadrados)

Além do Are (a) e do Hectare (ha) citados no exemplo anterior, outra medida agrária bastante utilizada é o alqueire. No Brasil ela varia de acordo com a região. Por isso, ao trabalhar cálculos envolvendo alqueires, será necessário saber em relação a qual região se está trabalhando.

Os alqueires mais usados e suas respectivas regiões são:

- ✓ 1 alqueire nortista → 27.225 m^2 = 2,72 ha.
- ✓ 1 alqueire mineiro → 48.400 m^2 = 4,84 ha.
- ✓ 1 alqueire paulista → 24.200 m^2 = 2,42 ha.
- ✓ 1 alqueire baiano → 96.800 m^2 = 9,68 ha.

PAUSA PARA REFLETIR...

As leis da natureza são apenas os pensamentos matemáticos de Deus.

Euclides de Alexandria.

RAZÃO, PROPORÇÃO E REGRA DE TRÊS

Razão

A razão entre dois números é dada pela sua divisão obedecendo a ordem na qual eles foram dados. Tal razão pode ser representada na forma fracionária, decimal e percentual.

Considere dois números racionais x e y, com y diferente de zero. A razão de x por y, nessa ordem, é dada pelo quociente:

$$\frac{x}{y}$$

(*razão de x por y*)

Note que x faz papel de numerador (ficando em cima) também chamado de antecedente, já o y faz o papel de denominador (ficando em baixo) também chamado de consequente.

EXEMPLOS:

a) Qual a razão entre os números 3 e 4?

Resolução:

O número 3 vem primeiro e o 4 vem depois, então o 3 é o antecedente (numerador) e o 4 é o consequente (denominador).

Assim temos a seguinte relação chamada razão:

$$\frac{3}{4}$$

(lê-se: três está para quatro)

b) Se em uma sala de aula há 40 alunos, sendo 25 meninas e 15 meninos, qual a razão entre o número de meninas e o total de alunos na sala?

Resolução:

Se o número de meninas foi citado antes do número total de alunos, significa que o 25 é o antecendente (ficará no numerador) e o 40 é o consequente (ficará no denominador). Desse modo temos a seguinte razão:

$$\frac{25}{40}$$

(lê-se: vinte e cinco está para quarenta)

Nesse caso, concluímos que a cada 40 alunos da turma, 25 são meninas. Podemos também simplificar esta fração dividido o numerador e o denominador por 5, gerando a seguinte relação:

$$\frac{25:5}{40:5} = \frac{5}{8}$$

(lê-se: cinco está para oito)

Simplificando, concluímos que a cada 8 alunos da turma, 5 são meninas.

Proporção

A proporção é determinada pela igualdade entre duas razões, ou ainda, quando duas razões possuem o mesmo resultado. A relação entre duas ou mais razões é uma importante ferramenta para solucionar problemas práticos, essa igualdade é chamada de proporção."

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(lê-se: a está para b, assim como c está para d)

“a primeira razão é igual a segunda”

Existem propriedades importantes para as proporções. É importante ressaltar que, ao representar números como fração, as propriedades de frações também são válidas e, muitas vezes, são apresentadas como propriedades da proporção.

Propriedade fundamental da proporção

A partir dessa propriedade, é possível verificar se as razões são proporcionais ou não. Essa propriedade é enunciada também como **o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.**

Essa propriedade é representada da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

("a" e "d" são chamados de extremos e "b" e "c" são chamados de meios)

$$a \cdot d = b \cdot c$$

"o produto dos extremos (a vezes d) é igual ao produto dos meios (b vezes c)"

Dizer que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos é o mesmo que realizar a **multiplicação cruzada** dos termos. Se a igualdade for verdadeira, as razões serão proporcionais, caso contrário, não serão proporcionais.

EXEMPLOS:

Resolva a seguinte proporção:

$$\frac{x}{5} = \frac{21}{35}$$

Resolução:

Sabendo que se trata de uma proporção, logo sua solução será encontrar o valor de x, de modo que a primeira razão seja igual a segunda. Assim, basta aplicar a propriedade fundamental da proporção, desenvolver a equação e encontraremos o valor de x. Aplicando a propriedade fundamental temos:

$$\frac{x}{5} = \frac{21}{35}$$

(multiplicando cruzado)

x . 35 = 21 . 5

35x = 105

$$x = \frac{105}{35}$$

x = 3

RESPOSTA: 3.

Sendo x = 3, substituindo na proporção inicial, veremos que as duas razões são iguais, ou seja, para que seja uma proporção, x deve ser 3.

$$\frac{x}{5} = \frac{21}{35}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$$

3 . 35 = 21 . 5

105 = 105

(*primeira razão é igual a segunda, desde que x seja 3*)

Grandezas

Uma grandeza é definida como algo que pode ser medido ou calculado, seja velocidade, área ou volume de um material, e é útil para comparar com outras medidas, muitas vezes de mesma unidade, representando uma razão.

As grandezas proporcionais têm seus valores aumentados ou diminuídos em uma relação que pode ser classificada como proporcionalidade direta ou inversa.

Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando a variação de uma implica na variação da outra na mesma proporção, ou seja, duplicando uma delas, a outra também duplica; reduzindo pela metade, a outra também reduz na mesma quantidade... e assim por diante.

EXEMPLOS:

Proporcionalidade direta:

Uma impressora, por exemplo, tem a capacidade de imprimir 10 páginas por minuto. Se dobrarmos o tempo, dobramos a quantidade de páginas impressas. Da mesma forma, se pararmos a impressora na metade de um minuto, teremos a metade do número de impressões esperadas.

Agora, veremos com números a relação entre as duas grandezas. Em uma gráfica são feitas impressões de livros escolares. Em 2 horas, são realizadas 40 impressões. Em 3 horas, a mesma máquina produz mais 60 impressões, em 4 horas, 80 impressões, e, em 5 horas, 100 impressões.

Tempo (horas)	**2**	**3**	**4**	**5**
Impressões (número)	**40**	**60**	**80**	**100**

Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando o aumento de uma implica na redução da outra, ou seja, dobrando uma grandeza, a correspondente reduz pela metade; triplicando uma grandeza, a outra reduz para terça parte... e assim por diante.

EXEMPLOS:

Proporcionalidade indireta:

Quando se aumenta a velocidade, o tempo para concluir um percurso é menor. Da mesma forma, ao diminuir a velocidade mais tempo será necessário para fazer o mesmo trajeto. Confira a seguir uma aplicação de relação entre essas grandezas:

João decidiu contar o tempo que levava indo de casa à escola de bicicleta com diferentes velocidades. Observe a sequência registrada.

Tempo (min)	**2**	**4**	**5**	**1**
Velocidade (m/s)	**30**	**15**	**12**	**60**

Regra de três

Regra de três simples

Regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvam quatro valores dos quais conhecemos três deles.

Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos.

EXEMPLOS:

a) Uma usina produz 500 litros de álcool com 6 000 kg de cana-de-açúcar. Determine quantos litros de álcool são produzidos com 15 000 kg de cana.

Resolução:

As grandezas litros de álcool e Kg de cana-de-acúcar são diretamente proporcionais, ou seja, quanto mais cana-de-acúcar mais litros de álcool produzido. Montando o esquema com as grandezas e seus valores temos:

kg	litros de álcool
6000	500
15000	x

Montando a proporção na mesma ordem das informações dadas e aplicando a propriedade fundamental temos:

$$\frac{6\,000}{15\,000} = \frac{500}{x}$$

6 000 . x = 500 . 15 000

6 000x = 7 500 000

$$\mathbf{x} = \frac{7\,500\,000}{6\,000}$$

x = 1 250

Serão produzidos 1.250 litros de álcool com 15 000 kg de cana-de-açúcar.

b) Uma equipe de 5 professores gastou 12 dias para corrigir as provas de um vestibular. Considerando a mesma proporção, quantos dias levarão 30 professores para corrigir as provas?

Resolução:

As grandezas número de professores e quantidade de dias são inversamente proporcionais, ou seja, quanto mais professores, menor será a quantidade de dias gastos na correção das provas.

professores	dias
5	12
30	x

Montando a proporção na ordem das informações dadas temos:

$$\frac{5}{30} = \frac{12}{x}$$

Como são grandezas inversamente proporcionais, vamos inverter a ordem da segunda razão, trocando o numerador e o denominado de lugar.

$$\frac{5}{30} = \frac{12}{x} \ \textit{ao inverter a ordem na segunda razão fica} \ \frac{5}{30} = \frac{x}{12}$$

Agora basta aplicar a propriedade fundamental da proporção:

30 . x = 12 . 5

30x = 60

x = $\frac{60}{30}$

x = 2

Portanto, a equipe de 30 professores levará apenas 2 dias para corrigir as provas.

Regra de três composta

Regra de três composta é um processo matemático utilizado na resolução de questões que envolvem a proporcionalidade direta ou inversa com mais de duas grandezas.

EXEMPLOS:

a) Se 6 impressoras iguais produzem 1 000 panfletos em 40 minutos, em quanto tempo 3 dessas impressoras produziriam 2 000 desses panfletos?

Resolução:

Montando o esquema contendo as três grandezas e seus respectivos valores na ordem dos fatos temos:

Impressoras	Nº de panfletos	Tempo / minutos
6 ↓	1000 ↑	40 ↑
3	2000	x

Montando a proporção de acordo com o esquema considerando se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais:

$$\frac{40}{X} = \frac{1000}{2000} \cdot \frac{3}{6}$$

$$\frac{40}{x} = \frac{3000}{12000}$$

Aplicando a propriedade fundamental da proporção:

$$\frac{40}{x} = \frac{3}{12}$$

3 . x = 12 . 40

3x = 480

x = $\frac{480}{3}$

x = 160

Em 160 minutos, que equivalem a 2 horas e 40 minutos.

b) Em uma oficina de artesanato, 4 artesãs produzem 20 bonecas de pano em 4 dias. Se 8 artesãs trabalharem por 6 dias, quantas bonecas serão produzidas?

1º passo: Criar uma tabela com as grandezas e analisar os dados.

Número de artesãs	Dias trabalhados	Bonecas produzidas
A	B	C
4	4	20
8	6	x

Através da tabela, podemos notar que:

- ✓ A e C são diretamente proporcionais: quanto maior o número de artesãs, mais bonecas serão produzidas.
- ✓ B e C são diretamente proporcionais: quanto mais dias trabalhados, um maior número de bonecas serão produzidas.

2º passo: Encontrar o valor de x.

Observe que as grandezas A e B são diretamente proporcionais à grandeza C. Logo, o produto dos valores de A e B é proporcional aos valores de C.

$$\frac{4}{8} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{x}$$

$$\frac{16}{48} = \frac{20}{x}$$

16 . x = 48 . 20

16x = 960

$$x = \frac{960}{16}$$

x = 60

Assim, serão produzidas 60 bonecas.

PORCENTAGEM

A **porcentagem** é uma das áreas da matemática mais conhecidas, praticamente utilizada em todas as outras. Em exemplo, podemos citar algumas situações como: quando queremos comparar grandezas, estimar o crescimento de algo e expressar uma quantidade de aumento ou desconto do preço de alguma mercadoria.

Vemos porcentagem a todo momento, e mesmo quando não percebemos, estamos fazendo uso dela. A porcentagem é uma razão, cujo denominador é igual a 100. Ela costuma ser indicada pelo símbolo:

%

(*símbolo de porcentagem*)

Representação de porcentagem

Existem três formas de representarmos uma porcentagem:

- ✓ Na forma percentual;
- ✓ Na forma fracionária;
- ✓ Na forma decimal.

Veja as três formas citadas na tabela a seguir:

Forma percentual	Forma fracionário	Forma decimal
10%	$^{10}/_{100}$	0,1
30%	$^{30}/_{100}$	0,3
5,3%	$^{5,3}/_{100}$	0,053

Figura 20: *Tabela com as formas de se representar a porcentagem.*

Cálculo de porcentagem

Existem várias formas de se calcular porcentagem. Além de poder utilizar a porcentagem em forma fracionária ou decimal para o cálculo, também é possível usar o processo da regra de três simples, isso fica a escolha do cursista.

EXEMPLOS:

a) Imagine um produto que custa R$ 80,00 sendo vendido à vista, com desconto de 5%. Qual será o valor do desconto?

Vamos desenvolver o cálculo dessa porcentagem utilizando três formas diferentes, as quais chegarão no mesmo resultado como solução.

Solução utilizando a forma fracionária:

$$5\%\ de\ 80$$

$$\frac{5}{100}\,.\,80$$

$$\frac{5}{100}\,.\,\frac{80}{1}$$

$$\frac{400}{100} = 4$$

RESPOSTA: R$ 4,00.

Solução utilizando a forma decimal:

$$5\%\ de\ 80$$

0,05 . 80 = 4

(*5% equivale a 0,05 que é o mesmo que 5 dividido por 100 que é igual a R$ 4,00*)

RESPOSTA: R$ 4,00.

Solução utilizando a regra de três:

R$		%
80	——	**100**
x	——	**5**

$$\frac{80}{x} = \frac{100}{5}$$

$$100\,.\,x = 5\,.\,80$$

$$100x = 400$$

$$x = \frac{400}{100}$$

$$x = 4$$

RESPOSTA: R$ 4,00.

