Matemática Aplicada à Agrimensura

Técnico em Agrimensura

Sumário

Agrimensura

A Agrimensura, objeto do presente estudo, é o ramo da Engenharia que, por meio de medições realizadas em uma determinada área (topografia), coleta dados geográficos, que podem ser distâncias, ângulos e outros, a fim de facilitar o preparo de áreas urbanas e rurais. Com isso, pode-se realizar projetos de construção civil e/ou modificação na infraestrutura das áreas estudadas (RIOS, 2004).

Agrimensura é a parte da topografia que tem por fim o levantamento e o cálculo das áreas de propriedades públicas e privadas. Os limites das propriedades constam dos títulos de propriedade (escritura) originários dos títulos primitivos proprietários, passando pelos donos sucessivos ou desmembramentos em parcelas autônomas, em virtude de partilhas (SOUSA, 1995).

O Agrimensor pode operar com elementos da Matemática (aritmética, geometria e trigonometria), física (luneta, telescópio), engenharia (agronômica), geografia, entre outros. Atualmente, são utilizados os modernos teodolitos ou estações totais, estações totais robóticas, receptores, GPS (Global Positioning System- Sistema de Posicionamento Global), níveis digitais, software de levantamento e outros como ferramentas de trabalho do agrimensor.

Segundo Espartel (1969), os processos empregados nesta prática são os gráficos (Geometria), os numéricos e os analíticos (Aritmética, Trigonometria e Geometria Analítica).

Assim, a matemática exerce papel importante no desenvolvimento da topografia, sendo uma das responsáveis pelo aperfeiçoamento dos instrumentos usados na mesma, o que demonstra que a agrimensura e a topografia evoluíram em termos tecnológicos, isto é, os procedimentos e técnicas atuais empregadas para fazer, por exemplo, um desmembramento (divisão em parcelas de uma determinada superfície de terra seja urbano ou rural) não são as mesmas de quando a agrimensura surgiu (ANDRADE, 2012).

É necessário, para tanto, definir alguns conceitos básicos referentes à topografia para que os estudantes consigam relacioná-los às aplicações práticas do estágio de agrimensura.

O Levantamento consiste em medições necessárias para reproduzir, na planta topográfica, um trecho de uma parte da superfície terrestre.

A representação gráfica é usada como plano para representar graficamente a planta topográfica que é a projeção horizontal dos pontos levantados durante a medição, contendo todas as características de uma área; incluindo relevo, curvas de nível, perfil longitudinal, seções transversais, os elementos relevantes existentes no local, metragem, cálculo de área, pontos cotados e norte magnético.

A escala é a relação de semelhança constante entre as figuras da planta e do terreno.

A planimetria é a parte da geometria que estuda as figuras planas, (representação de um terreno sem levar em conta o relevo), medição de superfícies planas com o emprego do planímetro. É quando a partir do levantamento de um local, os detalhes existentes (divisas, divisões internas, construções, etc.) são representados em projeção horizontal. Para tal, utilizam-se de ângulos e distâncias horizontais.

E, a altimetria estuda o relevo do solo, medindo-se as alturas relativas entre pontos, com base em um plano de referência de nível, medindo-se distâncias verticais (GODOY, 1988).

Reta e Ponto

Alguns elementos da matemática, como o ponto e a reta, dão base para a construção dos conhecimentos geométricos. Os conceitos de ponto e reta são conceitos primitivos, por isso não há uma definição exata para esses elementos.

- Reta

"Reta é a figura geométrica constituída por uma linha que estabelece a menor distância entre duas posições"

Características da reta:

- a reta só possui uma dimensão, comprimento;
- a reta é ilimitada, não possui início e fim.

Conceitos derivados dos primitivos:

. Semirreta é a parte da reta limitada por um ponto.

. Segmento de reta é a parte da reta limitada por dois pontos.

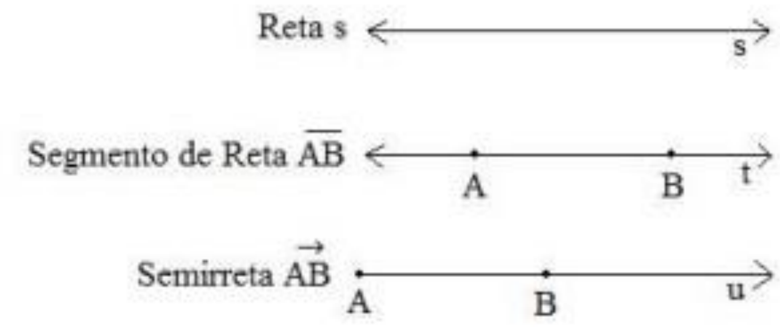


Figura: Reta, segmento de reta e semirreta

Fonte: https://www.todamateria.com.br/segmento-de-reta

Ponto

- Ponto do latim "punctum" é um sinal circular de dimensões pequenas.
- Ponto é a figura geométrica formada pelo encontro de duas retas.
- Característica do ponto: o ponto não possui dimensões.

Notação: O ponto é representado por letra latina maiúscula.

Figura: Ponto

http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10396/geo0101.htm

Ângulos

Definição formal: Ângulo é uma medida expressa em graus que é atribuível à região ou conjunto de pontos situados entre duas semirretas de mesma origem. Uma ilustração de ângulo se encontra na Figura.

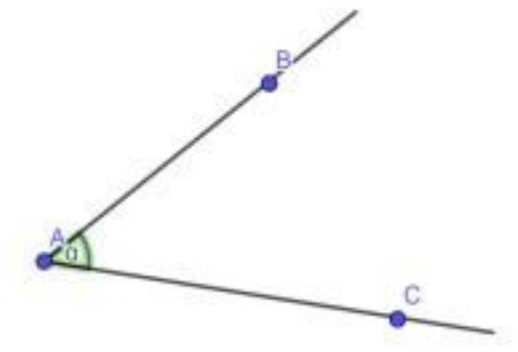


Figura: Ângulo BÂC formado pelo Vértice A e semirretas AB e AC

Unidades de medida do ângulo: Existem algumas unidades com as quais podemos medir um ângulo. Estudaremos duas delas: o grau (º) e o radiano (rad). O transferidor é o objeto utilizado para medir ângulos em graus.

Figura: Transferidor

Muitas vezes utilizamos o transferidor para medir um ângulo qualquer e percebemos que a medida do ângulo fica entre dois valores inteiros. Existem submúltiplos do grau para representar o ângulo nessa situação. Os submúltiplos do grau são os minutos e os segundos de arco, e expressam medidas menores do que 1°.

