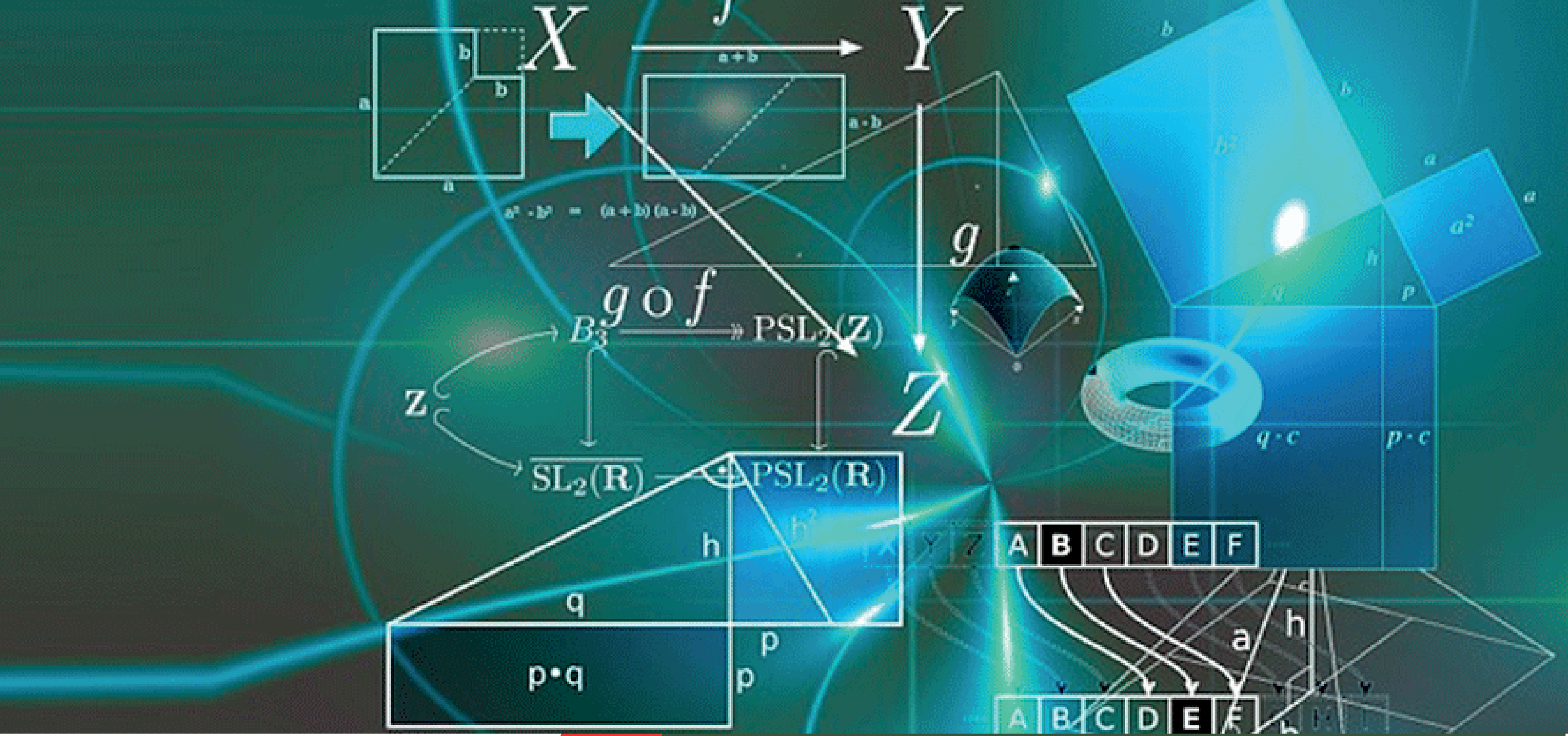


TÉCNICO EM AGRIMENSURA

Módulo I

Matemática Aplicada à Agrimensura

INEPROTEC
INSTITUTO DE ENSINO PROFISSIONALIZANTE E TÉCNICO
Quadra 101, Conjunto 2, Lote 01, Sobreloja
Recanto das Emas, Brasília/DF
61 3082.1060
ineprotec.com.br

Matemática Aplicada

Ficha Técnica

Tutor Responsável - Antonio de Pádua

Capa / Diagramação - Gabriel Araújo Galvão

Elabroração - Centro Federal de Educação Tecnológica -Departamento Acadêmico da Construção Civil - Matemática Aplicada

Índice

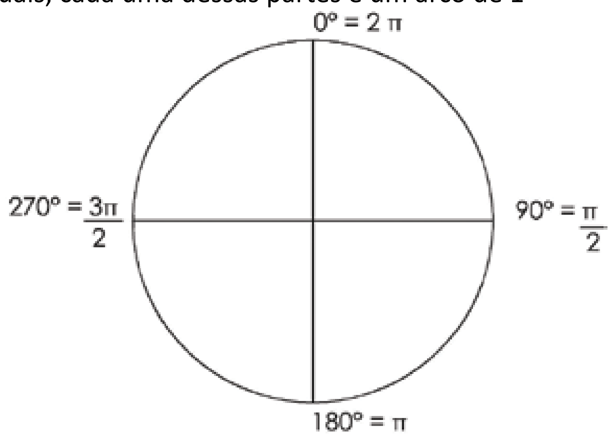
1. Sistema Angular Internacional

RADIANO

É o arco cujo comprimento é igual a medida do raio da circunferência que o contêm. A abreviação é Rad.

GRAU

Dividindo uma circunferência em 360° partes iguais, cada uma dessas partes é um arco de 1°



CONVERSÕES DE ÂNGULO

Graus para Radianos

$$Rad = \frac{\alpha \cdot \pi}{180}$$

Obs: α grau é decimal

Radianos para grau

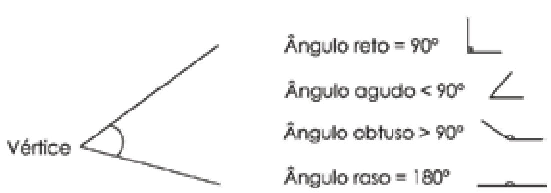
$$graus = \frac{\alpha \cdot 180}{\pi}$$

Obs: α é radiano

Sistema decimal = os decimais vão até 100

Sistema Sexagesimal = os decimais vão até 60;

TIPOS DE ÂNGULOS



Transformação centesimal em sexagesimal e vice-versa.
36,077778° centesimal = 36°04’40” sexagesimal

1) Converter os ângulos do sistema sexagesimal para o sistema centesimal:

a) 45°22’12” =
b) 51°04’59” =
c) 98°56’58” =
d) 77°44’32” =
e) 8°59”59” =

2) Converter os ângulos abaixo do sistema centesimal para o sistema sexagesimal:

a) 46,994155°
b) 36,599277°
c) 58,020222°
d) 91,121224°
e) 21,124433°

3) Dados os ângulos a seguir, calcular o resultado das operações (os resultados deverão estar no sistema sexagesimal):

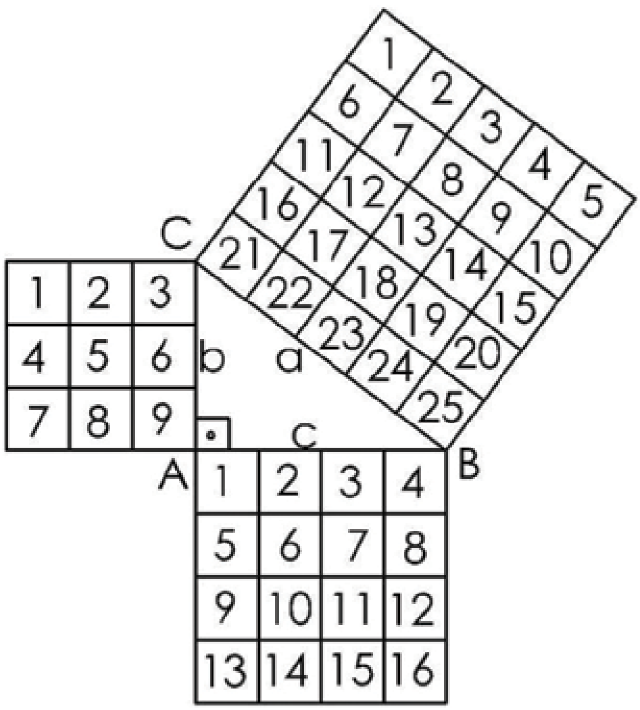
a) 45°22’12” + 98°56’58” =
b) 77°44’32” + 31°04’59” =
c) 8°59’59” + 36,599277° =
d) 46,994195° + 36,58769° =
e) 95°12’12” - 91°56’51” =
f) 187°47’22” – 41°14’19” =
g) 77°44’32” – 51°04’59” =
h) 67°44’36” – 58°04’32” =
i) 95°23’12” . 9 =
j) 57°43’38” . 5 =
k) 187°47’22” . 2 =
l) 77°44’22” . 7 =
m) 67°31’41” 5 =
n) 187°47’22” . 7 =
o) 95°46’38” / 4 =
p) 180°01’00” / 2 =
q) 77°41’57” / 3 =
r) 127°41’41” /2 =
s) 905°41’07” / 7=

2. Trigonometria

Trigonometria (do grego *trígonon* - triângulo e *metron* - medida) é parte da matemática, que nos oferece ferramentas para a resolução de problemas que envolvem figuras geométricas, principalmente os triângulos.

O homem desde os tempos mais remotos tem a necessidade de mensurar distâncias entre dois pontos, estes muitas vezes, localizados em lugares de difícil acesso ou até mesmo inacessíveis. Devido a estas dificuldades, destaca-se a trigonometria como uma ferramenta importante no auxilio as medições indiretas.

TEOREMA DE PITÁGORAS



No teorema de Pitágoras "o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 3^2 + 4^2$

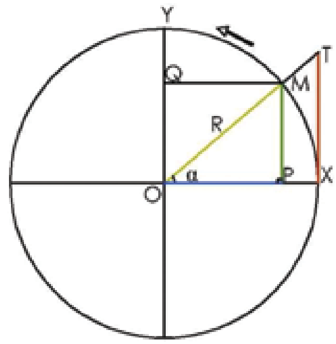
$a^2 = 9 + 16$

$a^2 = 25$

$a = 5$ u.m.

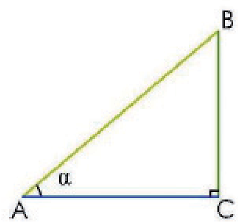
MEDIDAS TRIGONOMÉTRICAS

Considerando XOY um sistema de coordenadas plano ortogonal, desenhando uma circunferência com o centro na origem do sistema O e com raio 1, temos:



MP é o Seno do ângulo α
OP é o Cosseno do ângulo α
XT é a Tangente do ângulo α

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DO TRIANGULO RETÂNGULO



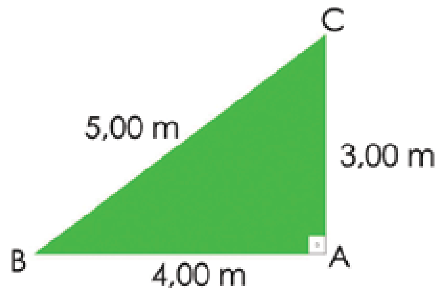
$$\text{Sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\text{cateto adjcente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{AB}$$

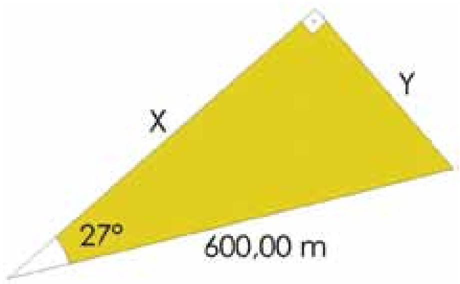
$$\text{Tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{BC}{AC}$$

Exercícios

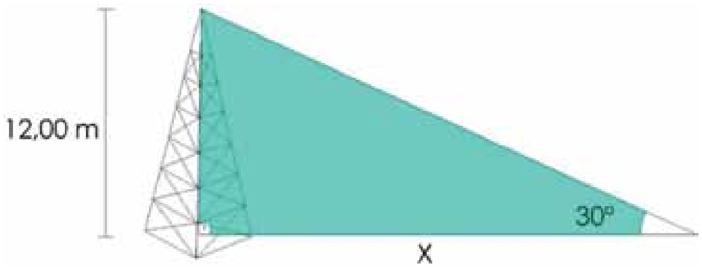
1) Dado o triângulo retângulo, calcular sen B, cos B e tg B.



2) Calcule x e y no triângulo da figura.



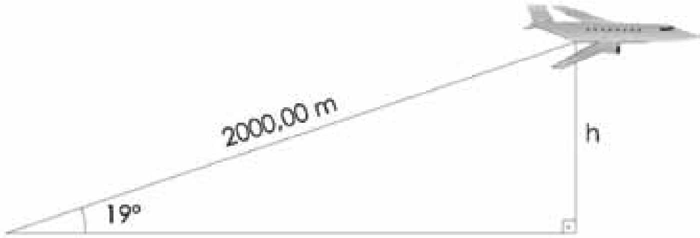
3) Uma torre vertical de altura 12,00 m é vista sob um ângulo de 30º por uma pessoa que se encontra a uma distância x da sua base e cujos olhos estão no mesmo plano horizontal dessa base. Determinar a distância x.



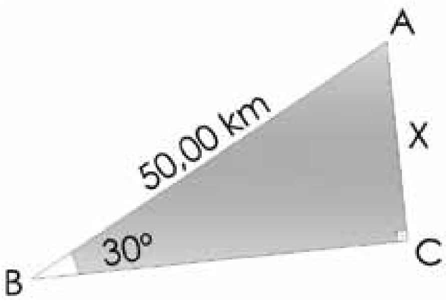
4) Num exercício de tiro, o alvo se encontra numa parede cuja base está situada a 82,00 m do atirador. Sabendo que o atirador vê o alvo sob um ângulo de 12º em relação a horizontal, calcule a que distância do chão está o alvo.

5) Um avião levanta vôo em B e sobe fazendo um ângulo constante de 15º com a horizontal. A que altura estará e qual distância percorrida quando alcançar a vertical que passa por uma igreja situada a 2,00 km do ponto de partida.

6) Um avião levanta vôo sob um ângulo constante de 19º. Após percorrer 2000 m em linha reta, a altura atingida pelo avião será de aproximadamente:

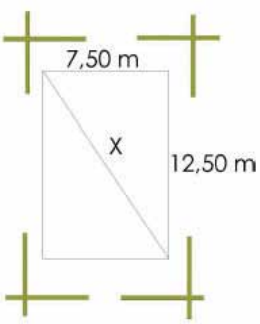


7) Na situação abaixo, deseja-se construir uma estrada que ligue a cidade A à estrada BC. Essa estrada medirá quanto.



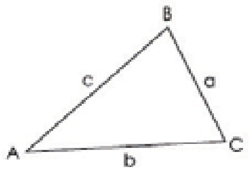
8) Um pedreiro gostaria de fazer a locação de uma edificação. Para isso ele traçou uma distância de 3,00 m, e outra de 6,00 m. Qual deverá ser a outra distância para que o mesmo consiga esquadrejar a obra.

9) Um prédio esta sendo locado na Av. Mauro Ramos. O mestre de obras determinou com a trena as distâncias de 7,50 m e 12,50 m. O mesmo está em dúvida quanto a próxima medida ser determinada para que a obra fique exatamente a 90º em todos os vértices. Qual deverá ser essa distância?



LEI DOS SENOS

"Num triângulo qualquer a razão entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual ao diâmetro da circunferência circunscrita".

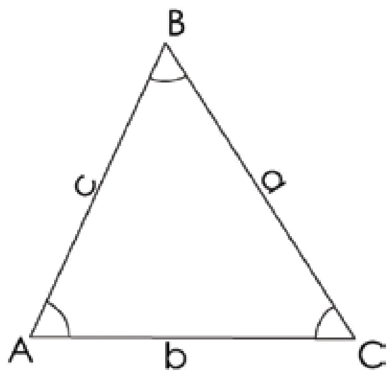


$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

LEI DOS COSSENOS

Este princípio é aplicado quando se conhece de um triângulo qualquer, dois lados e o ângulo por eles formado.

"Num triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto das medidas dos dois lados pelo cosseno do ângulo que eles formam".



Fórmulas: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 . b . c . \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 . a . c . \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 . a . b . \cos C$

CÁLCULOS DE ÂNGULOS:

Para um triângulo com dois lados iguais:

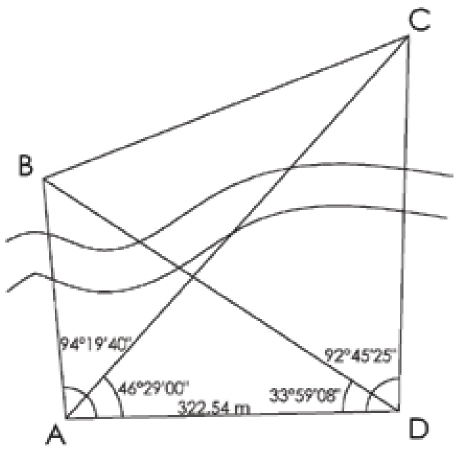
Fórmula:

$$\hat{A} = 2 \cdot Arc\ Sen\left(\frac{C}{2 \cdot R}\right)$$

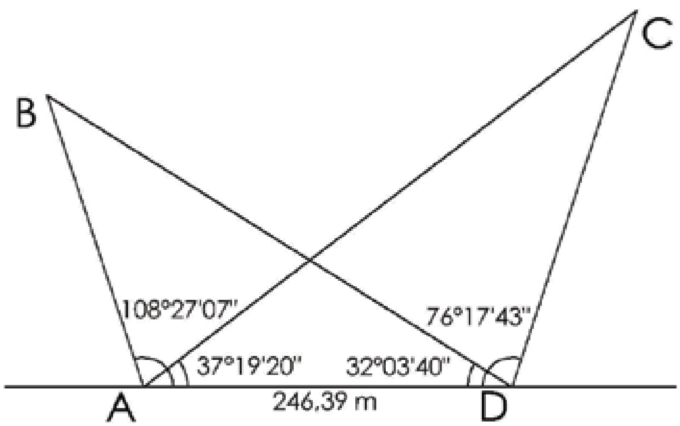
.