Portanto, independente da forma utilizada, o desconto será de R$ 4,00.

b) Se um corretor de imóveis vender um imóvel no valor de R$ 500.000,00 e sua comissão for de 2% do valor de venda do imóvel, qual será sua comissão?

Resolução:

$$2\% \; de \; 500\,000$$

$$\frac{2}{100} \; . \; 500\,000$$

$$\frac{2}{100} \; . \; \frac{500\,000}{1}$$

$$\frac{1\,000\,000}{100} = 10\,000$$

RESPOSTA: R$ 10 000,00.

Portanto, a comissão desse corretor de imóveis será de R$ 10 000,00.

EQUAÇÕES BÁSICAS

Equação do primeiro grau

As equações de primeiro grau são sentenças matemáticas que estabelecem relações de igualdade entre termos conhecidos e desconhecidos, representadas sob a forma:

$$\boldsymbol{ax + b = 0}$$

Onde *a* e *b* são números reais, sendo a um valor diferente de zero (a ≠ 0) e x representa o valor desconhecido. O valor desconhecido é chamado de **incógnita** que significa “termo a determinar”. As equações do 1º grau podem apresentar uma ou mais incógnitas. As incógnitas são expressas por uma letra qualquer, sendo que as mais utilizadas são x, y, z. Nas equações do primeiro grau, o expoente das incógnitas é sempre igual a 1.

EXEMPLO:

Resolva a seguinte equação do primeiro grau: $5x - 10 = 2x + 2$.

Resolver uma equação é encontrar o valor que satisfaz a equação, ou seja, neste caso, como se trata de uma equação do 1º grau, encontraremos o valor de x que é a raiz e solução dessa equação.

$$5x - 10 = 2x + 2$$

(vamos separar letra de número: as letras ficarão do lado esquerdo e os números do lado direito)

$$5x - 2x = 2 + 10$$

(vamos juntar letra com letra e número com número: somar ou subtrair de acordo com os sinais)

$$3x = 12$$

(vamos isolar a letra: o valor que está multiplicando a letra passa para o outro lado dividindo)

$$x = \frac{12}{3}$$

(fazendo a divisão teremos o valor de x)

$$x = 4$$

(raiz e solução da equação)

Portanto, a solução dessa equação é x igual a 4.

Equação do segundo grau

A equação do segundo grau recebe esse nome porque é uma equação polinomial cujo termo de maior grau está elevado ao quadrado. Também chamada de equação quadrática, é representada por: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$**.**

Numa equação do 2º grau, o **x** é a incógnita e representa um valor desconhecido. Já as letras **a**, **b** e **c** são chamadas de coeficientes da equação. Os coeficientes são números reais e o coeficiente **a** tem que ser diferente de zero, pois do contrário passa a ser uma equação do 1º grau. Resolver uma equação de segundo Grau, significa buscar valores reais de **x**, que tornam a equação verdadeira. Esses valores são denominados raízes da equação. Uma equação quadrática possui no máximo duas raízes reais.

As equações do 2º grau completas são aquelas que apresentam todos os coeficientes, ou seja, a, b e c são diferentes de zero (a, b, c ≠ 0). Uma equação quadrática é incompleta quando b = 0 ou c = 0 ou b = c = 0.

Quando uma equação do segundo grau é completa, usamos a Fórmula de Bháskara para encontrar as raízes da equação.

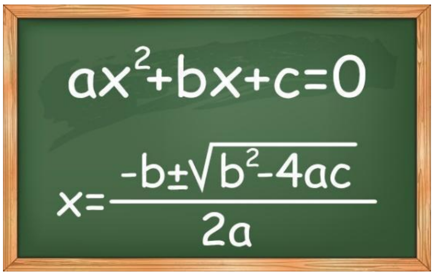


Figura 27: *Representação da equação do segundo grau e fórmula de Bháskara.*

EXEMPLO:

Resolva a seguinte equação $3x^2 – 7x + 4 = 0$.

Resolução:

Resolver uma equação é encontrar o valor que satisfaz a equação, ou seja, neste caso, como se trata de uma equação do 2º grau, encontraremos os valores de x que são as raízes e soluções dessa equação.

Passo 1 – Tirando os valores dos coeficientes *a*, *b*, e *c*:

a = 3

(*valor que vem ao lado do x²*)

b = -7

(*valor que vem ao lado do x*)

c = 4

(*valor que vem sozinho*)

Passo 2 – Calculando o valor do discriminante ou valor de delta (Δ):

$$\Delta= b^2 - 4ac$$

$$\Delta= (-7)^2 - 4\,.\,3\,.\;4$$

$$\Delta= 49 - 48$$

$$\Delta= 1$$

Passo 3 – Calculando o valor das raízes ou valores de x (x_1 e x_2):

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2*3}$$

$$x = \frac{7 \pm 1}{6}$$

$$x_1 = \frac{7+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Portanto, a solução dessa equação são as raízes $\frac{4}{3}$ e 1.

PAUSA PARA REFLETIR...

As leis da natureza são apenas os pensamentos matemáticos de Deus.

Euclides de Alexandria.

JUROS

Juros simples

Juros simples é uma remuneração dada a alguém pela aplicação de seu capital em um determinando período. Esse regime de juros é calculado aplicando uma taxa em relação ao capital aplicado inicialmente. O valor inicial de uma dívida, empréstimo ou investimento é chamado de capital. A esse valor é aplicada uma correção, chamada de taxa de juros, que é expressa em porcentagem. Os juros são calculados considerando o período de tempo em que o capital ficou aplicado ou emprestado.

Cálculo de juros simples

A fórmula para calcular os juros simples é expressa por: J = c . i . t, onde:

- J = Juros.
- C = Capital.
- i = Taxa de juros em forma decimal.
- t = Tempo em meses.

EXEMPLO:

Uma pessoa aplicou o capital de R$ 1 200,00 a uma taxa de 2% ao mês durante 14 meses. Determine os juros e o montante dessa aplicação.

RESOLUÇÃO:

- Capital (C) = R$ 1 200,00
- Tempo (t) = 14 meses
- Taxa (i) = 2% ao mês = 2/100 = 0,02

J = C . i . t

(Fórmula dos juros simples)

J = 1 200 . 0,02 . 14

J = 336

M = C + J

(Fórmula do Montante)

M = 1 200 + 336

M = 1 536

O valor dos juros da aplicação é de R$ 336,00 e o montante a ser resgatado é de R$ 1 536,00.

Juros compostos

Os juros compostos são calculados levando em conta a atualização do capital, ou seja, o juro incide não apenas no valor inicial, mas também sobre os juros acumulados (juros sobre juros). Esse tipo de juros, chamado também de “capitalização acumulada”, é muito utilizado nas transações comerciais e financeiras (sejam dívidas, empréstimos ou investimentos).