Quando dividimos um grau (unidade de medida de ângulos) em 60 partes iguais, cada uma dessas partes é chamada de minuto. Quando dividimos um minuto em 60 partes iguais, cada uma dessas partes é chamada de segundo. Dessa maneira, um minuto é igual a 60 segundos e um grau é igual a 60 minutos.

Quando o comprimento do arco de uma circunferência for igual ao seu raio, então dizemos que o ângulo formado é de 1 radiano (rad).

Para converter o grau em radianos, ou vice-versa, usa-se uma regra de três, pois 180º (graus) corresponde a 1 pi rad.

Polígonos

"**Polígonos** são figuras geométricas planas que são formadas por segmentos de reta a partir de uma sequência de pontos de um plano, todos distintos e não colineares, onde cada extremidade de qualquer um desses segmentos é comum a apenas um outro."

(https://www.infoescola.com/geometria/poligonos) Eles podem ser côncavos ou convexos.

Polígono convexo: Um polígono ABCDE é convexo se dados dois pontos F e G, interiores ao referido polígono, o segmento de reta FG estiver contido inteiramente no polígono. Caso contrário, ele será côncavo.

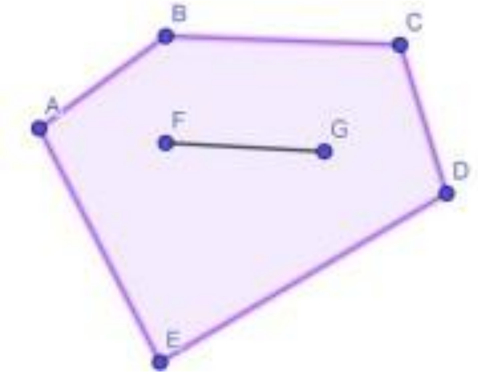


Figura: Polígono Convexo

Polígono côncavo ou não convexo: Um polígono é côncavo ou não convexo se existem pontos H e I no interior do polígono, tal que o segmento de reta HI, cujas extremidades são os pontos H e I, não está inteiramente contido no polígono.

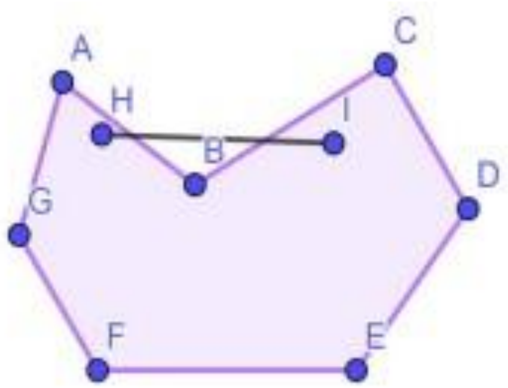


Figura: Polígono côncavo ou não convexo

Polígonos Regulares e Irregulares

Um polígono que possui todos os lados congruentes é chamado de equilátero. Quando ele possui todos os ângulos (internos) congruentes, é chamado de equiângulo.

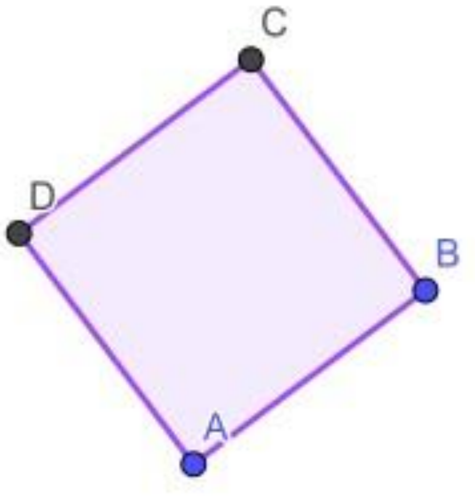


Figura: Polígono Equilátero

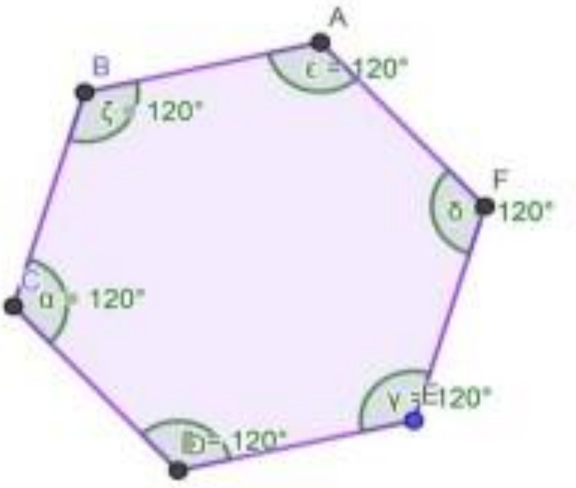


Figura: Polígono equiângulo

Um polígono convexo é regular se for equilátero e equiângulo, ou seja, quando seus lados possuem a mesma medida e seus ângulos internos também são iguais.

Nome dos polígonos principais ou mais usados

Podemos dar nomes aos polígonos de acordo com a quantidade de lados que ele possui. Veja a tabela

Tabela: Nomenclatura dos polígonos

Número de lados	**Nome**
3	Triângulo ou trilátero
4	Quadrângulo ou quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono (Hendecágono)
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono
n	n-látero

Geralmente, para polígonos com lados maiores que 20, nos referimos a ele apenas explicitando o seu número de lados. Por exemplo, um polígono de 27 lados.

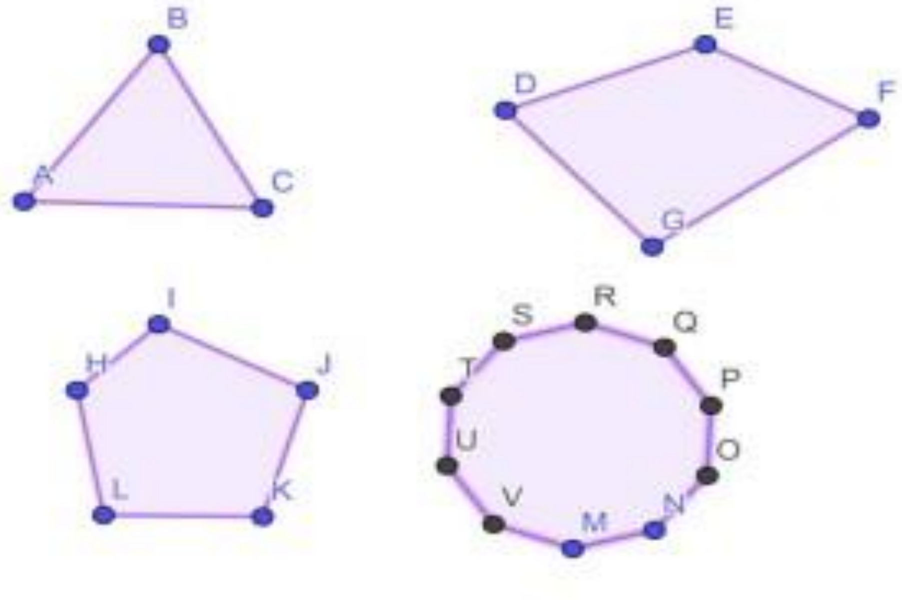


Figura: Polígonos: Triângulo, quadrilátero, pentágono, decágono

Soma dos ângulos internos de um polígono convexo:

Através da demonstração abaixo, podemos constatar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo plano equivale a 180º.