Exercícios

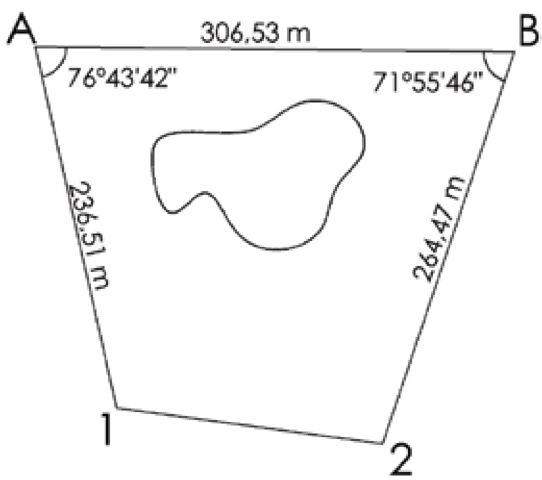
1) Determinar os lados de um terreno de vértices inacessíveis, segundo o croqui abaixo:



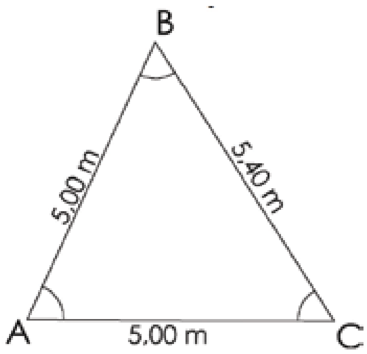
2) Calcular a distância: B-C



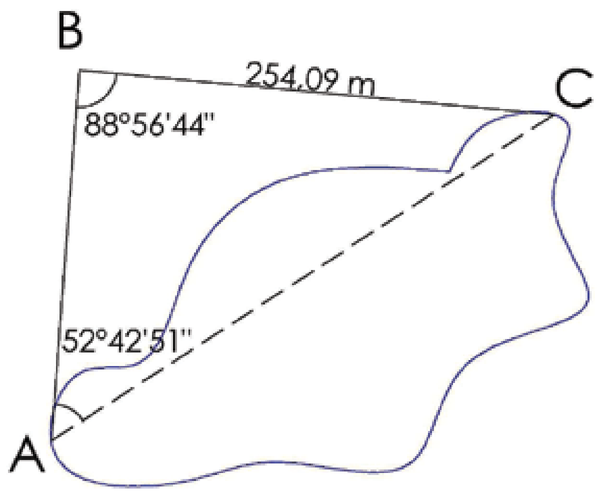
3) Calcular a distância: A-2 e B-1



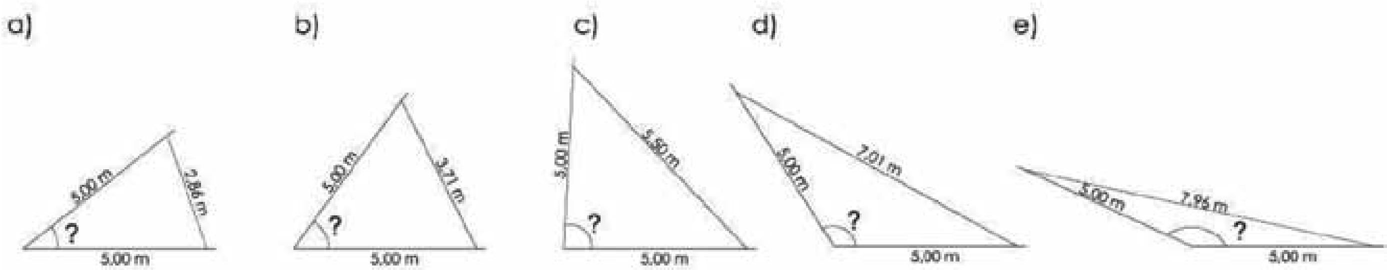
4) Dado o triângulo abaixo, calcular os valores dos ângulos:



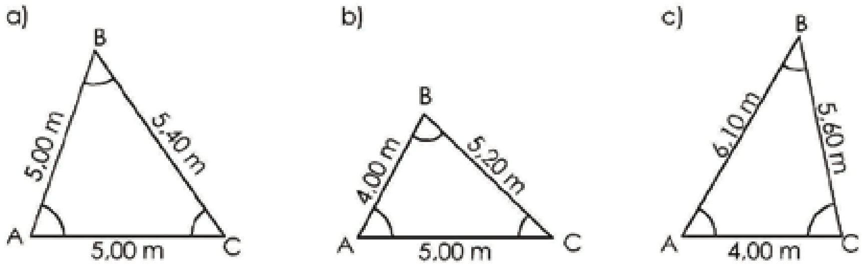
5) Determine a distância entre os extremos da lagoa (lado AC), conforme os dados da figura abaixo:



6) Dado um triângulo qualquer, calcular os ângulos:



7) Dado um triângulo qualquer, calcular todos os ângulos internos dos triângulos:

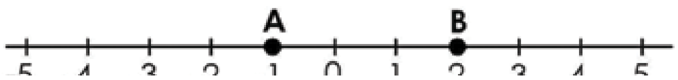


3. Geometria Analítica

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NA RETA

Todo o número real fica associado a um ponto na reta real. Este ponto fica determinado pelo número real chamado **coordenada** desse ponto.

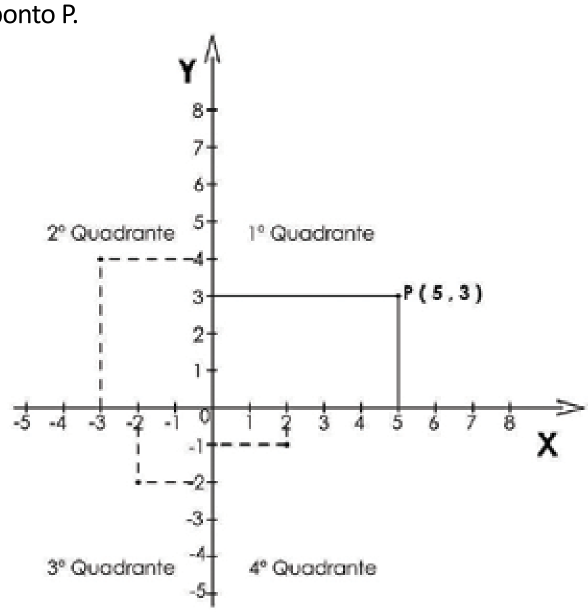
Observe que os pontos A e B da reta x a seguir, distam entre si 3 unidades.



De um modo geral, a distância entre os pontos A e B, de coordenadas *a* e *b*, respectivamente, é dada por: $d(A, B) = | x_B - X_A |$, ou seja, $d(A, B) = | b - a | = |2 + 1| = 3$

EIXOS COORDENADOS

Consideremos um plano e duas retas perpendiculares, sendo uma delas horizontal e a outra vertical. A horizontal será denominada Eixo das Abscissas (ou eixo OX) e a Vertical será denominada Eixo das Ordenadas (ou eixo OY). Os pares ordenados de pontos do plano são indicados na forma geral P=(x,y) onde x será a abscissa do ponto P e y a ordenada do ponto P.



Quadrante	Sinal de X	Sinal de Y	Exemplo
1º	+	+	(5,3)
2º	-	+	(-3,4)
3º	-	-	(-2,-2)
4º	+	-	(2,-1)

Na verdade, x representa a distância entre as duas retas verticais indicadas no gráfico e y é a distância entre as duas retas horizontais indicadas no gráfico.

O sistema de Coordenadas Ortogonais também é conhecido por Sistema de Coordenadas Cartesianas.

Este sistema possui quatro (4) regiões denominadas quadrantes.

Exercícios

1) Represente, no plano cartesiano ortogonal, os seguintes pontos e identifique em qual quadrante se encontram:

a) A (-1,4)

b) B (3,3)

c) C (2, -5)

d) M (-2,-2)

e) P (4,1)

f) Q (2,-3)

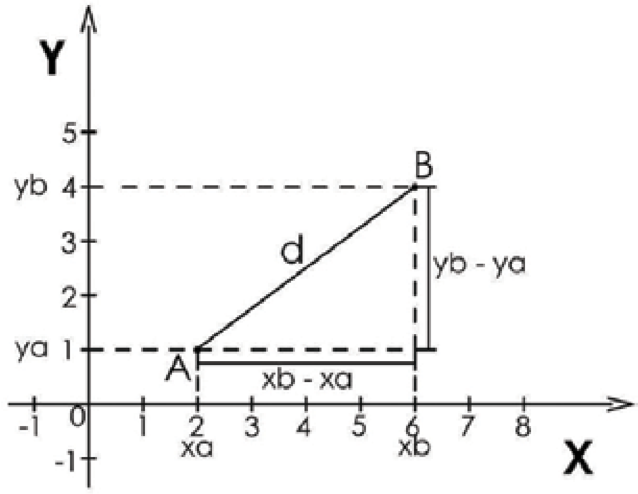
g) D (-2,0)

h) H (0,1)

i) K (5,0)

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NO PLANO CARTESIANO

A distância entre os pontos A e B é a medida do segmento **d**. Como o triângulo destacado é retângulo e **d** é sua hipotenusa, aplicasse o teorema de Pitágoras.



$$d = \sqrt{(xb - xa)^2 + (yb - ya)^2}$$

$$d = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2}$$

$$d = \sqrt{16+9}$$

$$d = 5$$

Exercícios

1) Calcule, em cada caso, a distância entre os dois pontos dados:

a) (1, 3) e (9, 9)

b) (-3, 1) e (5, -14)

c) (-4, -2) e (0, 7)

d) (54, 85) e (75, 21)

e) (125, 541) e (12, 792)

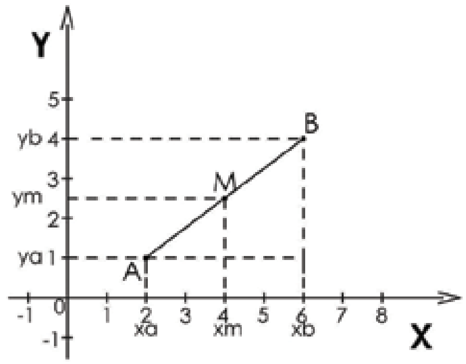
f) (-521, 854) e (-294, 653)

2) Calcule a distância do ponto M (-12, 9) à sua origem.

3) Calcule o perímetro do triângulo ABC, sabendo que A (1, 3), B (7, 3) e C (7, 11).

PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Dados os pontos $A=(x_a,y_a)$ e $B=(x_b,y_b)$, pode-se obter o Ponto Médio $M=(x_m,y_m)$ que está localizado entre A e B, através do uso da média aritmética por duas vezes, uma para as abscissas e outra para as ordenadas.



$$xm = \frac{(xa + xb)}{2}$$

$$ym = \frac{(ya + yb)}{2}$$

Observação:

O centro de gravidade de um triângulo plano cujas coordenadas dos vértices são $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e $C=(x_3,y_3)$, é dado por:

$G=((x_1+x_2+x_3)/3, (y_1+y_2+y_3)/3)$

ÁREA DE UM TRIÂNGULO NO PLANO CARTESIANO

Conhecendo-se um ponto (x_1,y_1) localizado fora de uma reta que passa pelos pontos (x_2,y_2) e (x_3,y_3), pode-se calcular a área do triângulo formado por estes três pontos, bastando para isto determinar a medida da base do triângulo que é a distância entre (x_2,y_2) e (x_3,y_3) e a altura do triângulo que é a distância de (x_1,y_1) à reta que contem os outros dois pontos.

Como o processo é bastante complicado, apresentamos um procedimento equivalente simples e fácil de memorizar.

A área do triângulo é dada pela expressão que segue:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} * \left\|\begin{matrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X & Y \\ X_n & Y_n \\ X_1 & Y_1 \end{matrix}\right\|$$

$$Área = \left|\frac{(X_1 * Y_2 * X_2 * Y \ldots + X \ldots * Y_n + X_n * Y_1) - (Y_1 * X_2 * Y_2 * X \ldots + Y \ldots * X_n + Y_n * X_1)}{2}\right|$$

Exemplo

A área do triângulo cujos vértices são (1, 2), (3, 4) e (9, 2) é igual a 8, pois:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} * \left\|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 9 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}\right\|$$

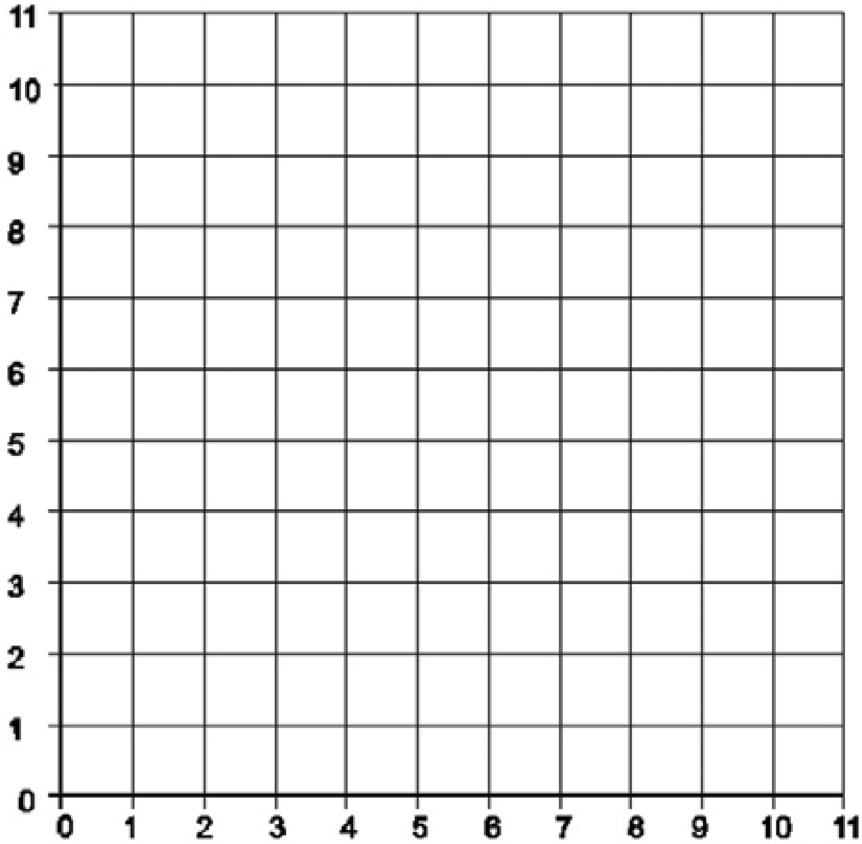
$$Área = \left|\frac{(1 * 4 + 3 * 2 + 9 * 2) - (2 * 3 + 4 * 9 + 2 * 1)}{2}\right|$$

$$Área = \left|\frac{(28) - (44)}{2}\right|$$

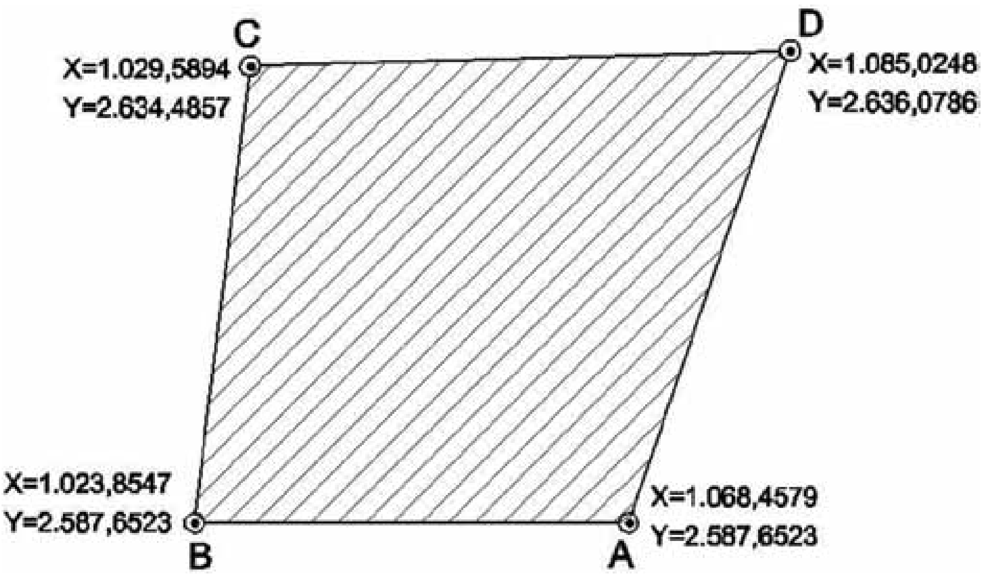
$$Área = \left|\frac{-16}{2}\right| = 8\, un^2$$

Exercícios

4) Desenhe o triângulo ABC no plano abaixo, sabendo que A (1, 3), B (7, 4) e C (6, 11), e calcule a sua área.

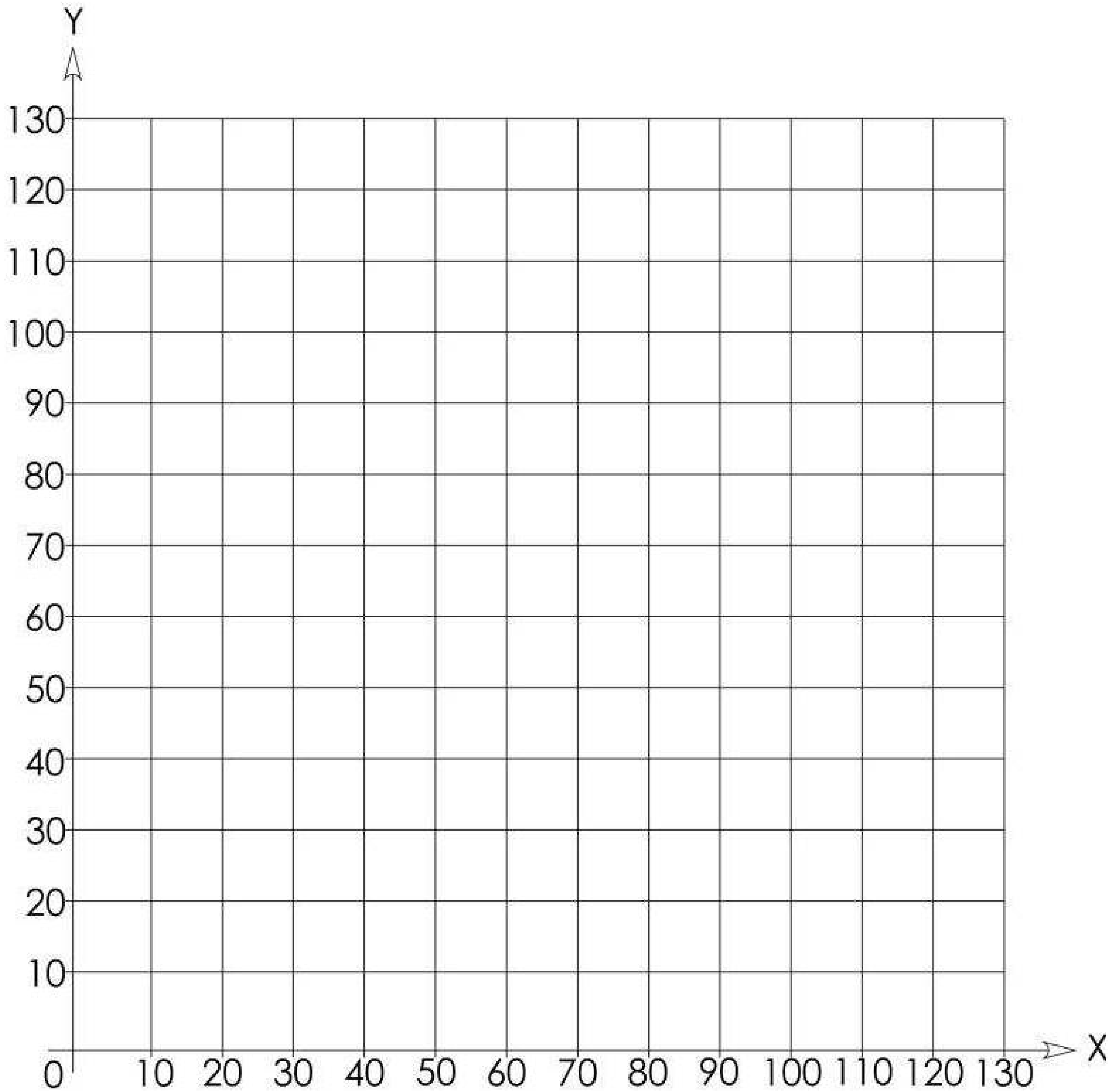


5) Com base nas coordenadas cartesianas dos vértices de um terreno conforme croqui abaixo, calcule a sua área.