Cálculo de juros compostos

Para calcular os juros compostos, utiliza-se a expressão: $M = C + (1 + i)^{t}$, onde:

- M = Montante.
- C = Capital.
- i = Taxa de juros em forma decimal.
- t = Tempo em meses.

EXEMPLO:

Uma aplicação especial rende 10% ao mês em regime de juros compostos. Certa pessoa deseja aplicar a quantia de R$ 620,00 durante 5 meses. Determine o montante gerado por essa aplicação.

RESPOSTA: R$ 998,52

- C = 620
- t = 5 meses
- i = 10% = $\frac{10}{100}$ = 0,1

$$\mathbf{M = C\ .\ (1 + i)t}$$

$$\mathbf{M = 620\ .\ (1 + 0{,}1)^5}$$

$$\mathbf{M = 620\ .\ (1{,}1)^5}$$

$$\mathbf{M = 620\ .\ 1{,}61051}$$

$$\mathbf{M = 998{,}5162}$$

O montante gerado será de R$ 998,52.

OBSERVAÇÕES:

Nos **juros simples**, os **juros** são cobrados apenas em cima do montante que foi emprestado, ou seja, do capital inicial. **Juros Compostos** referem-se aos **juros** calculados como um percentual do capital inicial mais os **juros** acumulados. Acréscimos. Somados ao capital inicial no final da aplicação. Lembre-se que para aplicar o tempo sempre será em meses e os juros sempre em forma decimal ou em fração.

VOCÊ SABIA?

Alguns dos documentos, registros em tábulas, mostram que os sumérios, antiga civilização que viveu na região da Mesopotâmia por volta de 2100 a.C. Já utilizavam vários tipos de contratos, como recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, etc.

TÓPICOS DE TRIGONOMETRIA

O surgimento da trigonometria está ligado à necessidade do homem **relacionar ângulos a distâncias pouco acessíveis**. A ferramenta auxiliar utilizada para o desenvolvimento da trigonometria é o **triângulo**, nos quais relações particulares entre os ângulos e a medida de seus lados foram estabelecidas. Esse estudo recebeu o nome de razões trigonométricas denominadas **seno**, **cosseno** e **tangente**.

Razões Trigonométricas

Essas razões são aplicadas ao triângulo retângulo, aquele que possui um ângulo retângulo medindo 90º.

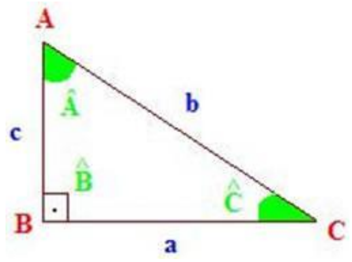


Figura 28: *Representação de um triângulo retângulo.*

Nesse triângulo, os lados recebem nomes especiais, que são utilizados na formação das razões trigonométricas. Na ilustração vamos nomear os lados utilizando o ângulo B de 90º. Os lados representados por *a* e *c* são denominados catetos e o lado oposto ao ângulo reto é denominado hipotenusa. Dizemos que a hipotenusa é o lado de maior comprimento do triângulo retângulo.

Nomeando os lados com referência ao ângulo C, temos que o cateto c será oposto e o cateto a será adjacente. Fazendo referência ao ângulo A, temos que o cateto oposto será a e o cateto adjacente será c.

Dessa forma, o cálculo do seno e cosseno seria a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente com a hipotenusa, e a tangente seria a razão entre o seno e o cosseno. Levando em consideração o ângulo Â, podemos dizer que:

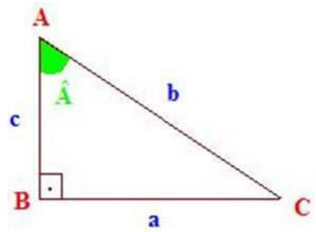


Figura 29: *Triângulo retângulo destacando o ângulo Â.*

$$senA = \frac{a}{b} \quad \cos A = \frac{c}{b} \quad tgA = \frac{a}{c}$$

(razões trigonométricas seno, cosseno e tangente do ângulo Â)

As razões (ou relações) trigonométricas estão relacionadas com os ângulos de um **triângulo retângulo**. As principais são: o **seno,** o **cosseno** e a **tangente**.

As relações trigonométricas são o resultado da divisão entre as medidas de dois lados de um triângulo retângulo, e por isso são chamadas de razões.

Lados do triângulo retângulo: hipotenusa e catetos

Antes de mais nada, temos que saber que no triângulo retângulo, a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e o maior lado do triângulo. Já os catetos são os lados adjacentes e que formam o ângulo de 90°.

Note que dependendo dos lados de referência ao ângulo, temos o cateto oposto e o cateto adjacente.

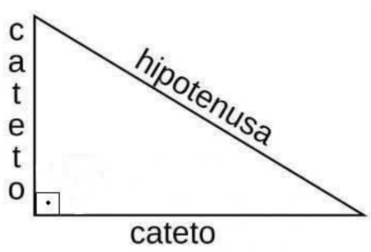


***Figura 30**: Representação de um triângulo retângulo.*

Feita essa observação, as **razões trigonométricas no triângulo retângulo** são:

$$\text{Seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

(lê-se seno é igual ao cateto oposto sobre a hipotenusa)

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

(lê-se cosseno igual ao cateto adjacente sobre a hipotenusa)

$$\text{Tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

(lê-se tangente igual ao cateto oposto sobre o cateto adjacente)

Vale lembrar que pelo conhecimento de um ângulo agudo e a medida de um dos lados de um triângulo retângulo, podemos descobrir o valor dos outros dois lados.

Ângulos Notáveis

Os chamados ângulos notáveis são os que surgem com maior frequência nos estudos de razões trigonométricas. Veja a tabela abaixo com o valor dos ângulos de 30°; 45° e 60°:

Relações Trigonométricas	30°	45°	60°
Seno	1/2	√2/2	√3/2
Cosseno	√3/2	√2/2	1/2
Tangente	√3/3	1	√3

Figura 31: *Tabela indicando as relações trigonométricas utilizando os ângulos notáveis.*

Tabela Trigonométrica

A tabela trigonométrica apresenta os ângulos em graus e os valores decimais do seno, cosseno e tangente.