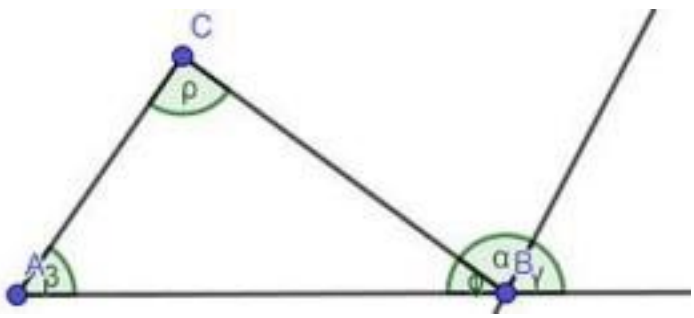


Figura: Triângulo ABC

1- Construir um triângulo ABC qualquer;

2- Construir a reta r passando por B paralela ao lado AC;

3- O ângulo Y é congruente a β (pois Y e β são correspondentes);

4- O ângulo α é congruente a ρ (pois α e ρ são alternos internos)

Como $\Phi + \alpha + Y = 180º$, por 3 e 4, concluímos que:

$\Phi + \beta + \rho = 180º$

Podemos obter a soma dos ângulos internos dos polígonos convexos, ao dividi-los em triângulos.

Um quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos. Assim, a soma das medidas de seus ângulos internos é dada por:

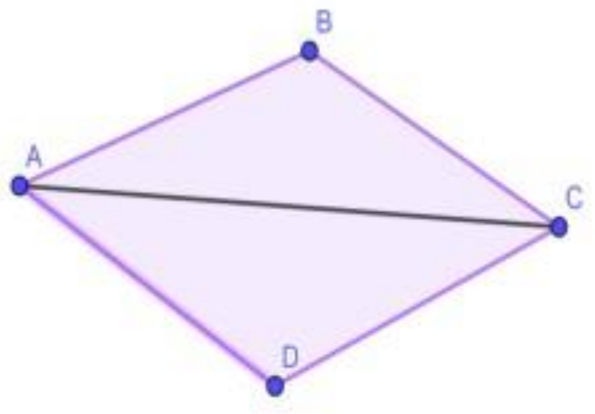


Figura: Quadrilátero: dividido em dois triângulos

$S = 2 \cdot 180^{O} = 360^{O}$

Um pentágono pode ser dividido em três triângulos. Assim, a soma das medidas dos ângulos internos é dada por:

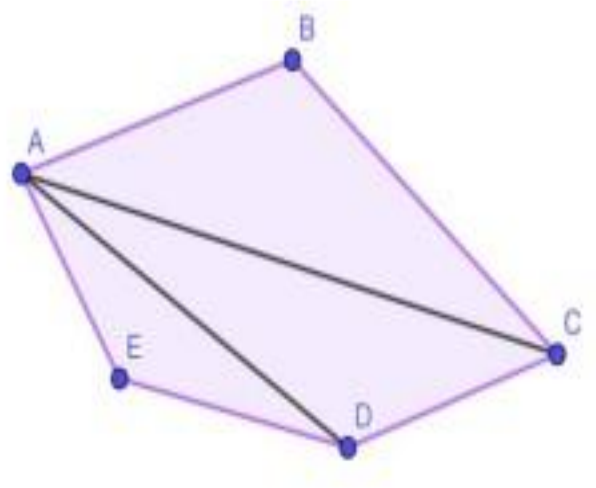


Figura: Pentágono

$S = 3 \cdot 180^{O} = 540^{O}$

Da mesma forma, um hexágono pode ser dividido em quatro triângulos. Assim, a soma das medidas dos ângulos internos é dada por:

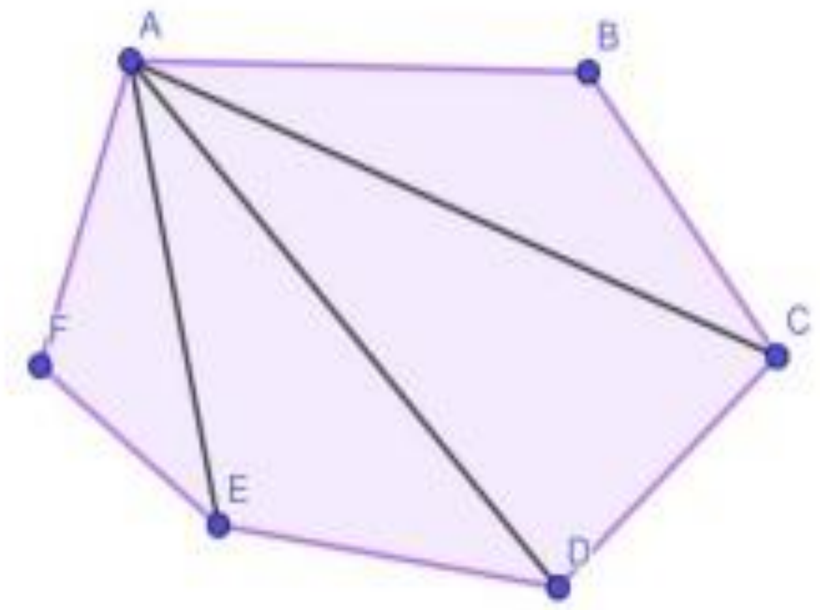


Figura: Hexágono

$S = 4 \cdot 180^{\circ} = 720^{\circ}$

Generalizando, um polígono convexo que possui n lados, n natural maior ou igual a 3, a soma das medidas de seus ângulos internos será dada por:

$S = (n - 2) \cdot 180^{\circ}$

Medida de um ângulo interno de um polígono regular:

Sabemos que um polígono convexo que tem n lados é equilátero e equiângulo ele é regular. Assim, para se obter a medida do ângulo interno de um polígono regular, basta dividir a soma de seus ângulos internos pelo número de ângulos, ou seja, por n.

$$Ai = S/n = [\ (n - 2) \ .\ 180^{\circ}] \ / \ n$$

Escalas Métricas

Escala é a relação entre as medidas do desenho de um objeto em seu tamanho real.