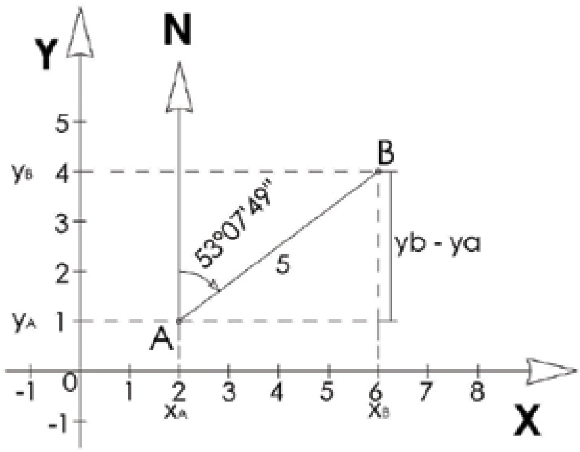
6) Com base na coordenadas x,y listadas a seguir, localize no plano os vértices da poligonal, calcule a distância entre eles, as coordenadas dos pontos médios de cada segmento e a área da poligonal.
V=vértice (coordenada x, coordenada y)

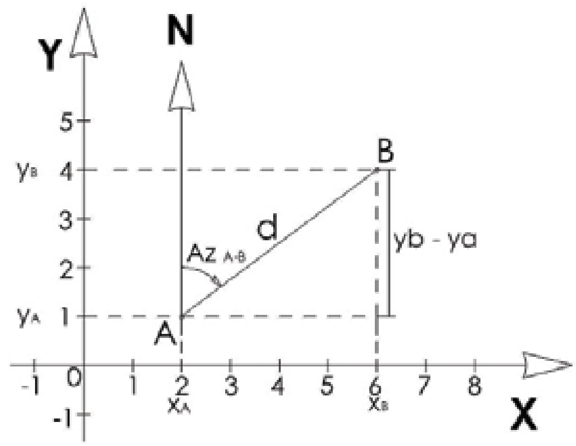
V-1 (15,25)
V-2 (105,15)
V-3 (120, 60)
V-4 (90,80)
V-5 (100, 100)
V-6 (75, 110)
V-7 (60, 90)
V-8 (40, 95)
V-9 (15, 25)



CÁLCULO DE COORDENADAS:

Retangulares Polares





$X_B = X_A + sen\ AZ_{A-B} * d$

$X_B = 2 + sen\ 53°07'49" * 5$

$X_B = 6$

$Y_B = Y_A + \cos\ AZ_{A-B} * d$

$Y_B = 1 + \cos\ 53°07'49" * 5$

$Y_B = 4$

$d = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$

$d = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2}$

$d = \sqrt{16+9}$

$d = 5$

$AZ'_{A-B} = Arc\ Tg\left(\frac{Y_B - X_A}{Y_B - Y_A}\right)$

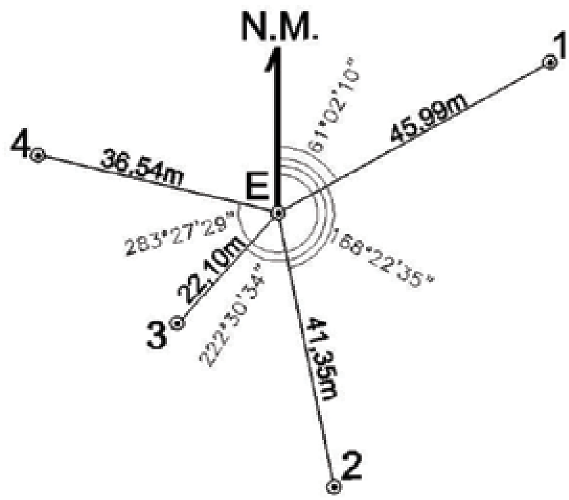
$AZ'_{A-B} = Arc\ Tg\left(\frac{6-2}{4-1}\right)$

$AZ'_{A-B} = Arc\ Tg\left(\frac{4}{3}\right)$

$AZ'_{A-B} = 53°07'49"$

Exercícios

7) Com base nos ângulos de azimute e distâncias do croqui abaixo, calcule as coordenadas dos pontos 1, 2, 3 e 4, sendo X_E=500,0000 e Y_E=1.000,0000



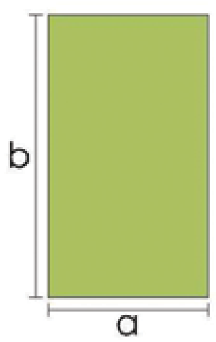
4. Geometria Plana

ÁREAS DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS:

Medida de uma superfície ou área:

Quando medimos superfícies tais como um terreno, ou o piso de uma sala, ou ainda uma parede, obtemos um número, que é a sua área.

ÁREA DA REGIÃO RETANGULAR:



Área = a * b

Perimetro = 2 * a + 2 * b

Exercícios

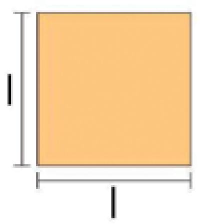
1) Qual é a área de uma região retangular cujas medidas são 24,00 m por 12,50 m?

2) Um terreno retangular tem 8,40 m por 15,00 m e está sendo gramado. Sabendo que um quilo de semente de grama é suficiente para gramar 3,00 m^2 de terreno, quantos quilos de semente de grama são necessários para gramar o terreno todo?

3) Uma lajota retangular tem 30 cm por 20 cm. Qual é a área da lajota? Quantas lajotas são necessárias para cobrir o piso de uma garagem de 96,00 m^2 de área?

4) Quantos m^2 de azulejo são necessários para revestir até o teto uma parede retangular de 4,00 m por 2,75 m?

ÁREA DA REGIÃO QUADRADA:



Área = l * l = l²

Perimetro = 4 * l

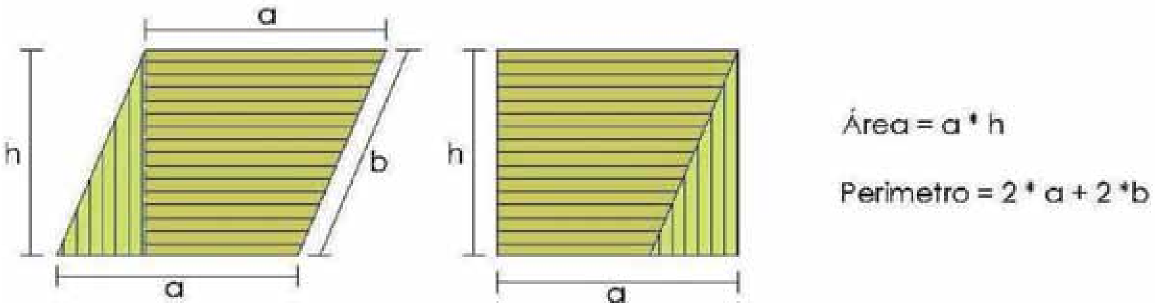
Exercícios

5) Um terreno tem forma quadrada, de lado 30,20 m. Calcule a área desse terreno.

6) Um ladrilho de forma quadrada tem 20 cm de lado. Qual é a área desse ladrilho?

7) Para ladrilhar totalmente uma parede de 27,00 m^2 de área foram usadas peças quadradas de 15 cm de lado. Quantas peças foram usadas?

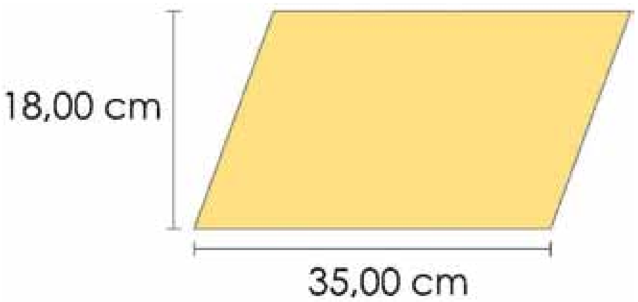
ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR UM PARALELOGRAMO:



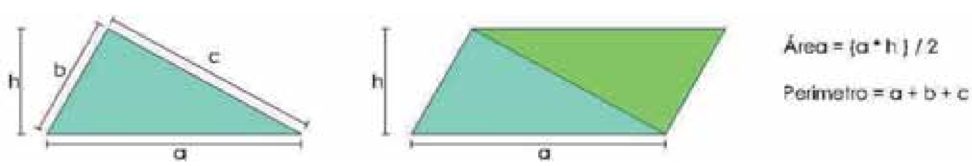
Exercícios

8) A região de uma cartolina é limitada por um paralelogramo que tem 15,4 cm de comprimento por 8,5 cm de largura. Qual é a área dessa região?

9) Um pedaço de compensado, cuja espessura é desprezível, tem a forma e as dimensões da figura abaixo. Determine a área desse pedaço de compensado.



ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR:



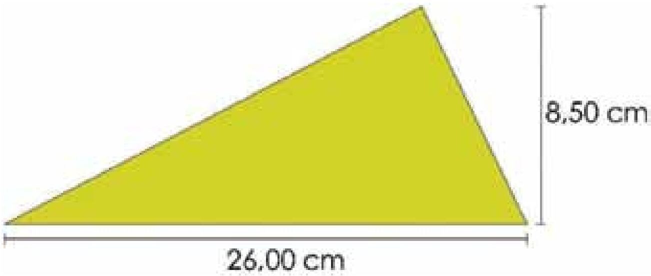
A área de um triângulo também pode ser calculada com a Fórmula de Heron:

$$S = \frac{a + b + c}{2}$$

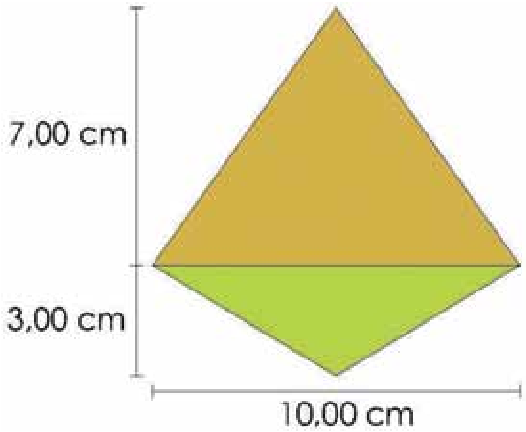
$$Área = \sqrt{S * (S - a) * (S - b) * (S - c)}$$

Exercícios

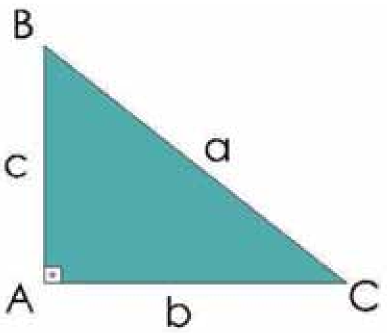
10) Um pedaço de madeira, cuja espessura é desprezível, tem a forma e as dimensões da figura abaixo. Calcule a área desse pedaço de madeira.



11) Um pedaço de cartolina tem a forma e as dimensões da figura abaixo. Qual é a área desse pedaço de cartolina?



ÁREA DE UMA REGIÃO LIMITADA POR UM TRIÂNGULO RETÂNGULO:



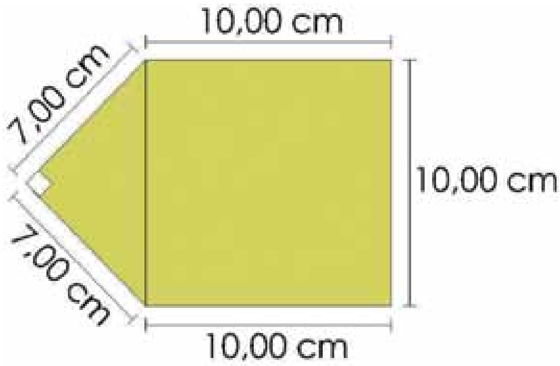
Área = (c * b) / 2

Perimetro = a + b + c

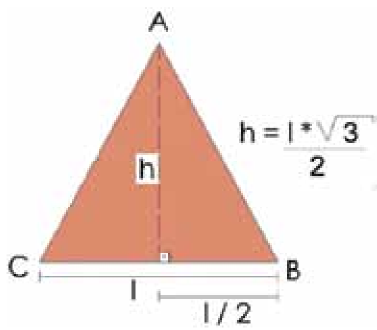
Exercícios

12) Qual é a área de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 5 cm?

13) Cortando-se um pedaço de madeira, obteve-se a figura abaixo, com suas dimensões aproximadas. Calcule a área desse pedaço de madeira.



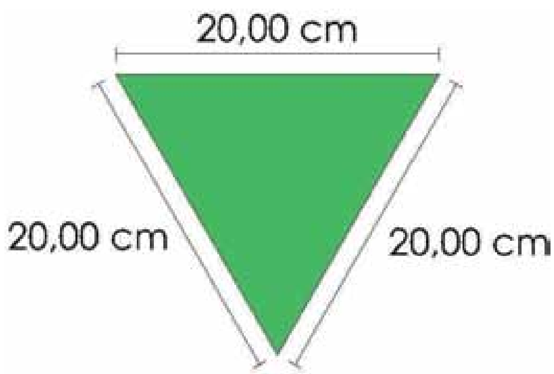
ÁREA DE UMA REGIÃO LIMITADA POR UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO:



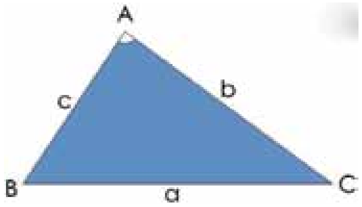
$$Área = \frac{l}{2} * \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2 * \sqrt{3}}{4}$$

Exercícios

14) Para uma festa junina, foram recortadas 100 bandeirinhas com o formato de um triângulo equilátero de lado 20 cm. Quantos m^2 de papel foram necessários para obter essas bandeirinhas?



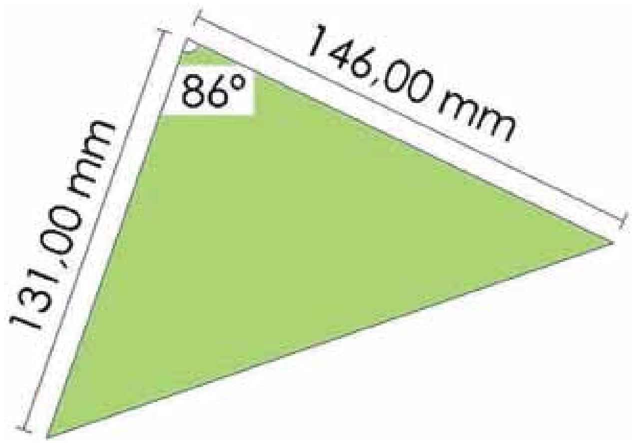
Área da região triangular, conhecendo-se as medidas de **dois lados** e a medida do ângulo formado por esses lados:



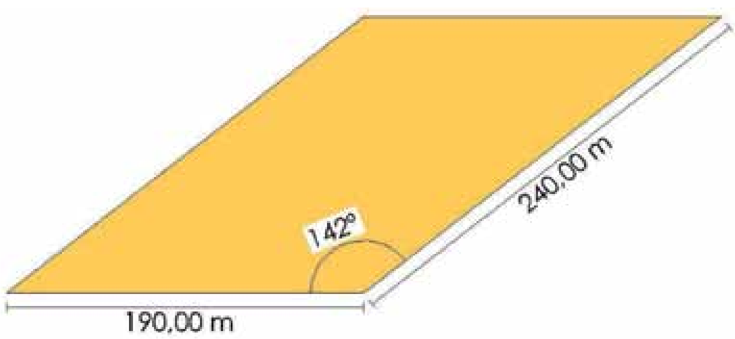
$$Área = \frac{b * c * sen\,\hat{A}}{2}$$

Exercícios

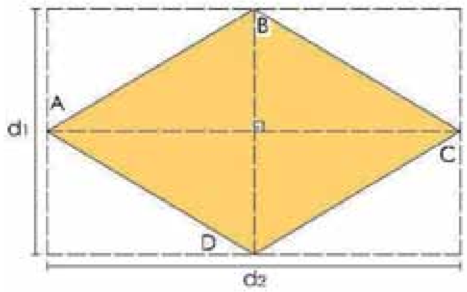
15) Uma placa de ferro tem a forma da figura abaixo. Suas medidas estão indicadas na figura. Calcule a área dessa placa de ferro.



16) Um terreno tem a forma e as dimensões da figura abaixo. Calcule a área desse terreno.



Área da região limitada por um losango:



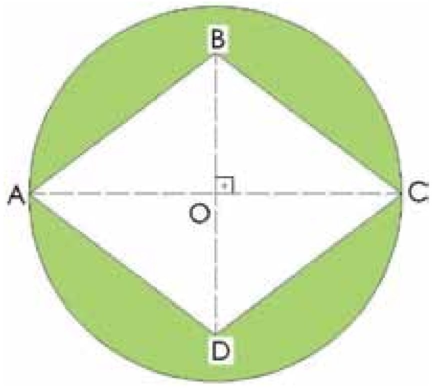
$$Área = \frac{(d_1 * d_2)}{2}$$

OBS: d_1 é a diagonal menor do losango

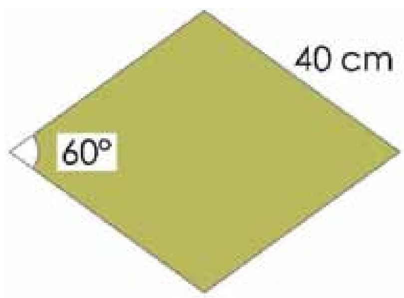
d_2 é a diagonal maior do losango

Exercícios

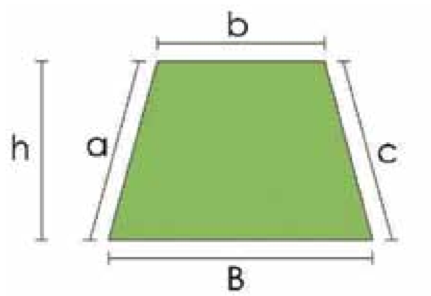
17) A figura seguinte nos mostra uma circunferência de centro O e de raio 4 cm e um losango A,B,C,D, cujo lado mede 5 cm. Calcule a área desse losango.