Graus (°)	Rad	sen	cos	tg
0	0,02	0	1	0
1	0,03	0,017452	0,999848	0,017455
2	0,05	0,034899	0,999391	0,034921
3	0,07	0,052336	0,99863	0,052408
4	0,09	0,069756	0,997564	0,069927
5	0,10	0,087156	0,996195	0,087489
6	0,12	0,104528	0,994522	0,105104
7	0,14	0,121869	0,992546	0,122785
8	0,16	0,139173	0,990268	0,140541
9	0,17	0,156434	0,987688	0,158384
10	0,19	0,173648	0,984808	0,176327
11	0,21	0,190809	0,981627	0,19438
12	0,23	0,207912	0,978148	0,212557
13	0,24	0,224951	0,97437	0,230868
14	0,26	0,241922	0,970296	0,249328
15	0,28	0,258819	0,965926	0,267949
16	0,30	0,275637	0,961262	0,286745
17	0,31	0,292372	0,956305	0,305731
18	0,33	0,309017	0,951057	0,32492
19	0,35	0,325568	0,945519	0,344328
20	0,37	0,34202	0,939693	0,36397
21	0,38	0,358368	0,93358	0,383864
22	0,40	0,374607	0,927184	0,404026
23	0,42	0,390731	0,920505	0,424475
24	0,44	0,406737	0,913545	0,445229
25	0,45	0,422618	0,906308	0,466308
26	0,47	0,438371	0,898794	0,487733
27	0,49	0,45399	0,891007	0,509525
28	0,51	0,469472	0,882948	0,531709
29	0,52	0,48481	0,87462	0,554309
30	0,54	0,5	0,866025	0,57735
31	0,56	0,515038	0,857167	0,600861
32	0,58	0,529919	0,848048	0,624869
33	0,59	0,544639	0,838671	0,649408
34	0,61	0,559193	0,829038	0,674509
35	0,63	0,573576	0,819152	0,700208
36	0,65	0,587785	0,809017	0,726543
37	0,66	0,601815	0,798636	0,753554
38	0,68	0,615661	0,788011	0,781286
39	0,70	0,62932	0,777146	0,809784
40	0,72	0,642788	0,766044	0,8391
41	0,73	0,656059	0,75471	0,869287
42	0,75	0,669131	0,743145	0,900404
43	0,77	0,681998	0,731354	0,932515
44	0,79	0,694658	0,71934	0,965689
45	0,02	0,707107	0,707107	1

Graus (°)	Rad	sen	cos	tg
46	0,80	0,71934	0,694658	1,03553
47	0,82	0,731354	0,681998	1,072369
48	0,84	0,743145	0,669131	1,110613
49	0,86	0,75471	0,656059	1,150368
50	0,87	0,766044	0,642788	1,191754
51	0,89	0,777146	0,62932	1,234897
52	0,91	0,788011	0,615661	1,279942
53	0,93	0,798636	0,601815	1,327045
54	0,94	0,809017	0,587785	1,376382
55	0,96	0,819152	0,573576	1,428148
56	0,98	0,829038	0,559193	1,482561
57	0,99	0,838671	0,544639	1,539865
58	1,01	0,848048	0,529919	1,600335
59	1,03	0,857167	0,515038	1,664279
60	1,05	0,866025	0,5	1,732051
61	1,06	0,87462	0,48481	1,804048
62	1,08	0,882948	0,469472	1,880726
63	1,10	0,891007	0,45399	1,962611
64	1,12	0,898794	0,438371	2,050304
65	1,13	0,906308	0,422618	2,144507
66	1,15	0,913545	0,406737	2,246037
67	1,17	0,920505	0,390731	2,355852
68	1,19	0,927184	0,374607	2,475087
69	1,20	0,93358	0,358368	2,605089
70	1,22	0,939693	0,34202	2,747477
71	1,24	0,945519	0,325568	2,904211
72	1,26	0,951057	0,309017	3,077684
73	1,27	0,956305	0,292372	3,270853
74	1,29	0,961262	0,275637	3,487414
75	1,31	0,965926	0,258819	3,732051
76	1,33	0,970296	0,241922	4,010781
77	1,34	0,97437	0,224951	4,331476
78	1,36	0,978148	0,207912	4,70463
79	1,38	0,981627	0,190809	5,144554
80	1,40	0,984808	0,173648	5,671282
81	1,41	0,987688	0,156434	6,313752
82	1,43	0,990268	0,139173	7,11537
83	1,45	0,992546	0,121869	8,144346
84	1,47	0,994522	0,104528	9,514364
85	1,48	0,996195	0,087156	11,43005
86	1,50	0,997564	0,069756	14,30067
87	1,52	0,99863	0,052336	19,08114
88	1,54	0,999391	0,034899	28,63625
89	1,55	0,999848	0,017452	57,28996
90	1,57	1	0	ñ existe
180	3,14	0	1	0
270	4,71	-1	0	ñ existe
360	6,28	0	1	0

Figura 32*: Representação da tabela trigonométrica.*

Lei dos Senos

Os estudos trigonométricos no triângulo retângulo têm por finalidade relacionar os ângulos do triângulo com as medidas dos lados por meio das seguintes relações: **seno**, **cosseno e tangente**. Essas relações utilizam o cateto oposto, o cateto adjacente e a hipotenusa.

Observe:

Seno: cateto oposto / hipotenusa

Cosseno: cateto adjacente / hipotenusa

Tangente: cateto oposto / cateto adjacente

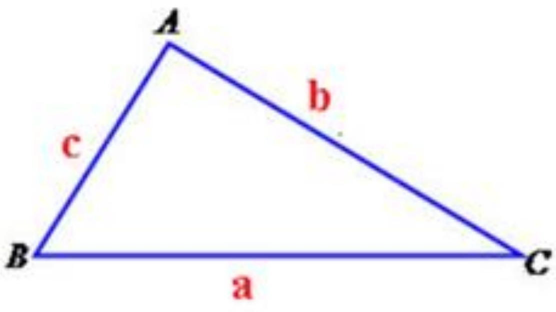
Essas **relações** somente são válidas se aplicadas no **triângulo** retângulo, aquele que possui um ângulo reto (90º) e outros dois ângulos agudos.

Para **triângulos quaisquer,** utilizamos a **Lei dos Senos** ou a **Lei dos Cossenos** com o objetivo de calcular medidas e ângulos desconhecidos. Enfatizaremos neste texto a **Lei dos Senos** e mostraremos sua fórmula e alguns exemplos de cálculos.

Fórmula que representa a Lei dos Senos

Na **Lei dos Senos,** utilizamos relações que envolvem o seno do ângulo e a medida oposta ao ângulo.

Assim, para um triângulo ABC de lados a, b, c, a Lei dos Senos admite as seguintes relações:



$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

(Fórmula da Lei dos Senos)

***Figura 33**: Representação de um triângulo para encontrar relações da Lei dos Senos.*

EXEMPLO:

No triângulo a seguir, temos dois ângulos (45º e 105º, respectivamente), e um dos lados mede 90 metros. Com base nesses valores, determine a medida de x.