Escrevemos

Escala = medida do desenho/medida real.

Exemplo: A escala 1:100 significa que a cada unidade de medida no desenho corresponde a 100 unidades de medida real.

A escala gráfica é uma régua graduada que serve para determinar de forma imediata, a distância gráfica, uma vez sabida a distância real, e vice versa.

Figura: Escalímetro

Fonte: https://www.desenhoepintura.com.br/categoria/escalimetro-triangular

Seno e Cosseno de um ângulo e as suas leis

Considerando o círculo unitário,

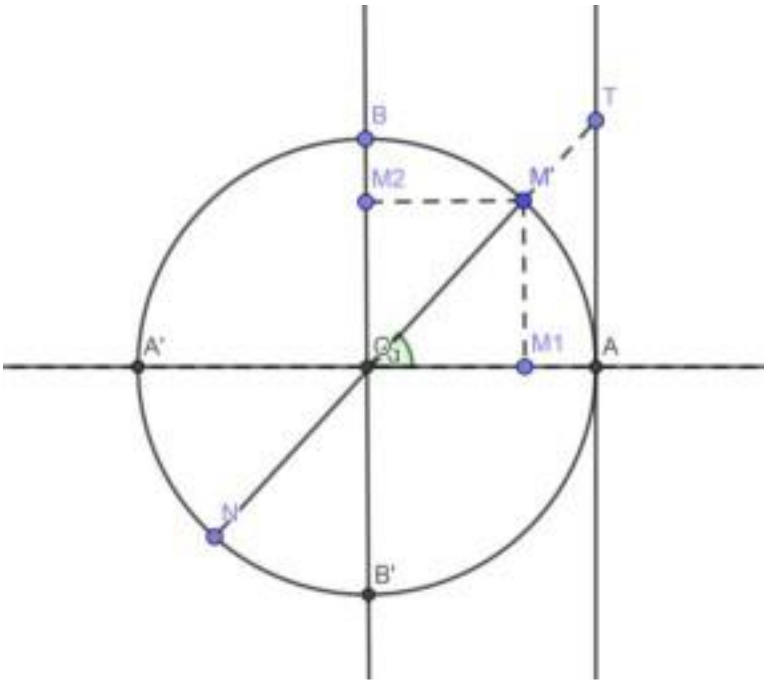


Figura: Ângulo α central na circunferência de raio igual a 1

As quantidades seno, cosseno e tangente do ângulo α são dados pelas relações:

$$sen\alpha = \overline{OM_2},\ COS\alpha = \overline{OM_2} \text{ e } tg\alpha = \overline{AT}$$

- cos α *e* sen α são as coordenadas do ponto M, isto é, M = (cos α , sen α)
- tg α é a segunda coordenada do ponto T, isto é, T = (1 , tg α)

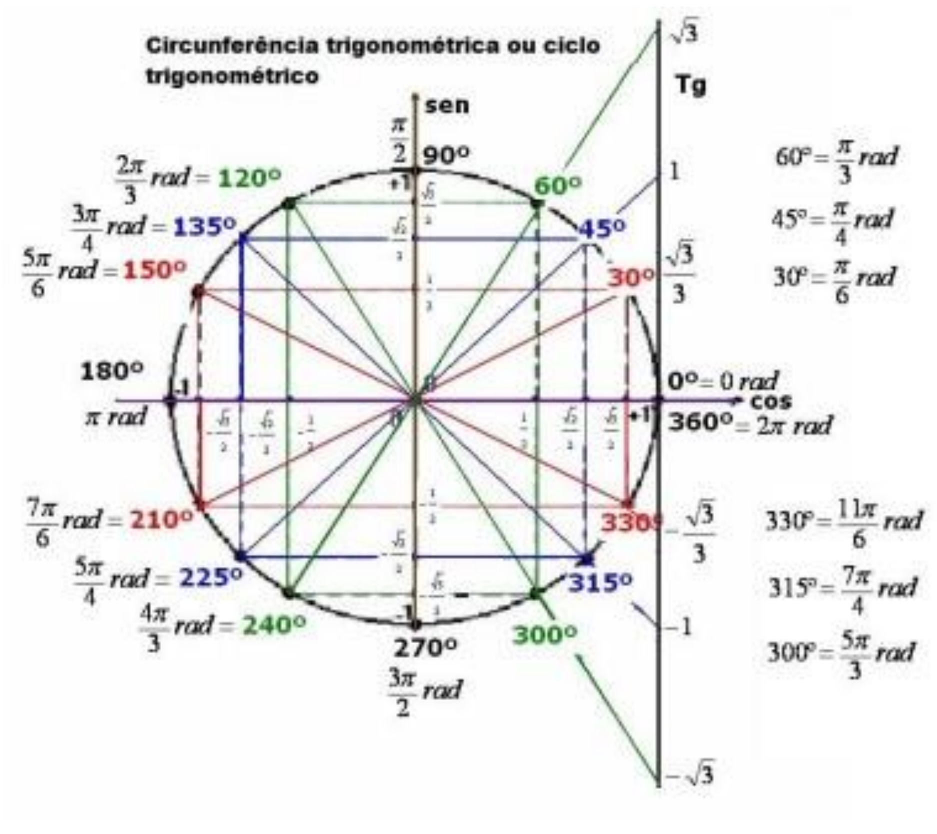


Figura: Ciclo Trigonométrico

Fonte: https://brainly.com.br

Lei dos cossenos

Consideremos o triângulo ABC conforme a figura a seguir:

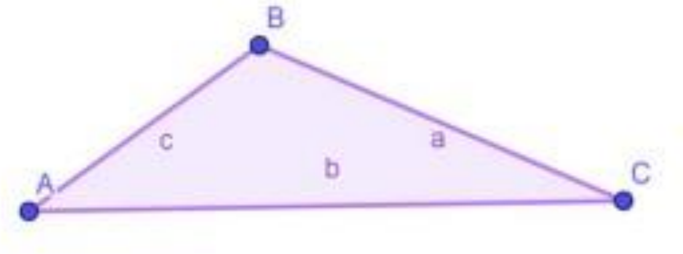


Figura: Triângulo ABC

Em qualquer triângulo ABC, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles. A saber:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.\ b.\ c.\ \cos \hat{A}$

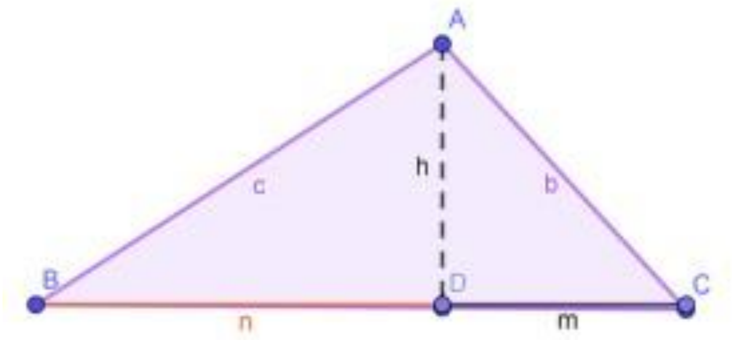
$b^2 = a^2 + c^2 - 2.\ a.\ c.\ \cos\hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2.\ a.\ b.\ \cos\hat{C}$

Demonstração:

Para chegarmos na lei dos cossenos, vamos conhecer as relações métricas no triângulo retângulo.