18) Determine a área do losango representado pela figura.



ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR UM TRAPÉZIO:



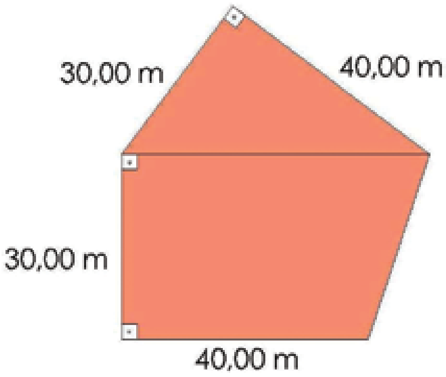
$$Área = \frac{(B + b)}{2} * h$$

$$Perimetro = a + b + c + B$$

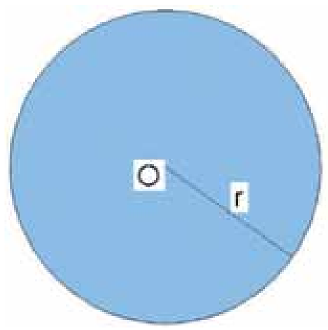
Exercícios

19) O quadrilátero A,B,C,D é um trapézio cujas bases medem 30 cm e 21 cm. Sabendo que a altura desse trapézio é 16 cm, determine a área do trapézio.

20) Feito o levantamento das medidas de um terreno pentagonal, foram determinados os lados indicados na figura.



ÁREA DO CÍRCULO:



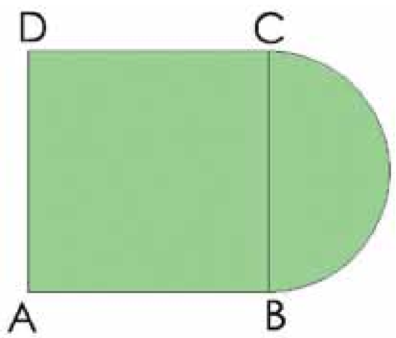
$$Área = \pi * r^2$$

$$Perimetro = 2 * R * \pi$$

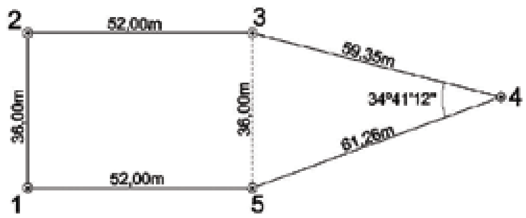
Exercícios

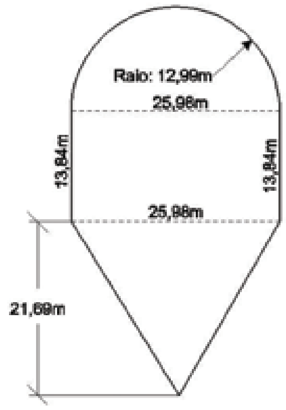
21) Num campo de futebol, o grande círculo tem 10 m de raio. Qual é a área do grande círculo?

22) Qual é a área da região sombreada, sabendo-se que A,B,C,D é um quadrado de 16 cm de perímetro?



23) Calcule as áreas das seguintes figuras geométricas



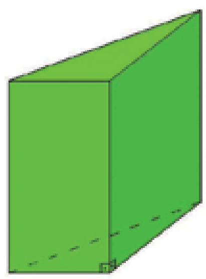


5. Geometria Espacial

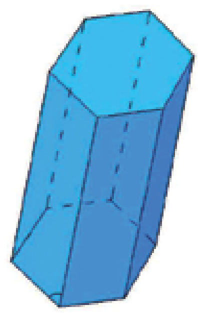
A Geometria espacial funciona como uma ampliação da Geometria plana e trata dos métodos apropriados para o estudo de objetos espaciais assim como a relação entre esses elementos. Assim, estudaremos especificamente os cálculos inerentes para a obtenção dos volumes destes objetos.

PRISMAS

Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à inclinação das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.



Primas retos: as arestas laterais são perpendiculares aos planos de bases



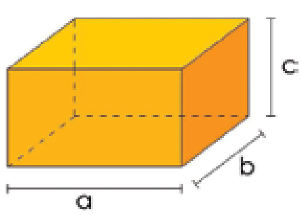
Primas oblíquos: as arestas laterais são oblíquas aos planos de bases

O Volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área de sua base pela altura.

$$Volume_{prisma} = Área_{base} \times h$$

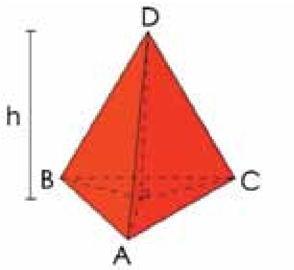
Dentre os objetos reais que podemos representar por prismas, é bastante comum aparecerem aqueles que possuem todas as faces sendo paralelogramos. Esses prismas recebem o nome especial de paralelepípedo.

O volume do paralelepípedo é dado por:



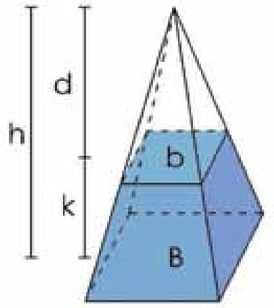
Volume = a * b * c

PIRÂMIDES



$$Volume = \frac{Área_{(base\,)} * h}{3}$$

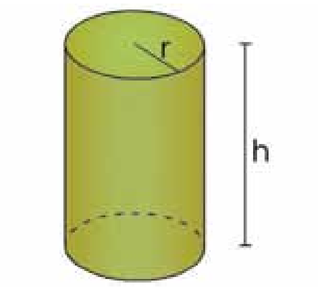
TRONCO DE PIRÂMIDE



$$Volume = \frac{k * (B + \sqrt{B * b} + b)}{3}$$

CILINDROS

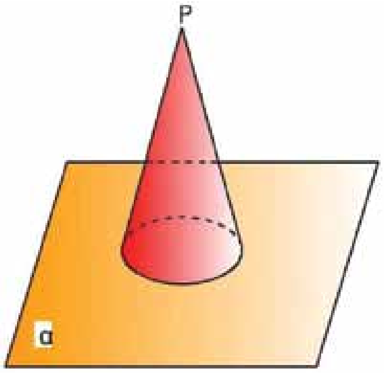
O volume do cilindro é igual à área de sua base pela sua altura, ou seja:



$$Volume = Área_{(base\,)} * h$$

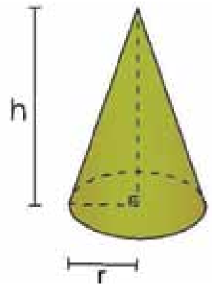
$$= \pi * r^2 * h$$

CONE



Considere uma região plana limitada por uma curva suave (sem quinas), fechada e um ponto P fora desse plano. Chamamos de cone ao sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer da região.

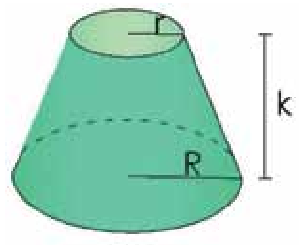
O Volume de um cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura, ou seja:



$$Volume = \frac{Área_{(base\,)} * h}{3}$$

$$= \frac{\pi * r^2 * h}{3}$$

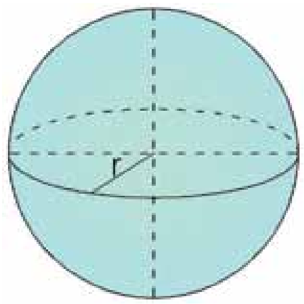
TRONCO DE CONE



$$Volume = \frac{k * \pi * (R^2 + R * r + r^2)}{3}$$

ESFERA

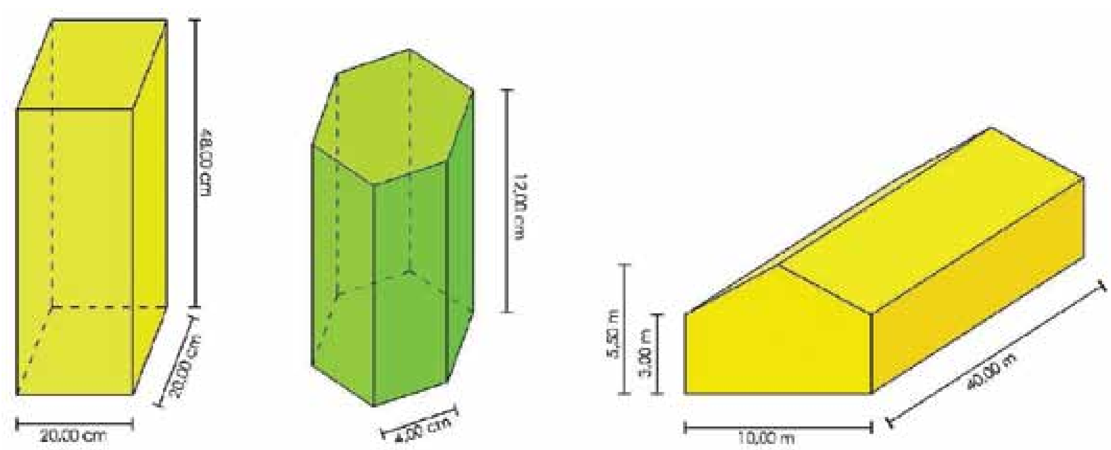
A esfera no espaço é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados a uma mesma distância, denominada raio de um ponto fixo chamado centro.



$$Volume = \frac{4 * r^3 * \pi}{3}$$

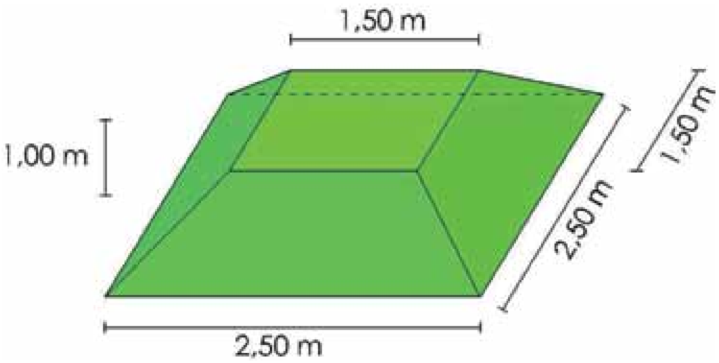
Exercícios

1) Calcule o volume dos seguintes sólidos:



2) Um filtro cônico de papel tem 12 cm de profundidade e 8 cm de diâmetro. Determine sua capacidade em mililitros (1 ml = 1cm³).

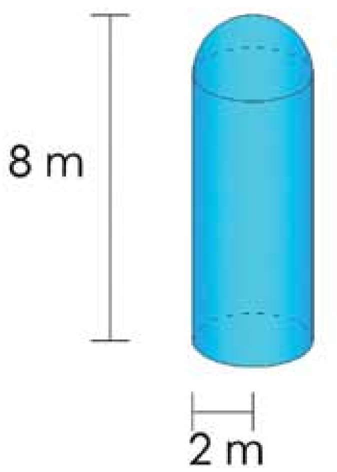
3) Um Engenheiro está projetando uma sapata (parte de um alicerce) de concreto em forma de tronco de pirâmide regular, com as dimensões indicadas na figura abaixo. Sabendo-se que em 1 m³ de concreto gasta-se aproximadamente 9 sacos de cimento, determine quantos sacos serão gastos para fazer essa sapata.



4) A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 3 cm. Sabendo-se que a pirâmide tem altura de 10 cm, calcular o volume dessa pirâmide.

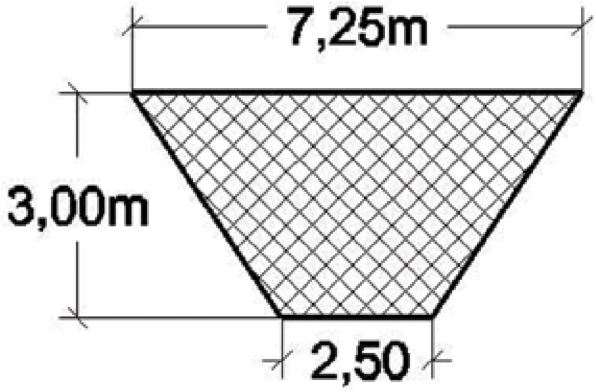
5) Certa bebida é vendida em dois recipientes cilíndricos:
(1) lata de raio da base igual a 3,1 cm e altura de 11,6 cm;
(2) lata de raio da base igual a 3,1 cm e altura de 16,6 cm.
Os preços de dessa bebida são R$ 0,70 e R$ 1,10, respectivamente, para as latas (1) e (2).
Calcule o volume de cada recipiente;
Qual das duas embalagens apresenta melhor preço para o consumidor?

6) Um silo tem a forma de um cilindro circular reto (com fundo) encimado por uma semi-esfera, como na figura. Determine o volume desse silo, sabendo que o raio do cilindro mede 2,00 m e que a altura do silo mede 8,00 m.



7) Calcule o volume de um depósito de gás esférico com raio de 13,50 m.

8) Para viabilizar um projeto de irrigação, é necessário construir um canal de seção trapezoidal conforme figura abaixo e com 325,00 metros de comprimento. Considerando o terreno plano, qual o volume de escavação necessário para a construção deste canal?



6. Noções de Geometria

A palavra Geometria tem origem grega e significa medida da Terra (geo = Terra, metria = medida).

Os estudos iniciais sobre Geometria Plana estão relacionados à Grécia Antiga, também pode ser denominada Geometria Euclidiana em homenagem a Euclides de Alexandria (360 a.C. - 295 a.C.), grande matemático educado na cidade de Atenas e frequentador da escola fundamentada nos princípios de Platão.

A Geometria está apoiada sobre alguns postulados, axiomas, definições e teoremas, sendo que essas definições e postulados são usados para demonstrar a validade de cada teorema. Alguns desses objetos são aceitos sem demonstração, isto é, você deve aceitar tais conceitos porque os mesmos parecem funcionar na prática!

A geometria é o estudo das formas. Utiliza números e símbolos para descrever as propriedades dessas formas e as relações entre elas. É importante compreender a geometria, para dar resposta a questões como: Que forma tem? De que tamanho é? Caberá?

A geometria proporciona os conhecimentos necessários para encontrar a resposta a estas questões.

Para se aprender Geometria é necessário partir de três noções importantes, adotadas sem definição e por essa razão, chamadas de primitivas geométricas: Ponto, Reta e Plano

PONTO

Ponto é um ente matemático criado para tratar ou representar objetos do nosso dia-a-dia que não possuem uma grandeza definida, ou seja, são adimensionais, pois não se é possível determinar medidas (Largura, altura e comprimento) para representá-los.
Por exemplo:

"A marca de uma ponta de lápis bem fina no papel dá a idéia do que é um ponto"

As estrelas apresentadas no céu podem ser consideradas como pontos.

Costuma-se representar pontos por letras maiúsculas do nosso alfabeto.

• P

Toda figura geométrica é considerada um conjunto de pontos.

Para pensar.
Quais outros objetos que poderíamos tratar como entidades puntiformes? Dê alguns exemplos.

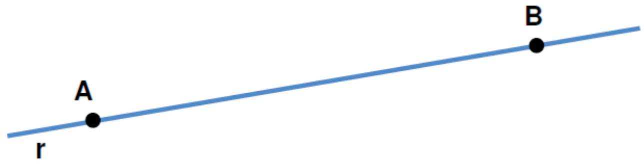
____

RETA

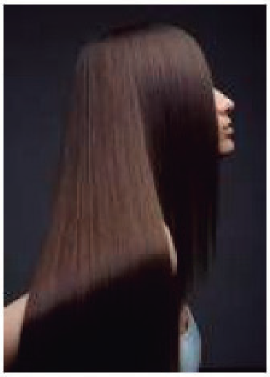
Uma linha corresponde ao deslocamento de um ponto. Esse deslocamento poderá gerar linhas com desenvolvimento curvo ou reto. Uma reta corresponde ao deslocamento de um ponto cuja direção permanece constante, ou seja, corresponde ao conjunto de pontos que obedecem a um critério específico, isto é, não mudam de direção. Quando existe mudança de direção, tem-se uma curva.

Uma linha traçada com régua é uma reta. Se imaginarmos agora uma linha reta sem começo, meio, fim ou espessura, teremos a compreensão da idéia de reta definida pela matemática. As retas são representadas por letras minúsculas do nosso alfabeto.

Se definirmos dois pontos distintos (A) e (B), podemos dizer que estes pontos definem uma única reta (r), ou seja, existe apenas uma única reta entre todas as possibilidades possíveis que passa pelo ponto (A) e (B) simultaneamente.



Podemos obter alguns exemplos de retas quando observamos o nosso ambiente. Por exemplo, um fio de cabelo esticado poderia ser tratado como uma reta.



Um raio de luz poderia ser tratado como uma reta.

Um raio lazer muito fino poderia ser considerado como uma reta

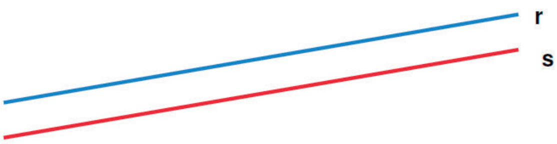
Para pensar.

Quais outros objetos que poderíamos tratar como uma reta? Dê alguns exemplos.

____

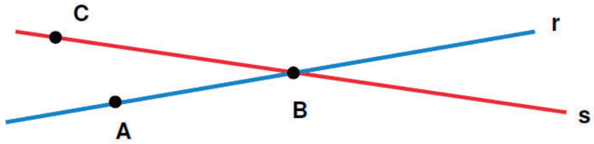
As retas existentes em um plano apresentam particularidades quando verificado o posicionamento relativo de uma em relação às outras. Dessa observação podemos dizer que as retas poderão ser paralelas ou concorrentes.

As retas paralelas são aquelas em que não existem pontos comuns ou aquelas que mantêm uma mesma distância entre si.



Diz-se que r é paralela a s ou r // s

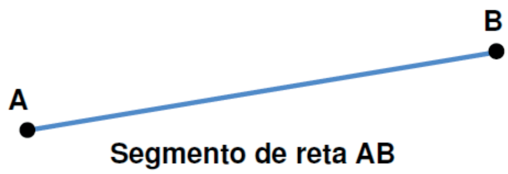
As retas concorrentes são aquelas que se encontram em um ponto.



Diz-se que r é concorrente com s em (B).

Quando observamos uma reta e especificamos apenas um de seus pontos criamos um ente geométrico chamado de semi-reta. Na linguagem comum costuma-se dizer que semi-reta é uma parte da reta que tem apenas o começo ou origem estabelecida. Na semi-reta “r” abaixo, o ponto A corresponde ao seu início.

Quando observamos uma reta e especificamos dois pontos distintos pertencente a esta, criamos um ente geométrico chamado de segmento de reta. Segmento quer dizer parte ou pedaço. Segmento de reta é a parte da reta compreendida entre esses dois pontos, que são chamados extremos. Na linguagem comum costuma-se dizer que segmento é uma parte da reta que tem começo e fim. No segmento AB representado abaixo, os pontos A e B são os extremos.