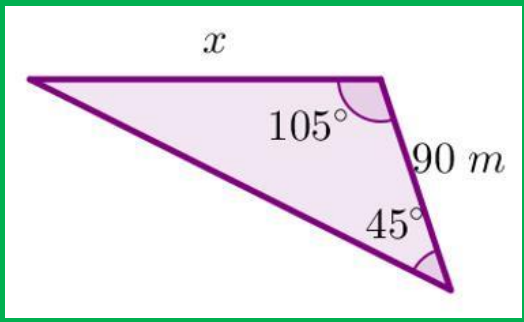


Figura 34*: Representação de um triângulo para aplicação da lei dos senos.*

Para determinar a medida de x, devemos utilizar a **Lei dos Senos**, mas, para isso, precisamos descobrir o valor do terceiro ângulo do triângulo. Para tal cálculo, utilizaremos a seguinte definição: **a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º**.

$$\alpha + 105^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + 150^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 150^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Agora vamos aplicar a **Lei dos Senos:**

$$\frac{x}{sen45^\circ} = \frac{90}{sen30^\circ}$$

$$x.sen30^\circ = 90.sen45^\circ$$

$$x \, . \, \frac{1}{2} = 90 \, . \, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 90.\sqrt{2}$$

$$x = 127{,}27$$

Lei dos Cossenos

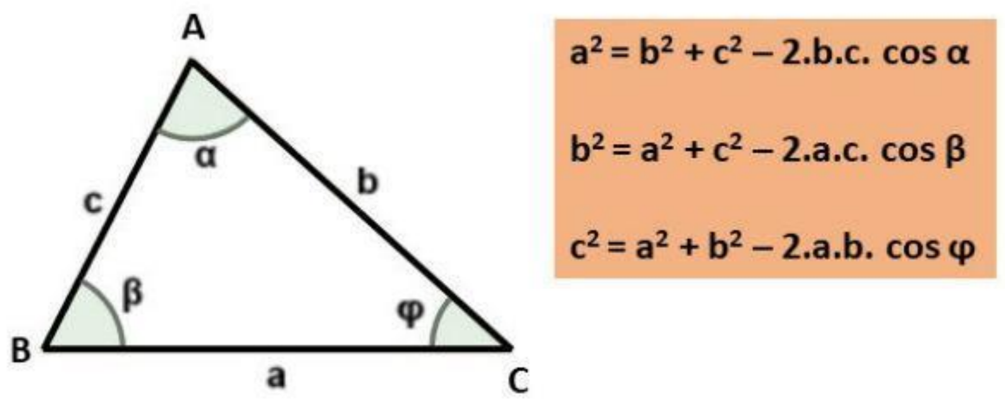
A **Lei dos Cossenos** é utilizada para calcular a medida de um lado ou de um ângulo desconhecido de um triângulo qualquer, conhecendo suas outras medidas.

Conceitos e Fórmulas

O teorema dos cossenos estabelece que:

"Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles."

Assim, pela Lei dos Cossenos temos as seguintes relações entre os lados e os ângulos de um triângulo:



(Fórmula da Lei dos Cossenos)

Figura 34: *Representação de um triângulo com as relações da Lei dos Cossenos.*

EXEMPLO:

Determine a medida do lado AC na figura a seguir:

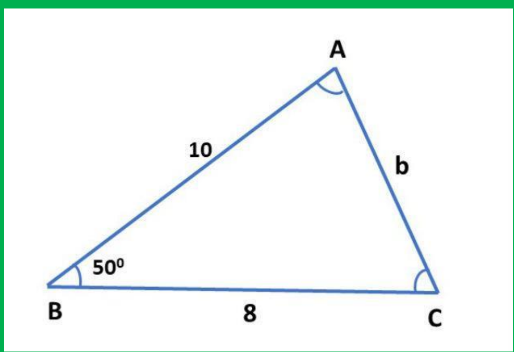


Figura 35: *Representação de um triângulo para aplicação da Lei dos Cossenos.*

Determinando o lado AC que na figura está sendo indicado por b (AC=b):

$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos} \ B\hat{}$$

(Fórmula para calcular a Lei dos Cossenos)

$$b^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 50°$$

$$b^2 = 64 + 100 - 160 \cdot \cos 50°$$

$$b^2 = 164 - 160 \cdot 0{,}64279$$

$$b^2 = 164 - 102{,}8464$$

$$b^2 = 61{,}1536$$

$$b = \sqrt{61{,}1536}$$

$$b \approx 7{,}82$$

(medida aproximada do lado AC)

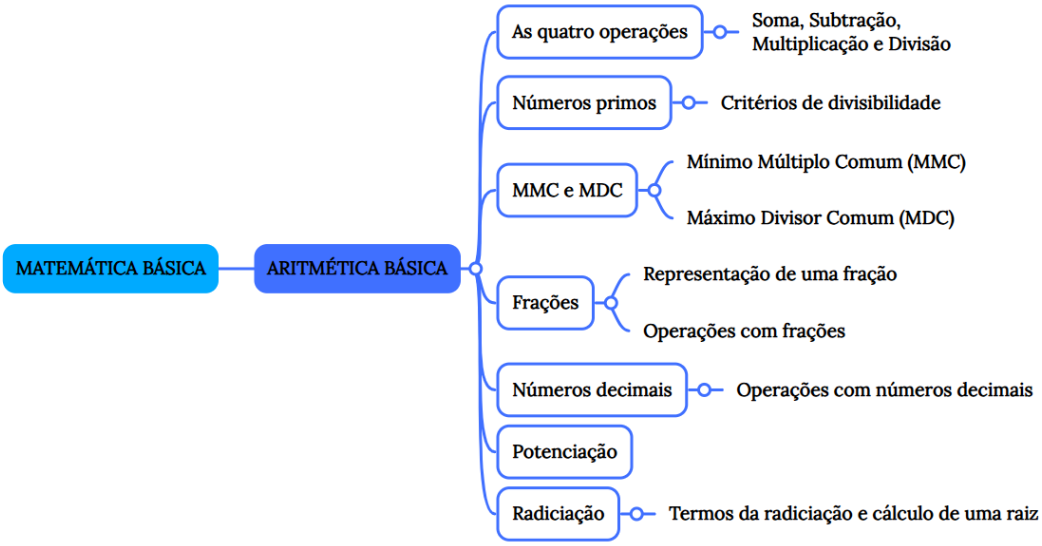
VOCÊ SABIA?