Dado o triângulo ABC retângulo em A,



a

Figura: Triângulo ABC

Onde,

BC = a (medida da hipotenusa)

AC = b (medida do cateto menor)

AB = c (medida do cateto maior)

AD = h (medida da altura)

BD = n (projeção do cateto c sobre a hipotenusa a)

DC = m (projeção do cateto b sobre a hipotenusa a)

Pela semelhança dos triângulos BAC e BDA temos,

$\Delta BAC \sim \Delta BDA$

$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \rightarrow c^2$=a.n

Pela semelhança dos triângulos BAC e ADC temos,

$\Delta BAC \sim \Delta BDA$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \rightarrow b^2$=a.n (II)

Pela semelhança dos triângulos BDA e ADC temos,

ΔBDA ~Δ ADC

$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \rightarrow h^2$= m.n (III)

Somando (I) e (II), e considerando que a = m + n, temos,

$b^2 + c^2 = a(m + n) \rightarrow b^2 + c^2 = a^2$ (IV)

Além disso, multiplicando (I) e (II) e usando (III), temos,

$b^2.c^2 = a^2.m.n \rightarrow b.c = a.h$ (V)

Então:

- O quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos, teorema de Pitágoras (IV).

$a^2 = b^2 + c^2$

- A medida de qualquer cateto ao quadrado é igual à medida proporcional das medidas da hipotenusa e da projeção de cada cateto sobre ela (I e II).

$$b^2 = a.m \ e \ c^2 = a.n$$

- A medida da altura relativa à hipotenusa é igual à média geométrica entre as medidas dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa (III).

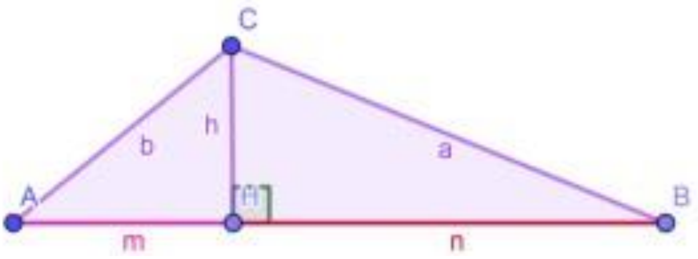
$$h^2 = m.n$$

- O produto das medidas dos catetos é igual ao produto das medidas da hipotenusa e a altura relativa a ela (V).

b. c = a. h

Sabemos que as relações trigonométricas do seno, cosseno e tangente são válidas somente em triângulos retângulos. Para triângulos acutângulos ou obtusângulos, temos que estabelecer outras identidades trigonométricas, chamadas de leis dos senos e cossenos. Faremos aqui, o estudo da lei dos cossenos.

Considere agora, o triângulo acutângulo a seguir, de lados a, b e c , sendo CH a altura relativa ao lado AB de medida c.



c

Figura: Triângulo ABC

No triângulo BCH, onde n= c – m, temos que:

a= h + (c – m)

a = h + c - 2cm + m

a = (h + m) + c - 2cm (I)

No triângulo ACH, temos que:

b= h + m (II)

e

cos Â = m/b

m = b. cos Â (III)

Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.\, b.\, c.$ cos Â

De forma análoga, obtemos:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.\, a.\, c.$ Cos $\hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2.\, a.\, b.$ Cos $\hat{C}$

As três igualdades anteriores são chamadas de Lei dos Cossenos, que diz: “Num triângulo qualquer, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado”.

Observação: A lei dos cossenos também é válida para triângulos com dois ângulos agudos e um ângulo obtuso:

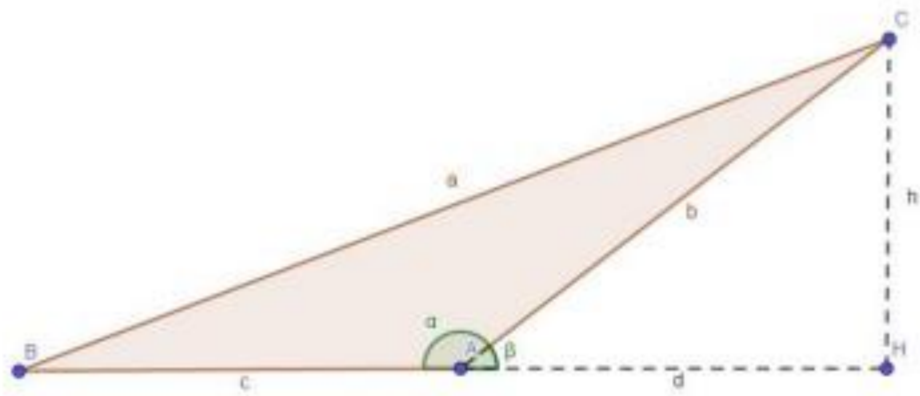


Figura: Triângulo ABC (obtuso)

Demonstração:

Seja um segmento de reta HC, perpendicular ao lado AB. Dizemos que HC é a altura h do triângulo, relativa ao lado AB, passando pelo vértice C.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CHB, temos que:

$a = h + (d + c)$

$a = h = d + 2cd + c$

$a= (h + d) + c + 2cd$ (I)

No triângulo AHC, temos que:

$b = h+d$ (II) e

cos β = $\frac{d}{b}$

mas,

cos β = cos (π – α) = - cos α

então,

- cos α $\frac{d}{b}$ => d = - b cos α (III)

Substituindo os resultados (II) e (III) na equação (I), obtemos:

a = b + c + 2c. (-b cos α)

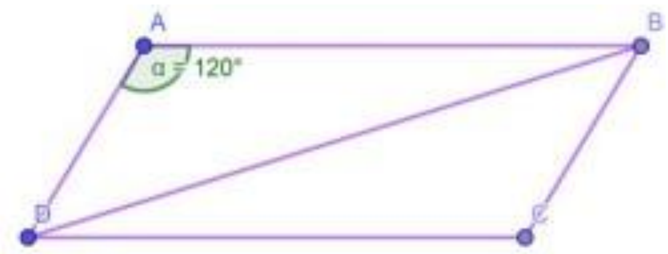
a = b + c - 2b c cos α

De forma análoga, temos:

b = a + c - 2 a c cos ρ

c = a + b - 2 a b cos θ

Exemplo 1: Calcule a medida da maior diagonal do paralelogramo da figura a seguir utilizando a **lei dos cossenos**.