PLANO

Um plano corresponde a um ente geométrico e equivale ao conjunto de todas as possibilidades de retas e pontos. Em matemática, um plano é um objeto geométrico infinito a duas dimensões.

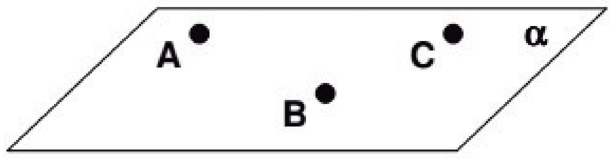
Os planos são representados por letras gregas minúsculas. Por exemplo: α(alfa),β (beta) e γ(gama).

Podemos obter alguns exemplos de planos quando observamos o nosso ambiente. Por exemplo, uma mesa pode ser considerada um plano.

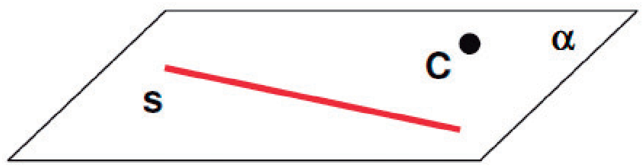
A capa do caderno.

Um plano pode ser unicamente determinado por um destes objetos:

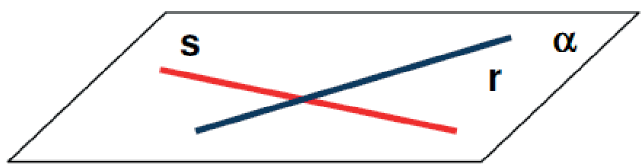
• três pontos não-colineares (não estão numa mesma reta);



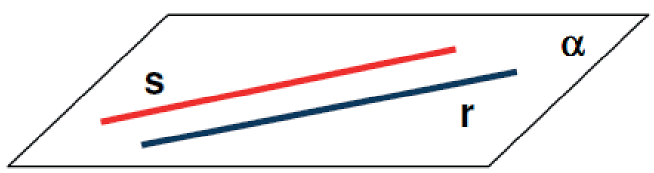
• uma reta e um ponto fora desta reta;



• duas retas concorrentes (duas retas que se cruzam num único ponto);



• duas retas paralelas distintas



Para pensar.
Quais outros objetos que poderíamos tratar como um plano. Dê alguns exemplos.

7. figuras Geométricas

O ente geométrico PONTO definido anteriormente podem ser organizados ou agrupados de tal sorte que formam as figuras geométricas. Assim, as figuras geométricas são formadas por conjuntos de pontos. Esses agrupamentos são classificados de acordo com a forma que o objeto se apresente. A seguir são mostradas algumas figuras geométricas possíveis de serem obtidas.

Assim, ângulos, triângulos, círculos, cubos e cilindros são figuras geométricas formadas por conjuntos de pontos.

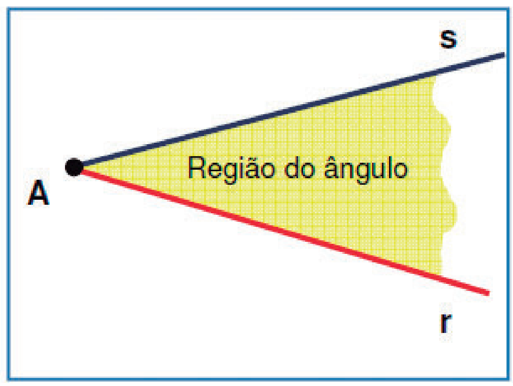
As figuras geométricas podem ser planas ou espaciais. As planas, como o próprio nome induz, são todas aquelas figuras criadas sobre um plano. As figuras espaciais, também denominadas sólidos geométricos, são figuras criadas no espaço tridimensionais ou 3D.

7.1 - FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

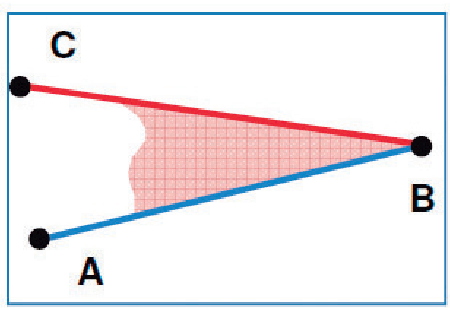
Sobre um plano podemos dispor de um conjunto de pontos organizados para formar diversas figuras planas. O próprio plano é uma organização elementar dos pontos, bem como as retas, as semi-retas e os seguimentos de reta também o são. Trataremos aqui as principais figuras planas possíveis de serem criadas com conjuntos de pontos, ou seja: os ângulos e os polígonos.

7.1.1 - ÂNGULOS

Ângulo é a região de um plano concebida pela abertura de duas semi-retas que possuem uma origem em comum, chamada vértice do ângulo. A abertura do ângulo é uma propriedade invariante e é medida em radianos, grados ou graus.

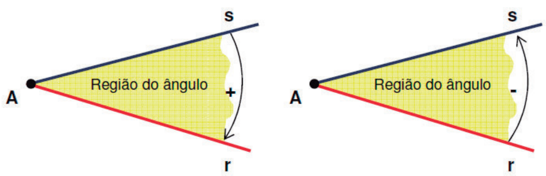


Podem ser usadas três letras, por exemplo, ABC para representar um ângulo, sendo que a letra do meio B representa o vértice, a primeira letra A representa um ponto do primeiro segmento de reta (ou semi-reta) e a terceira letra C representa um ponto do segundo segmento de reta (ou semi-reta).

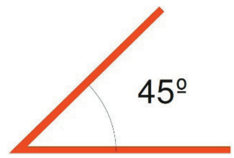
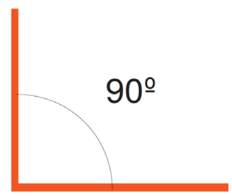
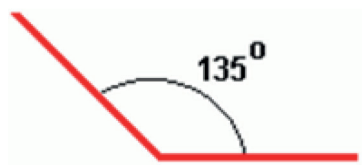
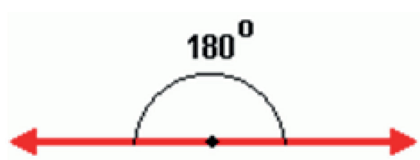
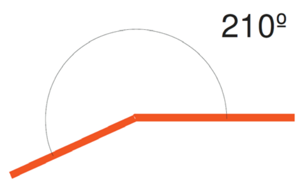


Usamos a notação < para um ângulo, como por exemplo: <ABC, ou utilizamos uma letra maiúscula do alfabeto grego (Α, Β, Θ, Χ, Δ, Ε, Φ, Γ, ...).

Um ângulo dever ter uma orientação definida. Podemos contar os ângulos no sentido horário ou anti-horário, dependendo do referencial adotado. Na matemática, os ângulos no sentido anti-horário são positivos e os ângulos horários são negativos. Entretanto, na topografia essa orientação se dá ao contrário. Assim, temos que saber como contar os ângulos em ambos os casos.



Com relação às suas medidas, os ângulos podem ser classificados como: reto, agudo, obtuso e raso.

Ângulo	**Características**	**Gráfico**
agudo	Ângulo cuja medida é maior do que 0° e menor do que 90°. Ao lado temos um ângulo de 45°.	
reto	Ângulo cuja medida é maior do que 0° e menor do que 90°. Ao lado temos um ângulo de 45°.	
obtuso	É um ângulo cuja medida está entre 90° e 180°. Na figura ao lado temos o exemplo de um ângulo obtuso de 135°.	
raso	Ângulo que mede exatamente 180°, os seus lados são semi-retas opostas. Neste caso os seus lados estão localizados sobre uma mesma reta.	
côncavo	É um ângulo cuja medida é maior entre 180° e menor do que 360°. Na figura ao lado temos o exemplo de um ângulo obtuso de 210°.	

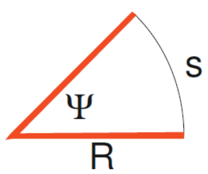
O ângulo reto (90º) é provavelmente o ângulo mais importante, pois o mesmo é encontrado em inúmeras aplicações práticas, como no encontro de uma parede com o chão, os pés de uma mesa em relação ao seu tampo, caixas de papelão, esquadrias de janelas, etc...

Um ângulo de 360 graus é o ângulo que completa o círculo. Após esta volta completa este ângulo coincide com o ângulo de zero graus, mas possui a grandeza de 360 graus (360º).

Para medirmos um ângulo podemos utilizar de três unidades distintas, a saber: Graus, Radianos e Grados. O Sistema de medida em radianos é o utilizado no sistema internacional (SI). Entretanto, o sistema em Graus é o mais popular na área de engenharia e principalmente na Engenharia de Agrimensura.

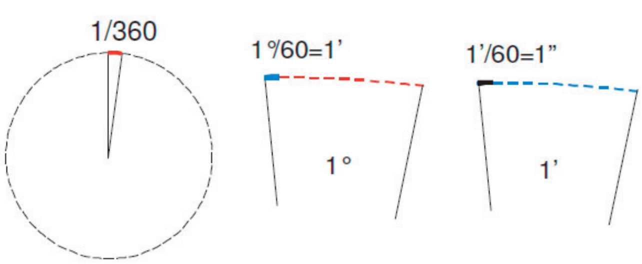
No sistema de radianos, o comprimento da circunferência é dividido pelo raio da circunferência estabelecendo uma razão entre essas medidas. Se estabelecermos uma circunferência de raio R poderemos desenvolver um arco com comprimento s, que estará associado ao ângulo Ψ. O valor de Ψ em radiados é obtido por:

$$\Psi_{RAD} = \frac{S}{R}$$



Para uma circunferência completa, temos que o ângulo associado corresponderá a 2π Radianos.

A medida em graus de um ângulo é o comprimento de um arco baseado na divisão de uma circunferência associada em 360 partes iguais. A parte unitária obtida dessa divisão corresponde ao Grau. O símbolo de graus é um pequeno círculo sobrescrito °. O Grau por sua vez é subdividido em 60 partes menores denominados de minutos. O minuto por sua vez é novamente subdividido em 60 partes menores denominadas de segundos.



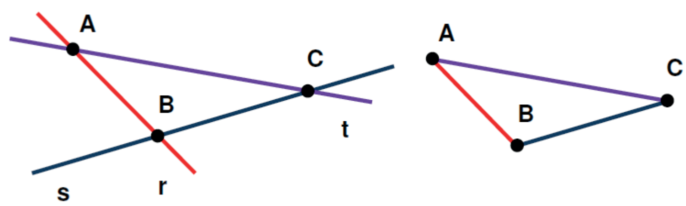
O grado é o comprimento de um arco baseado na divisão de uma circunferência associada em 400 partes iguais.

Com base nas colocações anteriores podemos chegar à seguinte relações entre as unidades de medidas angulares:

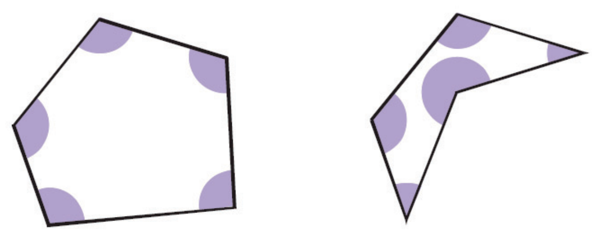
$360° = 2\pi$ radianos = 400 grados

7.1.2 - POLÍGONOS

A organização de segmentos de retas permite que criemos figuras geométricas denominadas de polígonos. Assim, polígono é uma figura plana formada por três ou mais segmentos chamados lados de modo que cada lado tem interseção com somente outros dois lados próximos, sendo que tais interseções são denominadas vértices do polígono e os lados próximos não são paralelos. A região interior ao polígono é muitas vezes tratada como se fosse o próprio polígono. A figura a seguir mostra o encontro de três retas distintas, “r”, “s” e “t”, formando um polígono de três lados que passa a ser definido pelos seguimentos de retas $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{DC}$.



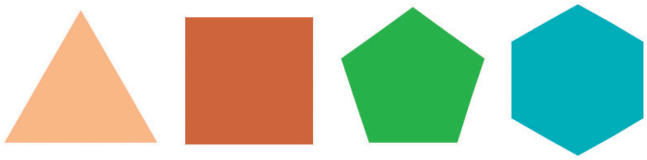
Os polígonos podem ser classificados em função da observância dos seus lados e dos ângulos formados pelos seus lados. Com respeito aos ângulos do polígono estes podem ser classificados em convexos e côncavos. Os polígonos convexos apresentam ângulos menores do que 180°. Na figura a seguir, o primeiro polígono é convexo e o segundo é côncavo.



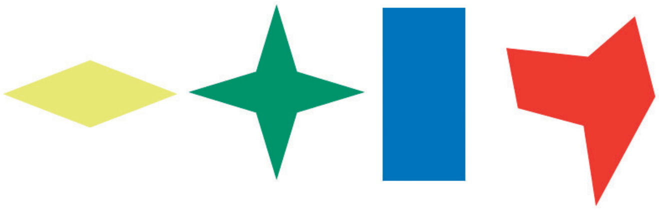
Polígono Convexo   Polígono Côncavo

Observando tanto os ângulos como os lados de um polígono, podemos classificar estes em regulares e irregulares.

Os polígonos regulares apresentam ângulos e medidas dos lados iguais.



Os polígonos irregulares apresentam ângulos distintos e/ou lados distintos.

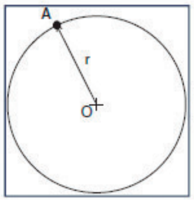


O nome dos polígonos é dado em função do número de lados.

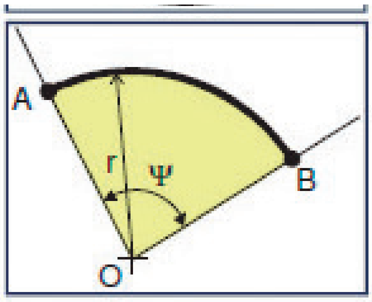
Número de lados	Nome
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
13	Tridecágono
14	Tetradecágono
15	Pentadecágono
16	Hexadecágono
17	Heptadecágono
18	Octadecágono
19	Eneadecágono
20	Icoságono

7.1.3 - CIRCUNFERÊNCIA, ARCO E CÍRCULO

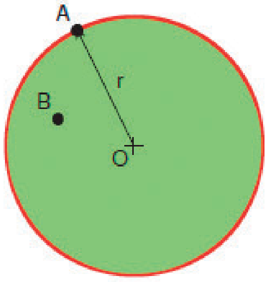
A circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizados a uma mesma distância r de um ponto fixo denominado o centro da circunferência (O). Esta talvez seja a curva mais importante no contexto das aplicações.



Um arco corresponde a uma porção da circunferência que possui um ponto de início e um ponto de fim determinados. A todo arco estará associado um raio o qual corresponderá ao raio da circunferência que deu origem ao arco. Ao arco também estará associado um ângulo que corresponde à região compreendida entre os segmentos de reta que partem do centro (O) e passam pelos pontos extremos do arco.

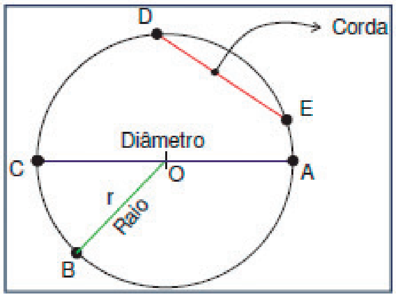


Círculo ou disco é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo O é menor ou igual que uma distância r dada. Quando a distância é nula, o círculo se reduz a um ponto. O círculo é a reunião da circunferência com o conjunto de pontos localizados dentro da mesma. No figura ao lado o círculo é toda a região pintada de verde reunida com a circunferência que corresponde a linha em vermelho.



Raio de uma circunferência (ou de um círculo) é um segmento de reta com uma extremidade no centro da circunferência e a outra extremidade num ponto qualquer da circunferência. Na figura, os segmentos de reta OA, OB e OC são raios.

Corda de uma circunferência é um segmento de reta cujas extremidades pertencem à circunferência. Na figura, os segmentos de reta AC e DE são cordas.



Diâmetro de uma circunferência (ou de um círculo) é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Observamos que o diâmetro é a maior corda da circunferência. Na figura, o segmento de reta AC é um diâmetro.

7.2 - SÓLIDOS GEOMÉTRICO

A geometria nos apresenta os meios necessários para observarmos o nosso meio e retirar dele elementos geométricos que servirão para vários propósitos no nosso dia-a-dia.

As estruturas sólidas tendo como base o hexágono, por exemplo, permitem a maximização do espaço. Essas estruturas são observáveis nos favos de mel das colméias.

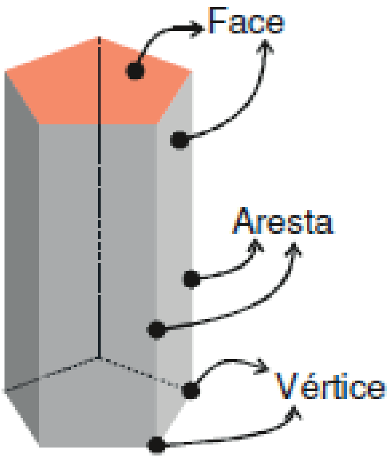
Os astros celestes, praticamente em sua totalidade, nos apresentam de forma esférica ou quase esférica como pode ser observado na forma da Lua, estrelas e planetas. Essa forma está relacionada ao comportamento espacial que matéria constituinte do corpo apresentará em função das forças gravitacionais que surgirão por causa da presença da massa.

O mundo mineral brinda-nos igualmente com inúmeros exemplos matemáticos, nomeadamente no que se refere a sólidos geométricos. Um dos mais famosos de todo o Mundo é a chamada Calçada dos Gigantes, um vasto aglomerado de colunas de rocha basáltica vulcânica, em forma de prismas de diferentes alturas, na sua maioria hexagonais, mas também pentagonais e ainda polígonos irregulares com 4, 7, 8, 9 e 10 lados, que se erguem junto à costa setentrional do Planalto de Antrim, na Irlanda do Norte.

Na matemática, um sólido geométrico é uma região do espaço limitada por uma superfície fechada. Há dois tipos de sólidos geométricos, os poliedros e os não poliedros, normalmente chamados de sólidos de revolução.

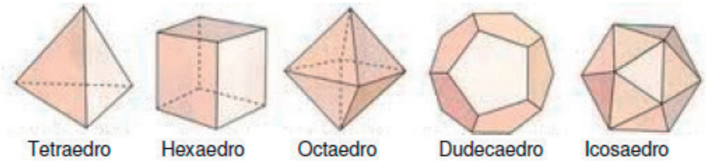
7.2.1 - POLIEDROS

Os poliedros são obtidos fazendo-se uso de polígonos que delimitarão o sólido. Os polígonos são as faces do poliedro (são as figuras planas que o limitam), os lados dos polígonos são as arestas do poliedro (são os segmentos de reta que limitam as faces), e os vértices dos polígonos são os vértices do poliedro (são os pontos de encontro das arestas).