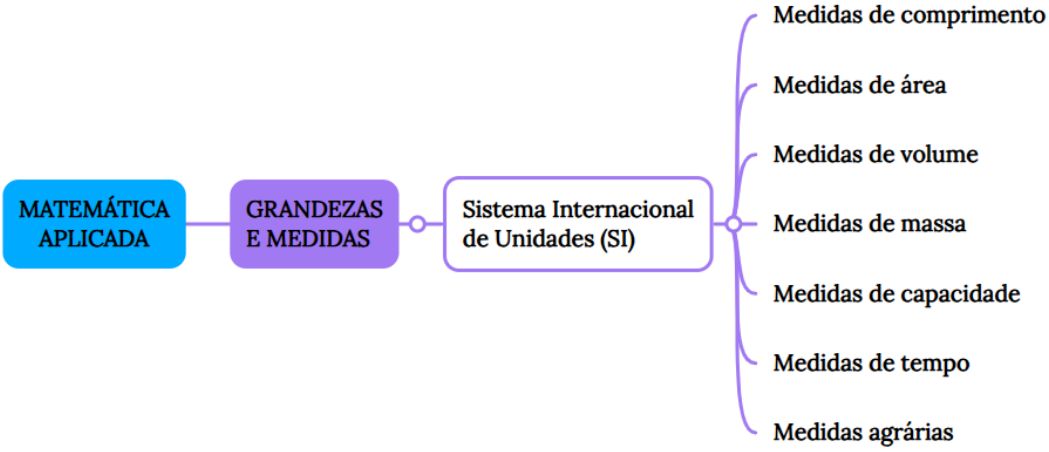
Ter domínio, ou pelos menos uma base sólida, a respeitos dos principais temas da matemática básica que são frequentemente aplicados na prática é fundamental para o exercício de várias profissões.

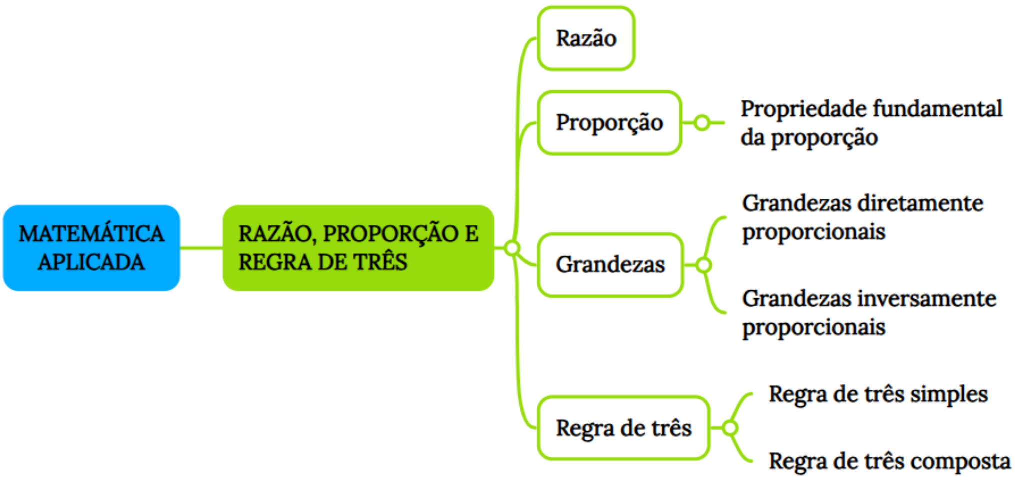
Manipular com precisão as operações básicas; conhecer as medidas e as transformações de suas unidades; utilizar coordenadas para locar pontos em terrenos; ler e interpretar gráficos e tabelas de resultados e dados levantados; ter noções de geometria e trigonometria, para manipulação de cálculos envolvendo perímetro e área de terrenos; bem como o volume de regiões espaciais e medições com o uso de ângulos nas razões trigonométricas, leis do seno e do cosseno; são habilidades que farão a diferença para o profissional de AGRIMENSURA na execução de suas atividades, uma vez que lidam frequentemente com conhecimentos básicos de matemática, principalmente relacionados a cálculos com medição envolvendo terrenos.