Dados: AB = CD = 10 cm

AD = BC = 5 cm

Resolução:

cos 120º = –cos(180º – 120º) = – cos 60º = – 0,5

BD = x

Aplicando a lei dos cossenos, temos,

X= 5+10-2.5.10.(-cos 60°)

X= 25 +100-100.(-0,5)

X= 125+50

X=175

$\sqrt{x^2}$=$\sqrt{175}$

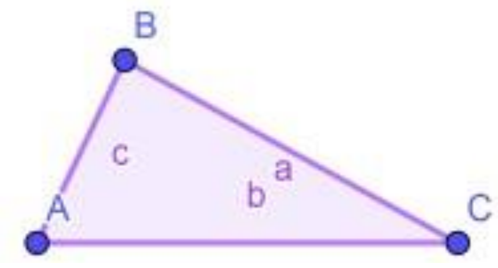
X= $\sqrt{x^2.7}$

X=5$\sqrt{7}$

Portanto, a diagonal do paralelogramo mede $5\sqrt{7}$cm.

Exemplo 2: Em um triângulo ABC, temos as seguintes medidas: AB = 6 cm, AC = 5 cm e BC = 7 cm. Determine a medida do ângulo A.

Vamos construir o triângulo com as medidas fornecidas no exercício:



Resolução:

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

a = 7, b = 6 e c = 5

7 = 6 + 5 – 2.6.5.cos Â

49 = 36 + 25 – 60.cos Â

49 – 36 – 25 = –60.cos Â

–12 = –60.cos Â

12 = 60.cos Â

12/60 = cos Â

cosÂ = 0,2

O ângulo que possui cosseno com valor aproximado de 0,2 mede 78º.

Em seguida, faremos o estudo da lei dos senos:

Lei dos senos

Demonstração:

Considere o triângulo ABC, acutângulo, abaixo, onde CH é a altura relativa ao lado AB.

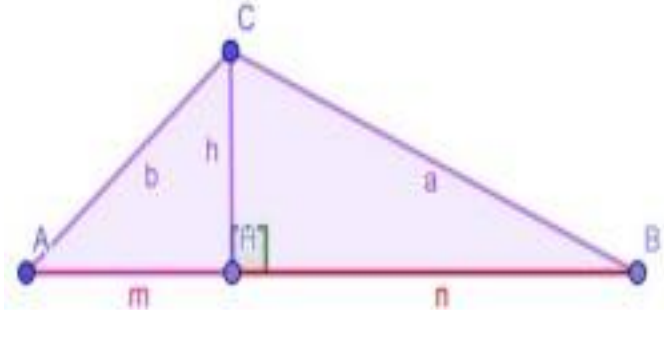


Figura: Triângulo ABC

No triângulo ACH, temos que:

sen A = h/b

h = b. sen A (I)

No triângulo BCH, temos que:

Sen B = h/a

h = a . sen B (II)

De (I) e (II), obtemos:

b.sen A = a. sen B

Ou

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{b}{Sen\ B}$$

Do mesmo modo, obtemos:

$$\frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC}$$

Assim, podemos concluir que:

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{b}{Sen\ B} = \frac{c}{Sen\ C}$$

Que é chamada de Lei dos senos ou Teorema dos senos.

Essa demonstração foi feita para um triângulo acutângulo, mas a mesma pode ser realizada para qualquer triângulo de forma análoga, chegando ao mesmo resultado.

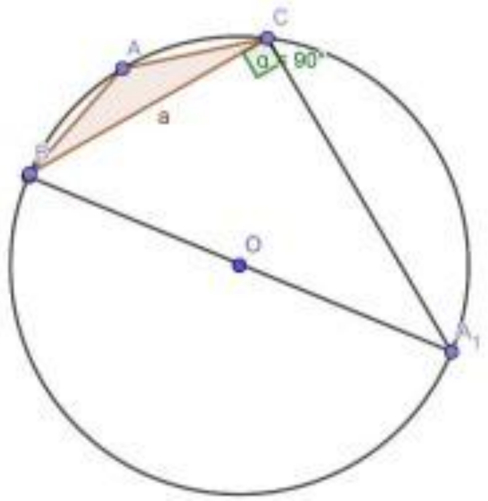


Figura: Triângulo ABC 1 (obtuso)

Se A e A1 são os ângulos que correspondem aos vértices A e A1, a relação entre eles é dada por A1 = π – A, pois são ângulos inscritos à circunferência correspondentes aos arcos replementares BAC e BA1C. Então,

$$\text{Sen } (\pi - \text{A }) = \frac{a}{2R} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{Sen\ (\pi - A)}$$

Mas,

sen A = sen (π – A)

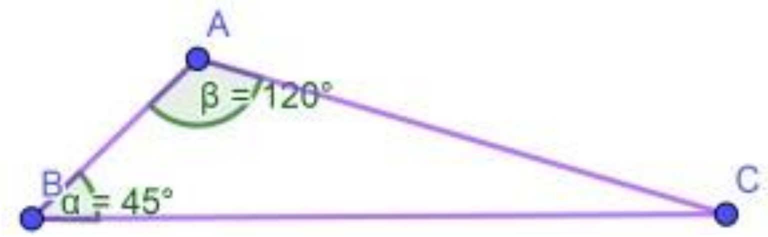
Logo,

$$\frac{a}{sen\ A} = 2R$$

Repetindo o mesmo processo para as bases AC e AB, encontraremos os outros quocientes

$$\frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C} = 2r$$

Exemplo 1: Determine o valor de BC no triângulo a seguir.



Dados:

AC = 100 m

BC = x

Sen(120º) = sen(180º – 120º) = sen(60º) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou 0,865

Sen(45º) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou 0,705

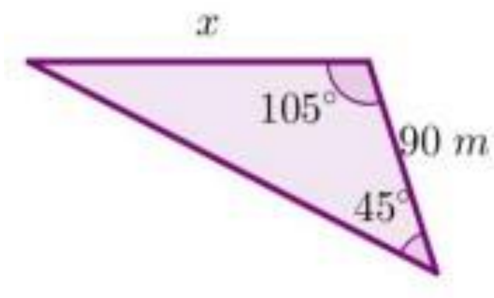
$$\frac{x}{sen(60°)} = \frac{100}{sen(45°)}$$

$$\frac{x}{0,866} = \frac{100}{0,707}$$

0,707x = 86,6 x = 122,5

Logo, a medida solicitada é 122,5 metros.