Os poliedros são classificados em função das faces que estes apresentam. Se todas as faces são iguais então o poliedro é dito regular, caso contrário este será classificado como irregular.

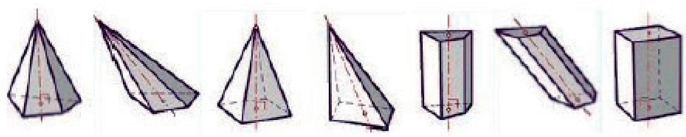
Exemplos de poliedros regulares.



Os poliedros regulares são distinguidos em função do número de faces existentes no sólido.

Número de faces	Nome
4	Tetraedro
6	Hexaedro
8	Octaedro
12	Dudecaedro
20	Icosaedro

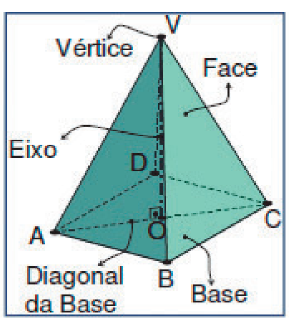
Exemplos de poliedros irregulares.



Os poliedros irregulares se dividem em prismas e pirâmides. Estes podem ser divididos em retos, oblíquos e regulares.

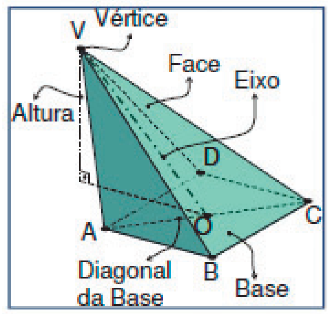
Elementos de uma pirâmide

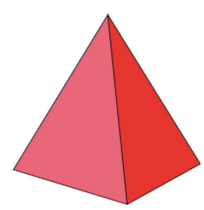
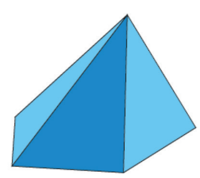
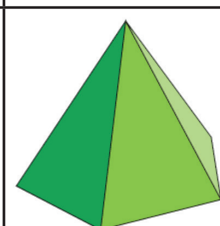
Uma pirâmide sempre apresentará uma base, um eixo, uma altura, faces triangulares, arestas, um vértice comum a todas as faces e diagonais da base. O vértice onde todas as faces do triângulo se encontram denomina-se vértice da pirâmide. Ponto (V) na figura abaixo.



A forma geométrica da base da pirâmide é utilizada para classificar a mesma se regular ou não. As pirâmides regulares possuem bases que são polígonos regulares.

O eixo da pirâmide é utilizado para classificar a pirâmide em reta ou obliqua. O eixo corresponde ao segmento de reta que une o vértice (V) da pirâmide ao ponto central (O) da diagonal da base da pirâmide. Quando o eixo atinge a base formando um ângulo reto (90 graus) então dizemos que o eixo será coincidente com a altura da pirâmide. Nesse caso a pirâmide é dita reta. Caso contrário tem-se a pirâmide obliqua e o eixo não coincide com a altura. A altura de uma pirâmide corresponde ao segmento de reta que sai do vértice (V) da mesma e atinge a base ou o plano formando por esta com um ângulo reto.

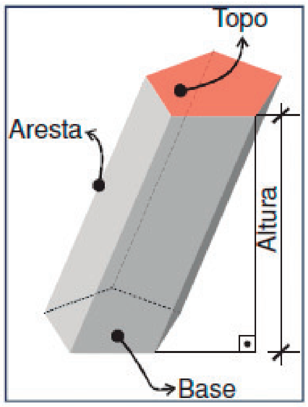


SÓLIDOS GEOMÉTRICOS	IRREGULARES	PIRÂMIDES	RETA		Eixo perpendicular a base. A pirâmide poderá apresentar base regular ou não
			OBLIQUA		Eixo obliquo à base. A pirâmide poderá apresentar base regular ou não.
			REGULAR		Polígono da base é regular. Poderá ser reta ou obliqua.

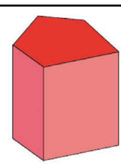
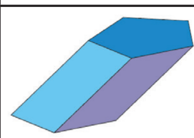
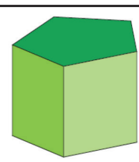
Elementos de um Prisma

Um prisma sempre apresentará uma base, um topo, um eixo, uma altura, faces quadrangulares, vértices e arestas paralelas. Os planos da base e do topo são paralelos.

A forma geométrica da base do prisma é utilizada para classificar a mesma se regular ou não. Os prismas regulares possuem bases e topos iguais e estes são polígonos regulares.



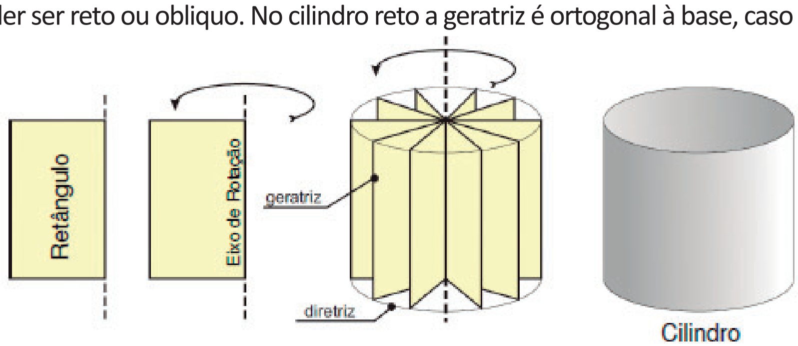
As arestas do prisma são utilizadas para classificar o mesmo em reto ou obliquo. Quando as arestas atingem a base do prisma formando ângulos retos (90 graus) dizemos o prisma é reto. Caso contrário tem-se o prisma obliquo. No caso de prismas retos, os comprimentos das arestas correspondem à medida da altura do prisma. A altura de uma prisma corresponde ao segmento de reta que sai de um dos vértices do topo e atinge a base ou o plano formando por esta com um ângulo reto.

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS	IRREGULARES	PRISMAS	RETO		Arestas forma ângulos retos com a base.
			OBLIQUO		As arestas são obliquas à base
			REGULAR		O polígono da base e do topo são regulares.

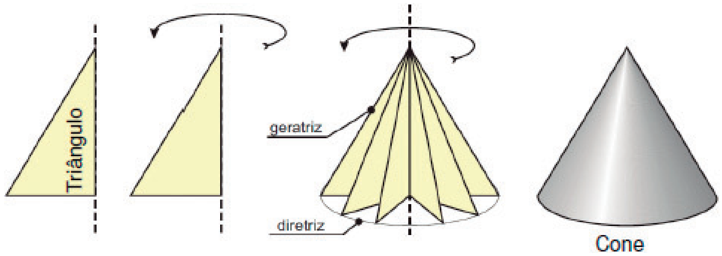
7.2.2 - SOLIDOS DE REVOLUÇÃO

Sólidos de revolução são figuras geométricas provenientes da rotação de uma figura geométrica plana em torno de um eixo de rotação imaginário. Os principais sólidos de revolução são: Cilindro, Cone e Esfera

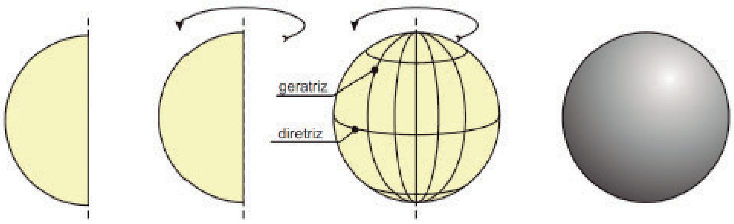
O cilindro corresponde ao sólido de revolução oriundo da rotação de um retângulo, tendo como eixo de rotação um de seus lados. O cilindro poder ser reto ou obliquo. No cilindro reto a geratriz é ortogonal à base, caso contrário ele será obliquo.



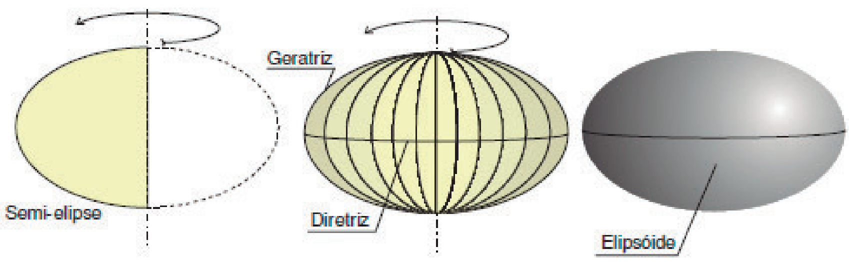
O cone corresponde ao sólido de revolução oriundo da rotação de um triângulo, tendo como eixo de rotação um de seus catetos. No cone reto o eixo de rotação é ortogonal à base, caso contrário ele será obliquo.

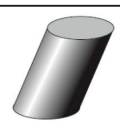
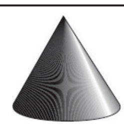
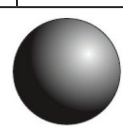
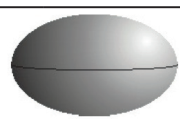


A esfera corresponde ao sólido de revolução oriundo da rotação de uma semi – circunferência em torno de um eixo coincidente com o diâmetro.



Um outro sólido de revolução importante e muito utilizado na topografia é o elipsóide de revolução. O elipsóide de revolução é obtido a partir da rotação de uma semi-elipse em torno de um dos seus eixos.



<table>
<tr><td rowspan="6">SÓLIDOS GEOMÉTRICOS</td><td rowspan="6">SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO</td><td rowspan="2">CILÍNDRO</td><td>RETO</td><td></td><td>A geratriz é ortogonal a base.</td></tr>
<tr><td>OBLIQUO</td><td></td><td>A geratriz é obliqua a base</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CONE</td><td>RETO</td><td></td><td>O eixo de rotação é ortogonal à base.</td></tr>
<tr><td>OBLIQUO</td><td></td><td>O eixo de rotação é obliquo à base.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ESFERA</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">ELIPSÓIDE</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

8. Unidade de Medidas

A necessidade de obter medidas pode ser considerada muito antiga. De fato, o homem primitivo quando precisava se movimentar em busca de alimentos deveria possuir algum mecanismo intuitivo para obter medidas de relação para poder se movimentar no meio ambiente. As unidades de medidas sem sombra de dúvida remota à antiguidade e à origem das civilizações.

Como as medidas eram definas por cada país ou região, cada povo tinha o seu sistema próprio de medir. Essas unidades de medidas eram geralmente arbitrárias e imprecisas, como por exemplo, aquelas baseadas no corpo humano: palmo, pé, polegada, braça, côvado.

O conjunto desses sistemas de medidas criava, certamente, grandes problemas para as pessoas que necessitavam trocar mercadorias entre diversas regiões, pois as quantidades eram expressas em unidades pouco confiáveis, diferentes umas das outras e que não tinham correspondência entre si.

A necessidade de converter uma medida em outra era tão importante quanto a necessidade de converter uma moeda em outra. Na verdade, em muitos países, inclusive no Brasil dos tempos do Império, a instituição que cuidava da moeda também cuidava do sistema de medidas.

Em 1789, através da Academia de Ciências Francesa, foi proposto um sistema de medição baseado em uma constante natural de tal sorte que o método pudesse ser aplicado ao mundo inteiro sem sofrer interferência de fatores ambientais, Assim, foi criado o Sistema Métrico Decimal, constituído inicialmente de três unidades básicas: o metro, que deu nome ao sistema, o litro e o quilograma (posteriormente, esse sistema seria substituído pelo Sistema Internacional de Unidades - SI).

O Sistema Internacional de Unidades - SI foi sancionado em 1960 pela Conferência Geral de Pesos e Medidas e constitui a expressão moderna e atualizada do antigo Sistema Métrico Decimal, ampliado de modo a abranger os diversos tipos de grandezas físicas, compreendendo não somente as medições que ordinariamente interessam ao comércio e à indústria (domínio da metrologia legal), mas estendendo-se completamente a tudo o que diz respeito à ciência da medição.

O Brasil adotou o Sistema Internacional de Unidades - SI em 1962. A Resolução nº 12 de 1988 do Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial - CONMETRO, ratificou.

As grandezas fundamentais estabelecidas pelo SI dizem respeito à obtenção de medidas para comprimento, massa, tempo, corrente elétrica, temperatura, quantidade de matéria e intensidade luminosa. Os múltiplos e submúltiplos dessas medidas podem ser obtidas utilizando a tabela de prefixos do SI como mostrado na tabela 1.

Fator de Multiplicação	Prefixo	Símbolo
1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1 000 000 000 = 10^{9}	giga	G
1 000 000 = 10^{6}	mega	M
1 000 = 10^{3}	quilo	k
100 = 10^{2}	hecto	h
10 = 10^{1}	deca	da
0,1 = 10^{-1}	deci	d
0,01 = 10^{-2}	centi	c
0,001 = 10^{-3}	mili	m
0,000 001 = 10^{-6}	micro	µ
0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}	femto	f
0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	atto	a

Tabela 1: Prefixos do SI

Para os trabalhos de topografia o conhecimento em unidades de comprimento e tempo bem como os seus múltiplos e submúltiplos são importantes.

A primeira definição do metro foi baseada no protótipo internacional em platina COMPRIMENTO (METRO) iridiada, que entrou em vigor em 1889.

Essa definição foi posteriormente foi substituída na 11ª CGPM – Conferência Geral de Pesos e Medidas (1960) por outra definição baseada no comprimento de onda de uma radiação do criptônio 86, com a finalidade de aumentar a exatidão da realização do metro.

A 17ª CGPM (1983, Resolução 1; CR 97 e Metrologia, 1984, 20, 25) substituiu, em 1983, essa última definição pela seguinte: “O metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 de segundo.” Essa definição tem o efeito de fixar a velocidade da luz em 299 792 458 $m.s^{-1}$, exatamente.

Os múltiplos e submúltiplos da unidade metro podem ser obtidos através do uso de prefixos como mostra a tabela abaixo

Fator de Multiplicação	Prefixo	Símbolo
1 000 = 10^{3}	quilômetro	km
100 = 10^{2}	hectômetro	hm
10 = 10^{1}	decâmetro	dam
1 = 10^{0}	metro	m
0,1 = 10^{-1}	decímetro	dm
0,01 = 10^{-2}	centímetro	cm
0,001 = 10^{-3}	milímetro	mm
0,000 001 = 10^{-6}	micrômetro	µm

Tabela 2: Prefixos do SI para o metro para os derivados mais utilizados.

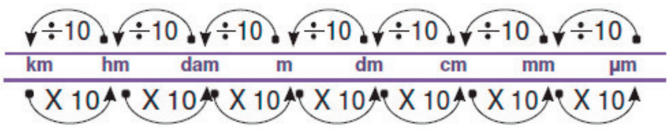
Uma forma prática para transformar uma unidade em outra é utilizar a seguinte estrutura:

Km	Hm	Dam	M	Dm	Cm	Mm	µm

Por exemplo, se desejarmos transformar 12.324 mm em metros basta preenchermos as casas acima, a partir do milímetro, com o números fornecidos, sempre utilizando um único algarismo para cada casa.

Km	Hm	Dam	M	Dm	Cm	Mm	µm
		1	2	3	2	4	

A vírgula decimal que antes estava na casa dos milímetros, agora deverá ir para a casa dos metros, resultando assim a seguinte medida: 12,324m Outra forma também bastante prática é utilizara as seguintes relações:



Por exemplo, se desejarmos transformar 803.478,0 cm em quilômetro basta contar quantas casas necessitamos andar até chegar ao local desejado. De centímetro para quilômetro devemos andar 5 (cinco) casas para a esquerda.

Para cada casa deslocada deveremos dividir o valor original fornecido por 10. Como serão cinco casas a serem percorridas o efeito corresponde a dividir o valor original por 10x10x10x10x10=100000, ou seja, obteremos $\frac{803478,0cm}{100000}$= 8,03487km

No sentido contrário, ou seja, contando casas da esquerda para a direita, o resultado final será obtido efetuando a multiplicação do número original por 10 tantas vezes quanto for necessário até atingir a casa desejada. Exemplo: 32,123 dam transformado em mm corresponde a 32,123 X 10 X 10 X 10 X 10 igualando a 321.230,0 mm

Exercícios:

1.1 Converter as seguintes medidas para metros (m):
a) 1.234,45 Km;
b) 2.344.190,3 mm;
c) 129,2345 cm;
d) 78,455 hm;
e) 4.512,982 dam;
f) 0,034 dm;

1.2 Converter as seguintes medidas para quilômetro (km):
a) 1.234,45 mm;
b) 2.344.190,3 cm;
c) 129,2345 m;
d) 78,455 dm;
e) 4.512,982 dam;
f) 0,034 dm;

9. Áreas, Volumes e Perímetro

As figuras geométricas podem ser figuras planas ou sólidos geométricos. No caso das figuras planas é de interesse imediato da topografia poder medir a área superficial dessas figuras bem como poder representar essas medidas e unidades agrárias. Os sólidos geométricos também são figuras que devem ser tratadas pela topografia no que diz respeito a obtenção de valores volumétricos e superficiais desses sólidos.

Uma forma prática para transformar uma unidade de superficial em outra é utilizar a seguinte estrutura:

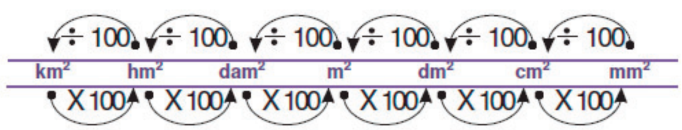
Km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Por exemplo, se desejarmos transformar 1.212.324,0 mm^2 em metros quadrado basta preenchermos as casas acima, a partir do milímetro, com o números fornecidos, sempre utilizando dois algarismo para cada casa.

Km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
			1	21	23	24

A vírgula decimal que antes estava na casa do milímetro quadrado, agora deverá ir para a casa do metro quadrado, resultando assim a seguinte medida: 1,212324 m^2.

Outra forma também bastante prática é utilizara as seguintes relações:



Uma forma prática para transformar uma unidade de volumétrica em outra é utilizar a seguinte estrutura:

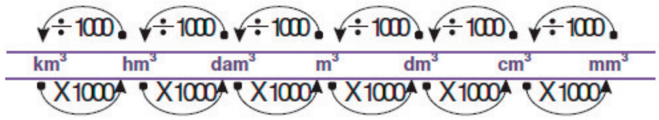
Km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

Por exemplo, se desejarmos transformar 1,124567 m³ em centímetro cúbico basta preenchermos as casas acima, a partir do metro, com o números fornecidos, sempre utilizando três algarismo para cada casa.