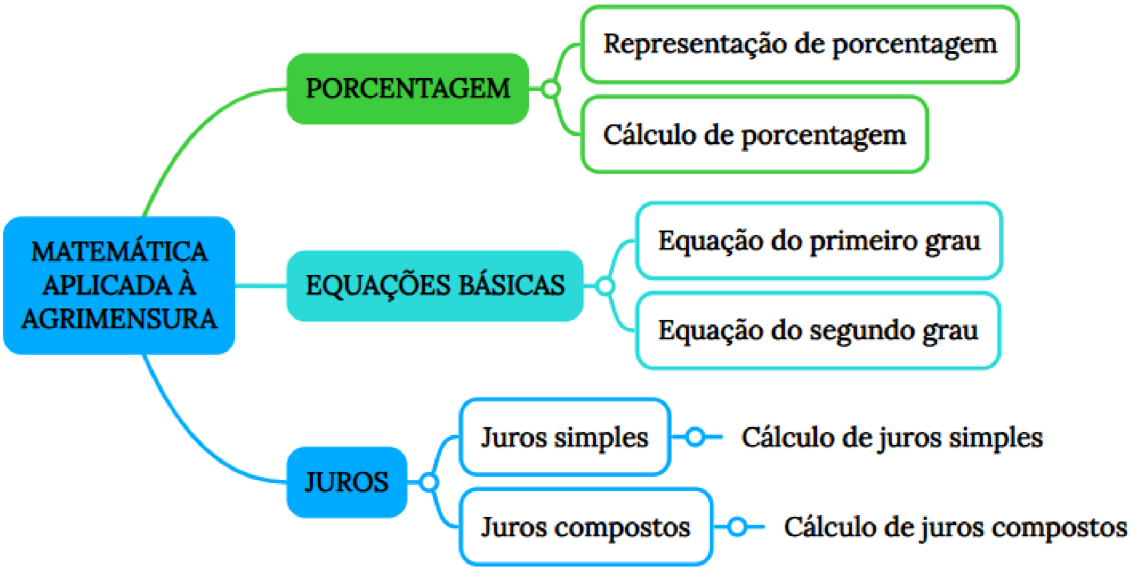
Sessões Especiais

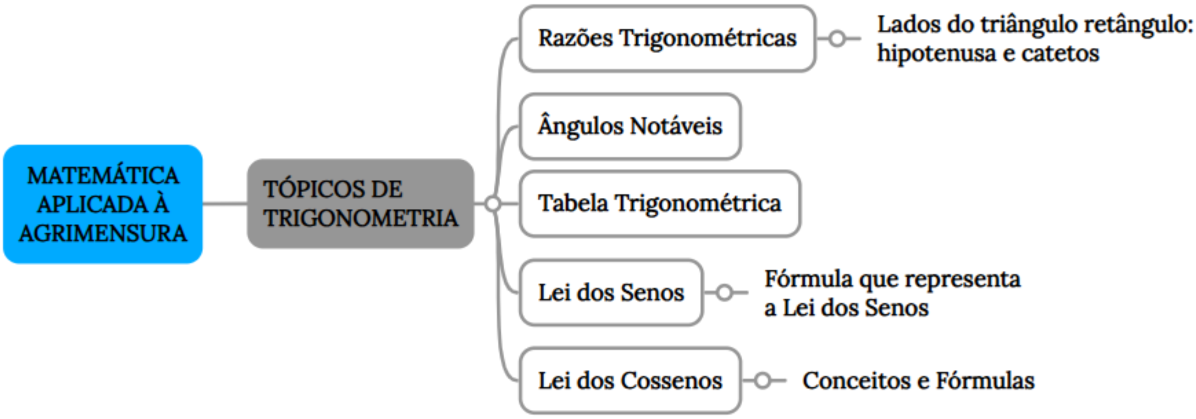
MAPA DE ESTUDO











SÍNTESE DIRETA

1. **ARITMÉTICA BÁSICA**

- **Operações fundamentais**: Soma, subtração, multiplicação e divisão, essenciais para a manipulação de dados numéricos.
- **Números primos e critérios de divisibilidade**: Regras que ajudam a identificar divisores de números e simplificar cálculos.
- **MMC e MDC**: O mínimo múltiplo comum (MMC) é utilizado para encontrar denominadores comuns em frações, enquanto o máximo divisor comum (MDC) ajuda a simplificar divisões.

- **Frações e números decimais**: Representação e conversões entre frações e números decimais, além das operações matemáticas aplicadas a eles.
- **Potenciação e radiciação**: Multiplicação de fatores iguais (potenciação) e operação inversa (radiciação), utilizadas para cálculos geométricos e estatísticos.

2. **GRANDEZAS E MEDIDAS**

- **Sistema Internacional de Unidades (SI)**: Sistema padrão adotado globalmente para garantir precisão nas medições.
- **Medidas de comprimento, área, volume e capacidade**: Unidades como metro, quilômetro, hectare, metro cúbico e litro são aplicadas para medir terrenos e espaços físicos.
- **Medidas agrárias**: Inclui medidas específicas usadas na topografia, como hectare, are e alqueire, que são utilizadas para dimensionar propriedades rurais e áreas de cultivo.

3. **RAZÃO, PROPORÇÃO E REGRA DE TRÊS**

- **Razão e proporção**: Relação entre grandezas e sua representação em forma de fração.
- **Grandezas diretamente e inversamente proporcionais**: Identificação da relação entre duas variáveis, como a relação entre distância e tempo em levantamentos de campo.
- **Regra de três simples e composta**: Método para resolver problemas que envolvem grandezas proporcionais, seja com duas ou mais variáveis.

4. **PORCENTAGEM**

- **Representação e cálculo**: Pode ser expressa na forma decimal, fracionária e percentual.
- **Aplicação em descontos, juros e comissões**: Muito utilizada em cálculos de taxas de ocupação do solo, depreciação de equipamentos e valorização de terrenos.

5. **EQUAÇÕES BÁSICAS**

- **Equação do primeiro grau**: Utilizada para resolver problemas simples envolvendo grandezas proporcionais e conversões.
- **Equação do segundo grau**: Aplicada para cálculos mais avançados, utilizando a fórmula de Bhaskara para encontrar soluções.

6. JUROS

- **Juros simples**: Calculado sobre o valor inicial (capital), sem acúmulo de juros ao longo do tempo.
- **Juros compostos**: Acumulam-se ao longo do tempo, sendo aplicados em financiamentos e correções monetárias.

7. TRIGONOMETRIA APLICADA À AGRIMENSURA

- **Razões trigonométricas**: Seno, cosseno e tangente, usados para calcular distâncias e elevações em terrenos.
- **Ângulos notáveis e tabela trigonométrica**: Valores comuns de ângulos usados em cálculos de medições topográficas.
- **Lei dos Senos e Lei dos Cossenos**: Fórmulas aplicadas para encontrar distâncias e ângulos em levantamentos de áreas irregulares.

MOMENTO QUIZ

1. **Um agrimensor precisa dividir um terreno de 8.100 m² em lotes de 45 m² cada. Quantos lotes serão formados?**
   a) 150.
   b) 160.
   c) 180.
   d) 200.
   e) 220.

2. **Um terreno mede 3 hectares. Sabendo que 1 hectare equivale a 10.000 m², qual é a área total do terreno em metros quadrados?**
   a) 3.000 m².
   b) 30.000 m².
   c) 300.000 m².
   d) 3.500 m².
   e) 35.000 m².

3. **Uma equipe de agrimensura consegue mapear 120 hectares de um loteamento em 8 dias. Se a equipe trabalhar no mesmo ritmo, quantos hectares conseguirá mapear em 12 dias?**
   a) 160 hectares.

b) 180 hectares.

c) 200 hectares.

d) 220 hectares.

e) 240 hectares.

4. Um agrimensor comprou um equipamento por R$ 5.000,00 e o financiou com juros compostos de 5% ao mês por 3 meses. Qual será o valor final a ser pago pelo equipamento? (Use a fórmula dos juros compostos: $M = C(1 + i)^n$, onde C = capital inicial, i = taxa decimal e n = tempo)

a) R$ 5.787,50.

b) R$ 5.875,00.

c) R$ 5.890,63.

d) R$ 5.980,00.

e) R$ 6.000,00.

5. Um agrimensor precisa calcular a altura de uma torre utilizando trigonometria. Ele posiciona seu equipamento a 50 metros da base da torre e mede um ângulo de elevação de 30°. Sabendo que tan(30°) = 0,577, qual a altura aproximada da torre?

a) 20 metros.

b) 25 metros.

c) 28 metros.

d) 30 metros.

e) 35 metros.

Gabarito

QUESTÃO	ALTERNATIVA
1	C
2	B
3	B
4	C
5	B

Referências

DANTE, Luiz Roberto. Matemática - Contexto e Aplicações. Ens. Médio - Vol. 1, 2 e 3. Ática, 1999.

MARCONDES/ GENTIL/ SÉRGIO. Matemática para o Ensino Médio. V. Único.Ática,1999.

GIOVANNI/ BONJORNO/ GIOVANNI Jr. Matemática Completa. Volume Único. FTD,2002.

PAIVA, Manuel Rodrigues. Matemática. Volume Único. Moderna, 2003.

BIANCHINI, Edwaldo & PACCOLA, Herval: Matemática, Editora Moderna, São Paulo, 1990, v.1.

PAIVA, Manoel Rodrigues: Matemática, Editora Moderna, 1.ed., São Paulo, 1999. v.1.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim. Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas. Campinas: Editora da UNICAMP; São Paulo: Imprensa Oficial, 2000.

NETTO, Scipione di Pierro: Matemática, Editora Ática, 2. Ed., São Paulo 1984, v.1.

OBRIGADO!

CONTINUE ESTUDANDO.

Ineprotec