Exemplo 2: No triângulo a seguir, temos dois ângulos (45º e 105º, respectivamente), e um dos lados mede 90 metros. Com base nesses valores, determine a medida do lado x.



Para determinar a medida de x, devemos utilizar a lei dos senos, mas, para isso, precisamos descobrir o valor do terceiro ângulo do triângulo. Para tal cálculo, utilizaremos a seguinte definição: a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

$\alpha + 105º + 45º = 180º$

$\alpha + 150º = 180º$

$\alpha = 180º – 150º$

$\alpha = 30º$

Agora vamos aplicar a lei dos senos:

$$\frac{x}{sen45°} = \frac{90}{sen30°}$$

$$\frac{x}{0,707} = \frac{90}{0,5}$$

0,5x = 63,63 x = 127,26, portanto, a medida de x é igual a 127,26 metros.

Perímetros de Figuras planas

A palavra perímetro tem sua origem do grego perí (em volta de) e métron (medida). Perímetro de figuras planas ou de superfícies compõe o contorno destas e a sua medida.

A unidade de medida utilizada no cálculo do perímetro é a mesma unidade de medida do comprimento: centímetro, metro, quilômetro, e outras medidas de comprimento.

Considere o polígono ABCDEFGHA a seguir, sendo AB = 3 cm, BC = 2 cm, CD = 7 cm, DE = 2 cm, EF = 1 cm e FG = 3 cm.

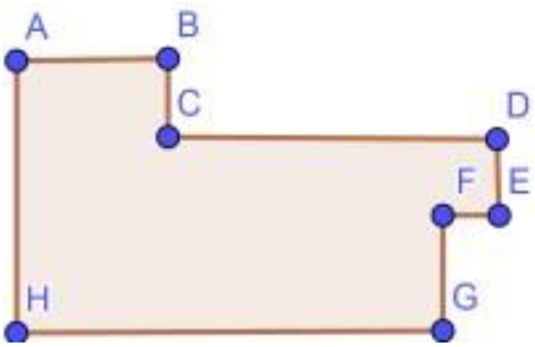


Figura: Polígono

Vamos calcular seu perímetro:

Temos que GH = 9 cm e HA = 7 cm.

Assim, o perímetro da figura é dado por:

P = (7 + 3 + 2 + 7 + 2 + 1 + 3 + 9) cm P = 34 cm (centímetros)

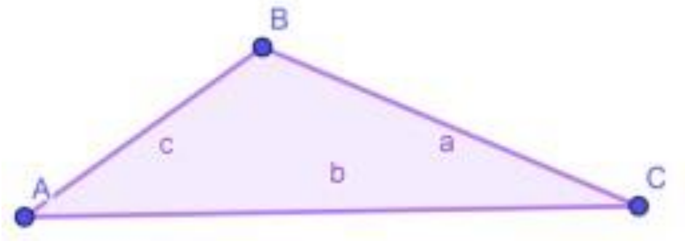
Áreas de Figuras planas

A necessidade de determinar a medida de superfícies de áreas para futuras construções vem desde a antiguidade. Área ou superfície de uma figura plana tem a ver com o conceito (primitivo) de sua extensão (bidimensional).

A unidade de medida da área é iguala unidade de comprimento ao quadrado: cm, m, km e outras.

Pode-se calcular a área de um triângulo qualquer através de diversas fórmulas de acordo com os dados que se tem desse triângulo:

- Conhecendo os três lados do triângulo e sendo a, b e c os lados do triângulo, calcula-se o semi perímetro p e aplica-se a fórmula abaixo:

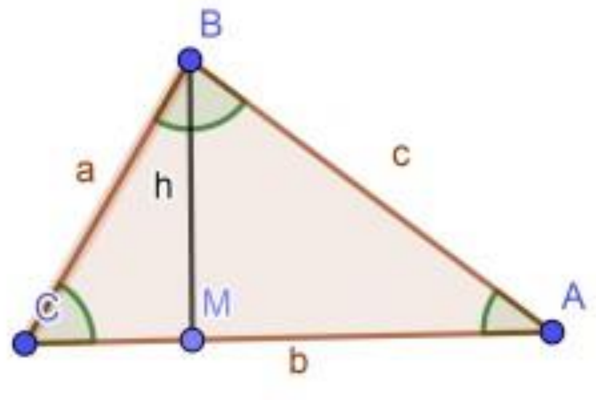


$A=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)(p-c)}$, sendo

p= $\frac{a+b+c}{2}$

Figura: Fórmula de Heron

A fórmula de Herão (ou de Heron) nos fornece a área do triângulo em função da medida dos três lados do triângulo. O nome faz referência ao matemático grego Herão de Alexandria. Seja o triângulo ABC, podemos demonstrá-la:



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo CBM, encontramos o comprimento BM:

$$a^2 = h^2 + (\overline{CM})^2$$

$$(\overline{CM})^2 = a^2 - h^2$$
$$(\overline{CM}) = \sqrt{a^2 - h^2}$$

Em seguida, encontramos o cosseno de c, através da relação trigonométrica no triângulo retângulo ABM:

$$\cos c = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a}$$

No triângulo ABC, aplicando a lei dos cossenos, relativa ao ângulo c, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b.\sqrt{a^2 - h^2}$$

Logo,

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right) \text{(I)}$$

e

$$A^2 = \frac{b^2.h^2}{4} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos,

$$A^2 = \left(\frac{a^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2}{4}\right)$$

$$A^2 = \frac{\left((a^2 + b^2 - c^2)\right)(2ab + (a^2 + b^2 - c^2))}{16}$$

Aplicando a diferença de dois quadrados:

$$A^2 = \frac{\left(2ab - (a^2 + b^2 - c^2)\right)(2ab + (a^2 + b^2 - c^2))}{16}$$

$$A^2 = \frac{(-(a^2 - 2ab + b^2) + c^2)(\left((a^2 + 2ab + b^2) - c^2\right))}{16}$$

$$A^2 = \frac{(c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2}{16}$$

Novamente pela diferença de quadrados:

$$A^2 = \frac{(c - (a - b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)}{16}$$

$$A^2 = \frac{(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)}{16}$$

$$A^2 = \frac{(c - a + b)}{2} \cdot \frac{(c + a - b)}{.2} \cdot \frac{(a + b - c)}{2} \cdot \frac{(a + b + c)}{2}$$

$$A^2 = \left(\frac{c + a + b - 2a}{2}\right)\left(\frac{c + a + b - 2b}{2}\right)\left(\frac{c + a + b - 2c}{2}\right)\left(\frac{a + b + c}{2}\right)$$

$$A^2 = \left(\frac{a + b + c}{2} - a\right)\left(\frac{a + b + c}{2} - b\right)\left(\frac{a + b + c}{2} - c\right)\left(\frac{a + b + c}{2}\right)$$

Como p = (a + b + c) / 2, tal que p é o semi perímetro (metade do perímetro), vem:

$A^2 = (p^2 - a)\ (p - b)(p - c).p$

Por fim,

A = $\sqrt{(p - a)\ (p - b)(p - c).p}$, sendo p o semi perímetro e a, b e c os lados do triângulo.