Km³	hm³	dam³	m³	dm³	cm³	mm³
			1	124	567	

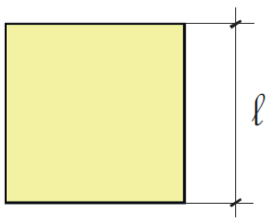
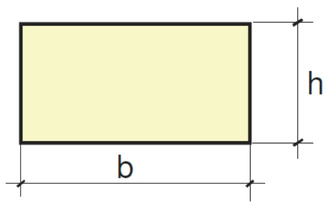
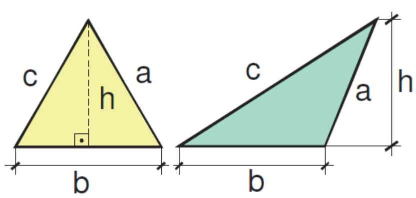
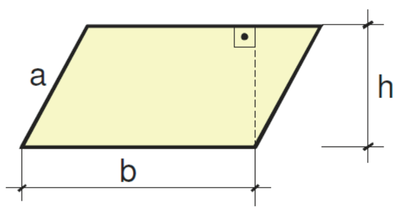
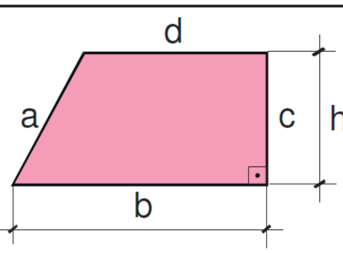
A vírgula decimal que antes estava na casa do metro cúbico, agora deverá ir para a casa do centímetro cúbico, resultando assim a seguinte medida: 1.124.567,0 cm³.

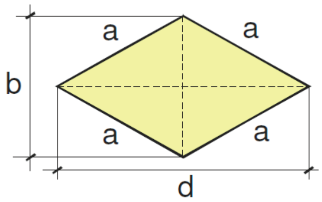
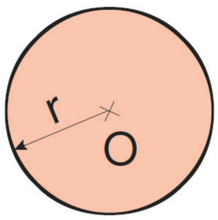
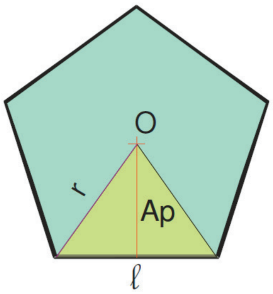
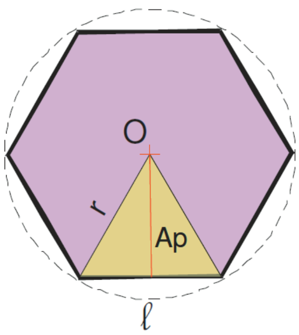
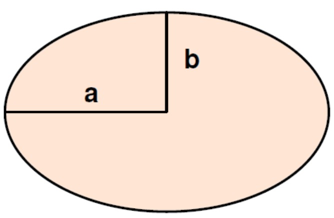
Outra forma também bastante prática é utilizara as seguintes relações:



9.1 - FIGURAS PLANAS

Serão apresentados o cálculo de área e perímetro das principais figuras planas.

FIGURA PLANA	NOME	FÓRMULA
	QUADRADO	
	RETÂNGULO	
	TRIÂNGULO	
	PARALELOGRA-MO	
	TRAPÉZIO	

	LOSANGO	
	CIRCUNFERÊN-CIA	
	PENTÁGONO	Onde: r: Raio da circunferência circunscrita ao polígono; Ap: apótema.
	HEXÁGONO	Onde: r: Raio da circunferência circunscrita ao polígono; Ap: apótema.
	ELIPSE	Onde: a: Semi-eixo maior b: Semi-eixo menor; Obs: A expressão para cálculo do perímetro da elipse não é simples.

Medidas Agrárias

ARE

As medidas de superfície de alguns objetos, muitas vezes, são obtidas em outras unidades distintas do SI. No sistema Internacional o metro e seus múltiplos e submúltiplos são adotados como medida padrão para apresentar valores de medidas de superfície. Entretanto, no que se refere a medidas de superfície para fazendas, áreas rurais, plantações, pastos, ou até mesmo urbana, outra unidade é mais difundida, são as medidas agrárias. Existem muitas medidas agrárias e diversidades de uma mesma unidade entre regiões.

Entretanto, a unidade padrão para esses casos é o ARE (a) e seu múltiplo e submúltiplo, o HECTARE (ha) e o CENTIARE (ca), respectivamente.

Unidade Agrária	Hectare (ha)	Are(a)	Centiare(ca)
Equivalência de Valor	100a	1a	0,01a

Ou 1ha = 10.000,00 m²

Uma forma prática de obter uma medida agrária corresponde a obter a área do imóvel em metros quadrado e efetuar a separação do valor numérico obtido de dois em dois algarismo, iniciando do ponto decimal, da direita para a esquerda.

O primeiro grupo corresponderá ao centiare. O segundo grupo corresponderá ao área, e o restante ao hectare.

Por exemplo. Uma fazenda apresenta uma área superficial de 1.204.567,45 m² e desejamos representar esse valor em medida agrária.

1.20/45/67,45

Assim, obtermos: 120 ha 45 a 76,45 ca

ALQUEIRE

A palavra Alqueire é de origem árabe e designa uma das bolsas de carga que era usado no transporte de grãos. Esta bolsa foi tomada como medida de secos e, com o passar do tempo, passou a designar a área de terra necessária para o plantio de todas as sementes que coubessem nela.

Mesmo com a introdução do sistema métrico decimal, no século XIX, os alqueires tradicionais ainda continuam sendo utilizados.

Atualmente, o alqueire é unidade de superfície e suas medidas variam de acordo com a região. O alqueire paulista corresponde a uma área de 24.200 m² (110 m x 220 m) e, o alqueire mineiro, corresponde a 48.400 m² (220 m x 220 m). O alqueire do norte é usado na região Norte do Brasil e tem sua área correspondente a 27.225 m² (165 m x 165 m).

Nome	Metros Quadrado	Hectare
Alqueire Paulista	24.200 m²	2,42 ha
Alqueire Mineiro	48.400 m²	4,84 ha
Alqueire do Norte	27.225 m²	2,7225 ha

Exercicios:

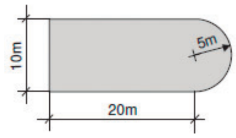
1) O terreno ao lado apresenta uma forma retangular e possui 50 m de frente por 200 m de fundo. Calcular a área do terreno.

2) Um casa foi construída apresentando uma forma quadrada com 785 cm de lado. Calcular a área da edificação em metro quadrado.

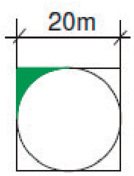
3) Uma pizza grande, em formato circular, apresenta um diâmetro de 50cm. Calcular a área da pizza.

4) Um jardim apresenta um formato triangular com as seguintes medidas: 15,0m x 20,00m x 22,00m. Calcular a área do jardim.

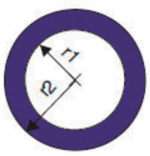
5) Uma piscina foi construída apresentado a forma composta ao lado. Pede-se: determinar a área superficial.



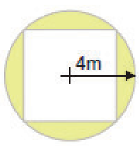
6) A partir da composição das figuras planas ao lado, determinar a área destacada em verde.



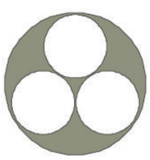
7) Uma pista de ciclismo foi construída a partir de duas circunferências como mostra a figura ao lado. Sabendo que o raio externo é de 300m e o raio interno é de 298m, calcular a área da pista.



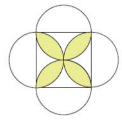
8) Um paisagista construiu um jardim com a composição de duas figuras planas como mostra a figura ao lado. Determinar a área pintada.



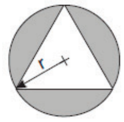
9) De uma chapa circular de alumínio com raio de 11 cm foi retirado três círculos de diâmetro de 9,80 cm, como mostra a figura ao lado. Deseja-se calcular a área superficial de alumínio restante após a retirada das três circunferências.



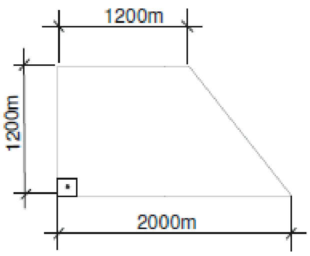
10) Calcular a área da pétala ao lado sabendo que o quadrado que envolve a mesma possui 10m de lado.



11) Um triângulo eqüilátero está inscrito numa circunferência de raio = 8 cm, como mostra a figura ao lado. Determinar a área pintada da figura.



12) Uma propriedade rural apresenta um formato trapezoidal conforme mostra a figura ao lado. Determinar a área da propriedade medida agrária.

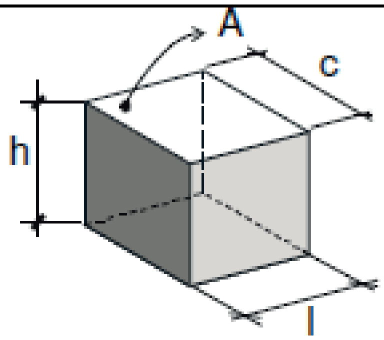
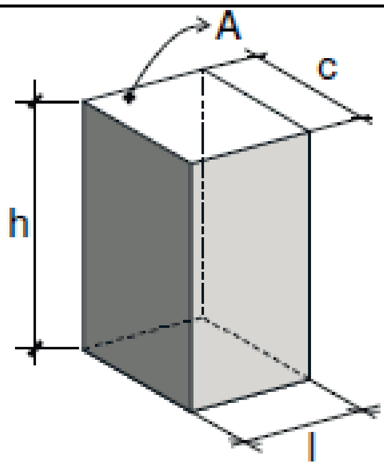
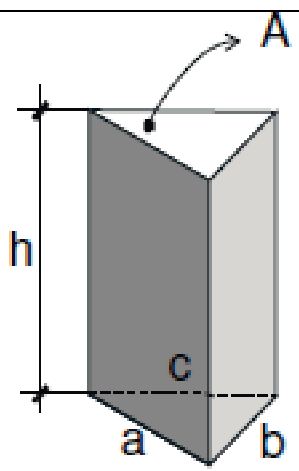


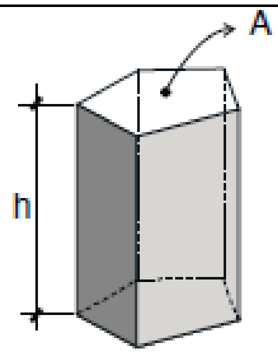
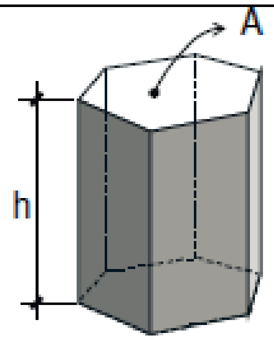
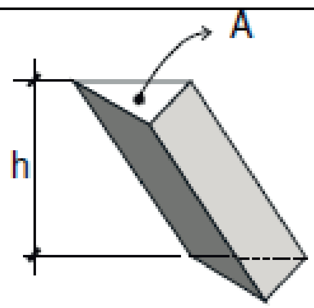
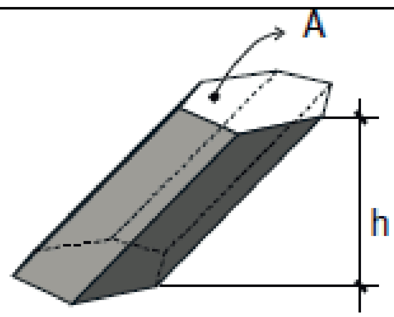
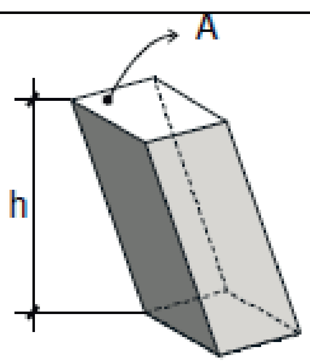
13) No projeto Jaíba em Minas Gerais alguns pivôs centrais foram dispostos como mostra a figura ao lado. Sabendo que cada pivô possui um raio de 500m e que eles tangenciam si, pede-se para calcular a área da estrela, em medidas agrárias, situada entre os quatros círculos.

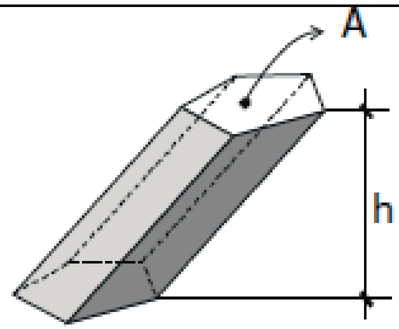
14) O bar apresentado na figura ao lado corresponde a um hexágono regular com 5m de lado. Determine a área do bar.

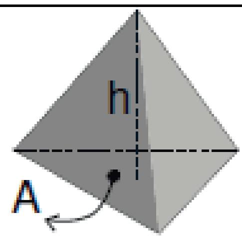
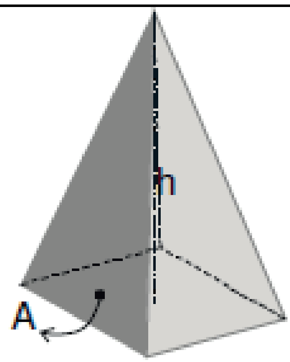
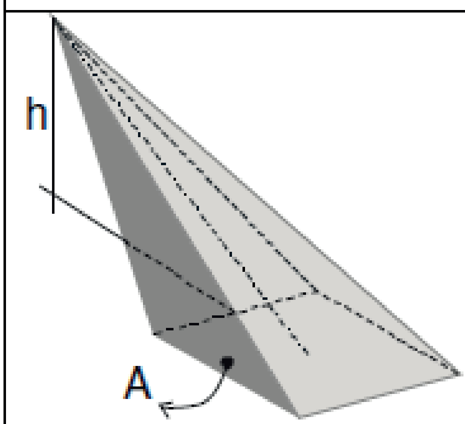
9.2 - SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

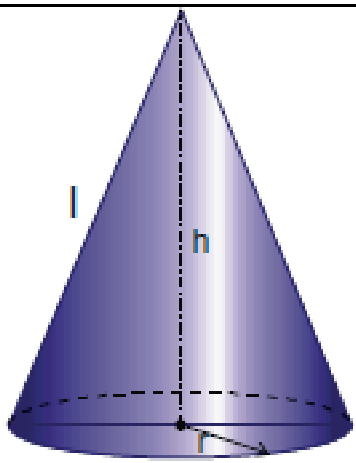
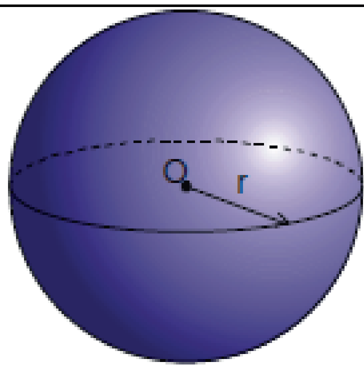
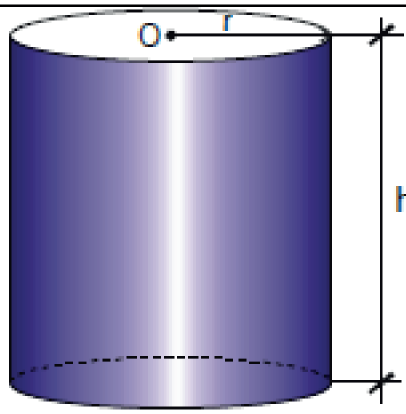
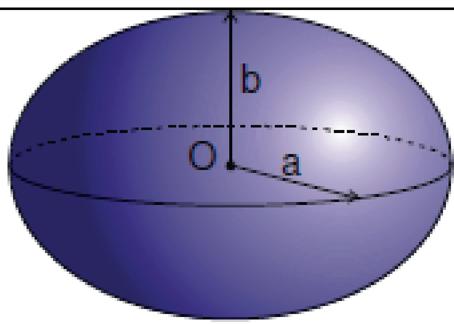
Serão apresentados o cálculo de volume e área dos principais sólidos.

SÓLIDO GEOMÉTRICO		NOME	FÓRMULA
PRISMAS		CUBO	$V = l \times l \times l = l^3$ h = l $A = 6 \times l \times l = 6 \times l^2$
		PARALELEPÍPEDO	$V = l \times c \times h$ $A = h \times (2l + 2c) + (2 \times l \times c)$
		PRISMA RETA DE BASE TRIANGULAR	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + h \times (a + b + c)$

PRISMAS		PRISMA RETO DE BASE PENTAGONAL	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + 5 \times a \times h$
		PRISMA FRETO DE BASE XEXAGONAL	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + 6 \times a \times h$
		PRISRA OBLIQUO DE BASE TRIANGULAR	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + Área\ das\ faces$
		PRISMA OBLIQUO DE BASE PENTAGONAL	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + Área\ das\ faces$
		PRISMA OBLIQUO DE BASE QUADRANGULAR	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + Área\ das\ faces$

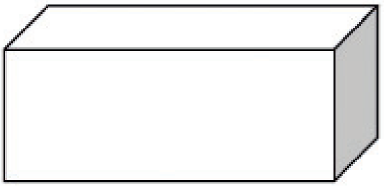
PRISMAS		PRISMA OBLIQUO DE BASE HEXAGONAL	$V = A_{BASE} \times h$ $A = 2 \times A_{BASE} + Área\ das\ faces$

PIRÂMIDES		TETRAEDRO	$V = \frac{A_{BASE} \times h}{3}$
		PIRÂMIDE RETA DE BASE QUADRANGULAR	$V = \frac{A_{BASE} \times h}{3}$
		PIRÂMIDE OBLIQUA DE BASE QUADRANGULAR	$V = \frac{A_{BASE} \times h}{3}$

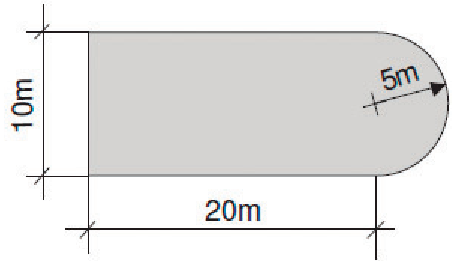
SOLIDO DE REVOLUÇÃO		CONE	$V = \dfrac{A_{BASE} \times h}{3}$ $A_{BASE} = \pi \times r^2$ $A = \pi \times r \times \left(\sqrt{r^2 + h^2} + r\right)$
		ESFERA	$V = \dfrac{4 \times \pi \times r^3}{3}$ $A = 4 \times \pi\ x\ r^2$
		CILINDRO	$V = A_{BASE} \times h$ $A_{BASE} = \pi \times r^2$ $A = 2 \times \pi \times r \times (r + h)$
		ELIPSÓIDE	$V = \dfrac{4 \times a^2 \times b \times \pi}{3}$ Onde: a: Semi-eixo maio b: Semi-eixo memor; Obs: A área superficial do elipsóide requer uma equação complexa.

Exercícios:

1) Uma caixa d`água em forma de prisma de base quadrangular, apresenta as seguintes dimensões: Largura= 3m, Comprimento= 2m e Altura = 1,5m foi instalada na escola. Calcular o volume do objeto.



2) Uma piscina foi construída obedecendo a geometria apresentada ao lado. Sabendo que a profundidade da mesma é de 1,5m, calcular o volume em metro cúbico.