- Conhecendo as medidas da base B e altura h do triângulo

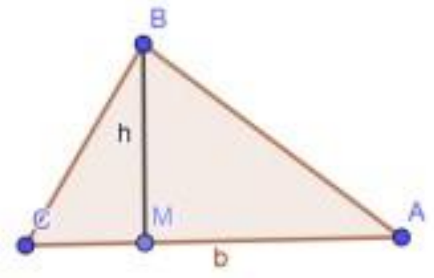


Figura: Triângulo ABC (base b e altura h)

Demonstração:

A área de um triângulo pode ser obtida calculando-se a metade da área de um paralelogramo, que é dada pelo produto de sua base pela altura (b.h).

Logo, a área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Observe que, ao desenhar uma diagonal no paralelogramo, obtemos dois triângulos distintos e congruentes. Isso acontece porque os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, logo, os triângulos formados são congruentes. Concluímos que as áreas desses triângulos são iguais.

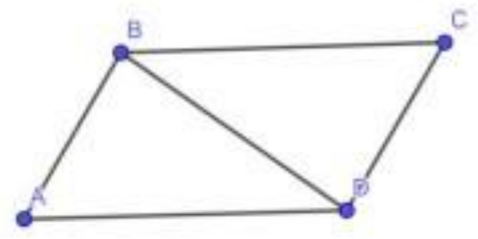


Figura: Paralelogramo dividido em duas partes iguais por uma diagonal

Como possuem áreas iguais, podemos concluir que a área do triângulo A é igual à metade da área do paralelogramo:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Essa fórmula vale para qualquer triângulo, pois todo triângulo pode ser usado para construir um paralelogramo.

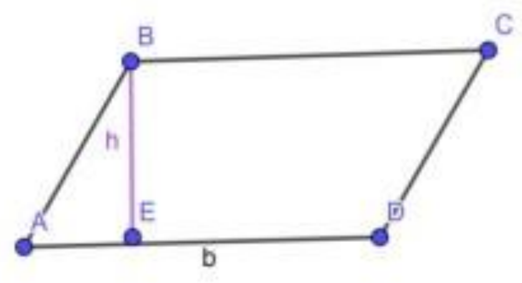


Figura: Paralelogramo

Observe apenas que a altura do triângulo é a distância entre a reta suporte do lado escolhido como base e o terceiro vértice do triângulo, aquele que não está contido na base. Assim, a altura é um segmento de reta que sempre forma com a base do triângulo um ângulo de 90º.

- Conhecendo dois lados e um ângulo entre esses lados do triângulo

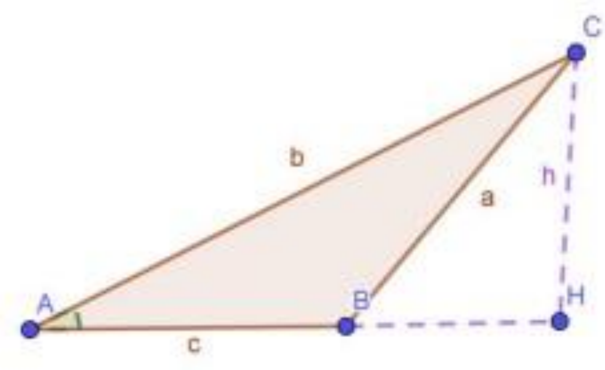


Figura: Triângulo ABC e altura h

Demonstração:

Cálculo da área do triângulo utilizando o ângulo Â.

Temos que a área do triângulo é dada por A = 1/2 c. h. O triângulo ∆AHC é retângulo.

Então, usando a relação trigonométrica, temos sen Â = h/b ou h = b. sen Â. Substituindo h em A = 1/2 c. h, temos A = 1/2 c. b. sen Â.

Referências

ANDRADE, C.F. Matemática aplicada à agrimensura. 2012. 54 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Fundação Universidade Federal de Rondônia - UNIR, Campus de JiParaná. 2012.

BERLINGHOFF, W.P.; GOUVÊA, F.Q. A Matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2ª ed. São Paulo: Blücher, 2010.

Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias/Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2).

DEWEY, J. Democracy and Education: an introduction to the philosophy education. Nova York/Londres: Free Press, 1996.

ESPARTEL, Lelis. Curso de Topografia. Porto Alegre: Globo. 1ª ed.1969, 655p.

GODOY, R. Topografia Básica. São Paulo: FEALQ, 1988.

GOETHE, J. W. Teoria de la Naturaleza. Madrid: Oikos-Tau, 1993.

GOETHE, J. W. Doutrina das Cores. São Paulo: Ed. Nova Alexandria, 1993.

LANZ, R. A pedagogia Waldorf: caminho para um ensino mais humano. 9. ed. São Paulo: Antroposófica, 2009.

RIOS, D.R. Dicionário Global da Língua Portuguesa Ilustrado. São Paulo: Difusão Cultural do Livro-DCL, 2004. 748p.

ROMANELLI, R.A. A arte e o desenvolvimento cognitivo: um estudo sobre os procedimentos artísticos aplicados ao ensino em uma escola Waldorf. São Paulo: 270 p. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2008.

SCHILLER, Friedrich. A Educação Estética do Homem. São Paulo: Ed. Iluminuras, 1995.

SOUSA, J.S. Aristeu Mendes Peixoto. Francisco Ferraz de Toledo. Enciclopédia Agrícola Brasileira A-B/ ESALQ, Apresentação Humberto de Campos – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1995. 499 p.

VIANA, S. Notas de aula de Metrologia. 2009. Disponível em: <http://www.sergioviana.com.br/Notas%20de%20aula%20de%20Metrologia%20Prof.pdf> Acesso em 09 de abril de 2017.

ZILKHA, E. Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos Teodolito. 2014. 50f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro. 2014.