3) As torres do Congresso Nacional em Brasília podem ser consideradas formas em paralelepípedos que medem 50m de comprimento, 15m de largura e aproximadamente 120m de altura. Calcular o volume de cada prédio.

4) A pirâmide de vidro localizada no museu do Louvre em Paris corresponde a uma pirâmide de base quadrangular medindo 35 m x 35 m e uma altura de 21m. Determina o volume da pirâmide.

5) Um prédio em formato cilíndrico apresenta as seguintes medidas: Raio da base igual a 30m e altura do prédio igual a 30 m. Calcular o volume do prédio.

6) As tendas dos índios americanos, conhecidas como Tipi, são sólidos geométricos em formato cônico. Uma tipi que apresente raio da base igual a 3m e altura de 5m possui que volume?

7) Uma bola de basquete apresenta um raio de 13cm. Determine o volume da bola de basquete.

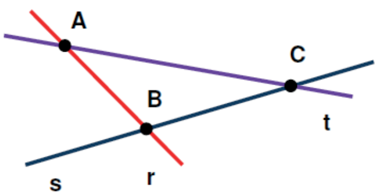
8) O modelo matemático utilizado para representar a terra corresponde ao elipsóide de revolução. Sabendo que o semi-eixo maior corresponde a 6378,137 km e o semi-eixo menor corresponde a 6356,75 km, para o elipsóide GRS80, determine o volume da terra.

10. Estudo do Triângulo

O triângulo talvez seja a figura geométrica mais importante da topografia, pois o seu uso se aplica a quase todas as etapas do processo de coleta de dados à representação gráfica.

Um triângulo é um polígono de três lados ou corresponde à figura geométrica fechada por três segmentos de retas distintos que se encontram dois a dois.

A figura a seguir mostra o encontro de três retas distintas, "r", "s" e "t", formando um polígono de três lados denominado de triângulo, que passa a ser definido pelos seguimentos de retas $\overline{AB}, \overline{BC}\ e\ \overline{DC}$.



Os pontos (A), (B) e (C) na figura anterior corresponde aos vértices do triângulo, e os seguimentos de retas $\overline{AB}, \overline{BC}\ e\ \overline{DC}$ são denominados lados do triângulo e podem ser representados pelas letras "c", "a" e "b", respectivamente.

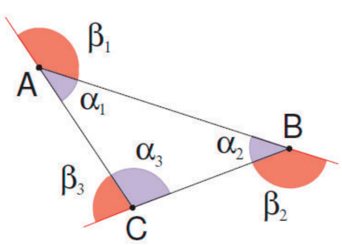
BAC, ACB e CBA são os ângulos internos do triângulo, e a soma dos três
ângulos corresponde a 180°.

A soma dos seguimentos de reta $\overline{AB}, \overline{BC}\ e\ \overline{DC}$, corresponde ao perímetro do triângulo.

10.1 - OS ÂNGULOS DO TRIÂNGULO

Um triângulo apresenta dois tipos de ângulos, os internos e os externos que guardam uma relação entre si.

Na figura tem-se os ângulos internos (α, α,α e externos do triângulo.



Observando o ângulo interno e o ângulo externo em um determinado vértice, por exemplo, no vértice A, nota-se que a soma dos os dois ângulos corresponde a meia volta completa, ou seja, um ângulo de 180°. Assim,

Ângulo Interno + Angulo externo = 180º

Outra relação importante envolvendo os ângulos internos corresponde a:

$$C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180°$$

Em relação aos ângulos externos de um triângulo podemos dizer que a soma deles corresponderá a 360°.

Observando cada ângulo interno em relação aos outros dois, podemos concluir que em todo triângulo cada ângulo é o suplemento da soma dos outros dois, de fato temos:

$$C\hat{A}B = 180° - (A\hat{B}C + B\hat{C}A)$$

$$A\hat{B}C = 180° - (C\hat{A}B + B\hat{C}A)$$

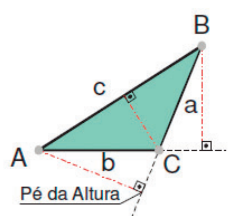
$$B\hat{C}A = 180° - (A\hat{B}C + C\hat{A}B)$$

10.2 - ELEMENTOS DO TRIÂNGULO

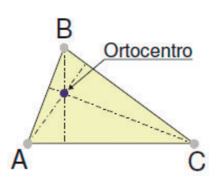
O triângulo apresenta alguns elementos importantes. Os principais elementos do triângulo são: altura, mediatriz, mediana e bissetriz.

ALTURA

Altura é um segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto. Esse lado é chamado base da altura, e o ponto onde a altura encontra a base é chamado de pé da altura. Na figura ao lado tem-se as três alturas traçadas para o triângulo.

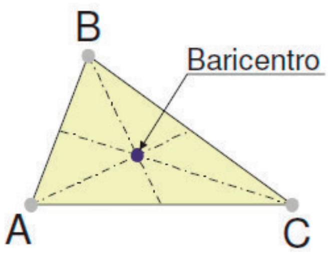


O prolongamento das alturas de um triângulo são concorrentes em um ponto denominado de ortocentro. O ortocentro poderá ser interno ou externo ao triângulo.



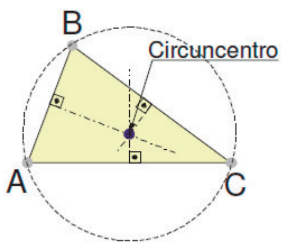
MEDIANAS

Mediana é um segmento de reta traçada por um dos vértices de triângulo até o ponto médio do lado oposto ao vértice. Um triângulo possui três medianas que concorrem em um ponto denominado baricentro. O baricentro (do grego - baros “peso”, do latim - centrum “centro de gravidade”) de um triângulo é também chamado de centro de gravidade ou centróide. É também o ponto que divide cada mediana do triângulo em duas partes: um terço a contar do lado e dois terços a contar do vértice.



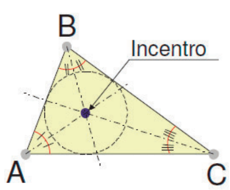
MEDIATRIZ

Mediatriz é um segmento de reta ortogonal aos lados do triângulo, traçada pelos pontos médios dos respectivos lados. As mediatrizes são concorrentes num ponto denominado circuncentro. O circuncentro permite circunscrever uma circunferência ao triângulo.



BISSETRIZ

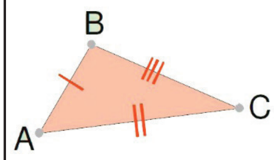
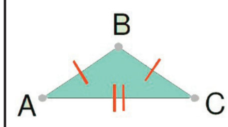
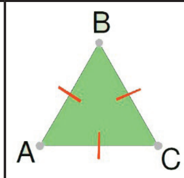
Bissetriz é um segmento de reta que divide os ângulos internos do triângulo em duas partes iguais. As bissetrizes são concorrentes num ponto denominado incentro. O incentro permite inscrever uma circunferência ao triângulo.



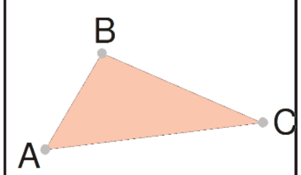
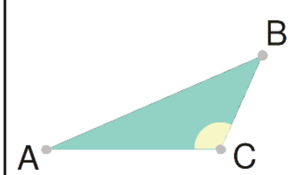
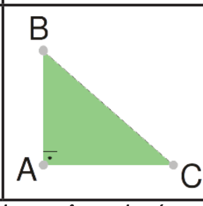
10.3 - CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

Para classificar os triângulos devemos observar os seus lados e ângulos.

Quando aos lados os triângulos são divididos em: escaleno, isósceles e equilátero.

Escaleno	Isósceles	Equilátero
		
Três lados com medidas distintas	Dois lados com medidas iguais.	Três lados com medidas iguais.

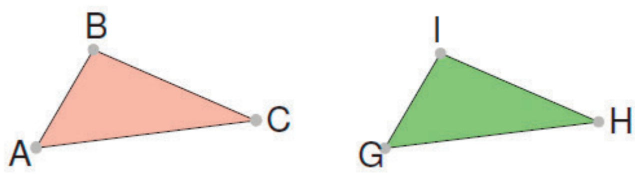
Quando aos ângulos os triângulos são divididos em: acutângulo, obtusângulo e retângulo.

Acutângulo		Todos os ângulos internos são agudos, isto é, as medidas dos ângulos são menores do que 90°.
Obtusângulo		Um ângulo interno é obtuso, isto é, possui um ângulo com medida maior do que 90°
Retângulo		Possui um ângulo interno reto (90 graus).

Obs: O triângulo retângulo é o principal triângulo da topografia. Uma grande parte dos cálculos topográficos utiliza as relações métricas e trigonométricas desse triângulo.

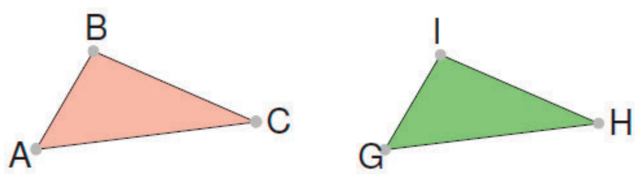
10.4- SEMELHANÇA E CONGRUÊNCIA

Dois triângulos são ditos congruentes quando possuem a mesma forma e as mesmas dimensões, isto é, o mesmo tamanho. Os triângulos ABC e GHI, abaixo, são congruentes, ou seja: ABC = GHI.

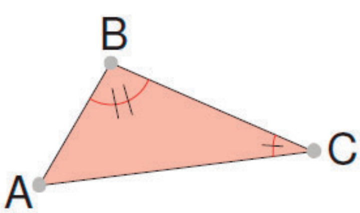


Dois triângulos são congruentes, se os seus elementos correspondentes são ordenadamente congruentes, isto é, os três lados e os três ângulos de cada triângulo têm respectivamente as mesmas medidas.

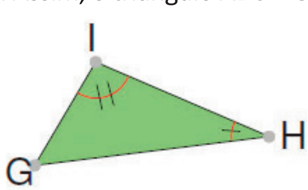
Dois triângulos são ditos semelhante quando possuem a mesma forma mais não necessariamente as mesmas dimensões, isto é, o mesmo tamanho. Os triângulos ABC e GHI, abaixo, são semelhantes, ou seja: ABC ~ GHI.



Dados dois triângulos semelhantes, tais triângulos possuem lados proporcionais e ângulos congruentes. Se um lado do primeiro triângulo é proporcional a um lado do outro triângulo, então estes dois lados são ditos homólogos. Nos triângulos acima, todos os lados proporcionais são homólogos.



Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois ângulos respectivamente congruentes. Nos triângulos ao lado, os ângulos B e C são congruentes aos ângulos I e H respectivamente. Assim, o triângulo ABC ~ GIH.



Da condição de semelhança entre os triângulos anteriores, podemos relacionar os comprimentos dos seus lados da seguinte forma:

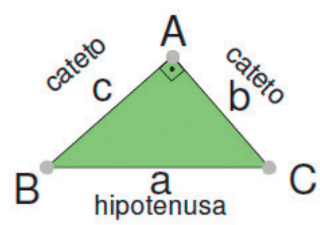
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IH}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{HG}} = Constante$$

A razão entre os segmentos estabelece um fator de escala entre os triângulos denominado de razão de semelhança. O fator de escala ou a razão de semelhança poderá ser de ampliação ou redução.

10.5- O TRIÂNGULO RETÂNGULO

O triângulo retângulo é o principal triângulo estudado em topografia, pois as relações existentes entre os seus lados e ângulos auxiliam nas resoluções de problemas topográficos. Assim, trataremos o mesmo com maio particularidade.

Em um triângulo retângulo, são chamados de catetos os lados perpendiculares entre si, ou seja, aqueles que formam o ângulo reto, e é chamado de hipotenusa o lado oposto ao ângulo reto. No triângulo retângulo ao lado os segmentos "b" e "c" correspondem aos catetos e o segmento "a" a hipotenusa.



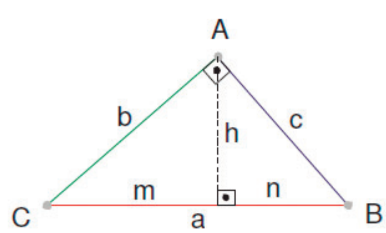
Dado o triângulo retângulo, temos:

a: hipotenusa;

b e c: catetos;

h: altura em relação à hipotenusa;

m e n: projeções dos catetos sobre a hipotenusa.



Podemos obter as seguintes relações métricas dos seus elementos:

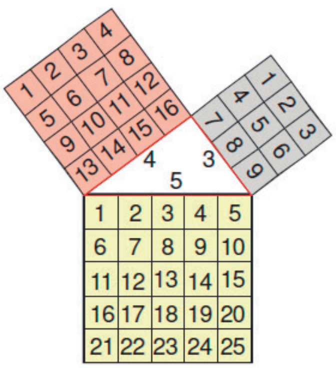
Área : $A = \frac{a \times h}{2}$ ou $A = \sqrt{p\,.\,(p-a)\,.\,(p-b)\,.\,(p-c)}$

Perímetro: $p = a + b + c$

b^2 - a x n; $c^2 = a$ x m; $h^2 = m$ x n;

TEOREMA DE PITÁGORAS

O teorema de Pitágoras corresponde a uma das propriedades mais importantes do triângulo retângulo. Leva esse nome em homenagem a Pitágoras, matemático grego que viveu entre (570 a.C. – 495 a.C.). Acredita-se que o mesmo tenha demonstrado essa relação, embora, alguns autores, argumentem que o conhecimento do teorema seja anterior a ele (há evidências que os babilônicos conheciam algoritmos para calcular os lados em casos específicos).



A demonstração do teorema de Pitágoras pode ser feita de diversas formas, entretanto a mais simples corresponde a contar a quantidade de quadrado de lado unitário que se pode obter com um triângulo retângulo de dimensão 3 x 4 x 5. Construindo quadrados maiores com os lados do triângulo pode-se contar a quantidade de quadrados unitários 1 x 1 contidos dentro dos quadrados maiores. Nota-se que a quantidade se quadrados unitários contidos nos quadrados formados pelos lados de 4 e 3 unidades, respectivamente, é igual a quantidade de quadrados unitários formados pelo quadrado de 5 unidades. Assim, temos:

$5^2 = 4^2 + 3^2 \longrightarrow 25 = 16+9 \longrightarrow 25 = 25$

Genericamente temos:

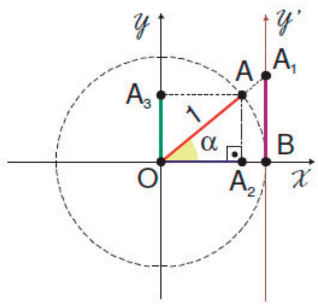
$a^2 = b^2 + c^2$

10.6- O CICLO TRIGONOMÉTRICO

Para concluir o estudo do triângulo retângulo faz-se necessário apresentar as relações trigonométricas existente no mesmo.

A Trigonometria (do grego trigonon “triângulo” + metron “medida”) é um ramo da matemática que estuda os triângulos. Desta forma, a trigonometria guarda uma estreita relação com o triângulo retângulo. Ela também estuda as relações entre os lados e os ângulos dos triângulos; as funções trigonométricas, e os cálculos baseados nelas. A abordagem da trigonometria penetra outros campos da geometria, como o estudo de esferas usando a trigonometria esférica.

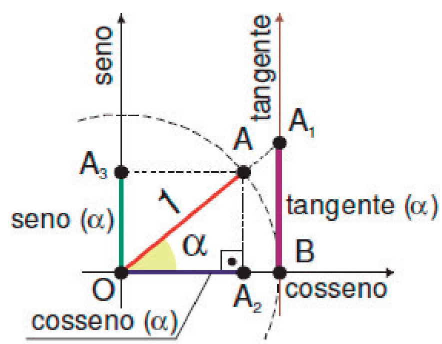
Para obtermos as relações trigonométricas existentes em um triângulo, devemos estudar o ciclo trigonométrico. O ciclo trigonométrico é uma circunferência orientada de raio unitário, centrada na origem dos eixos de um plano cartesiano ortogonal (X,Y). Os eixos são conhecidos como eixo dos cossenos (eixo Y) e eixo dos senos (eixo X). O eixo secundário Y’ mostrado na figura ao lado corresponde ao eixo das tangentes.



O ponto (A) pode descrever arcos ao se deslocar na circunferência de raio unitário. Existem dois sentidos de marcação dos arcos no ciclo: o sentido positivo, chamado de anti-horário, que se dá a partir da origem dos arcos até o lado terminal do ângulo correspondente ao arco; e o sentido negativo, ou horário, que se dá no sentido contrário ao anterior.

O ponto (A), ao deslocar-se desde a posição (B), descreve o arco AB, que por sua vez está associado ao ângulo α.

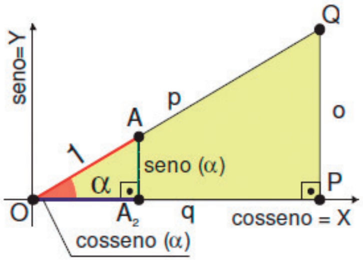
O Ponto (A) pode ser projetado sobre os eixos (X,Y), correspondendo aos segmentos de retas $\overline{OA_2}$ e $\overline{OA_3}$, representando o cosseno e o seno, respectivamente, do ângulo α associado.



O prolongamento do raio, segmento de reta $\overline{OA}$, permite obter o ponto (A_1) sobre o eixo das tangentes. O segmento de reta $\overline{BA_1}$ corresponde à tangente do ângulo a associado.

O triângulo retângulo OAA_2 obtido da figura anterior é utilizado como referência para construir as relações trigonométricas de todos os triângulos retângulos.

Através das relações de semelhança e congruência dos elementos apresentados podemos ligar os lados de um triângulo aos senos e cossenos de um ângulo.



O triângulo retângulo OPQ e o triângulo retângulo OA_2A, na figura ao lado, são semelhantes e desta forma guardam uma relação entre si. Podemos escrever as seguintes relações entre eles:

Relação 1:

$$\frac{\overline{QP}}{\overline{AA_2}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}} \rightarrow \frac{o}{seno(\alpha)} = \frac{1}{p} \rightarrow \frac{Cateto\ Oposto\ a\ \alpha}{seno(\alpha)} = \frac{1}{Hipotenusa}$$

$$\boxed{seno(\alpha) = \frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa}}$$

Relação 2:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}} \rightarrow \frac{q}{cosseno(\alpha)} = \frac{1}{p} \rightarrow \frac{Cateto\ Adjacente\ a\ \alpha}{cosseno(\alpha)} = \frac{1}{Hipotenusa}$$

$$\boxed{cosseno(\alpha) = \frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa}}$$

Relação 3:

$$\frac{\overline{QP}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA_2}} \rightarrow \frac{o}{seno(\alpha)} = \frac{q}{cosseno(\alpha)}$$

$$\frac{Cateto\ Oposto\ a\ \alpha}{seno(\alpha)} = \frac{Cateto\ Adjacente\ a\ \alpha}{cosseno(\alpha)}$$

$$\frac{seno(\alpha)}{cosseno(\alpha)} = \frac{Cateto\ Oposto\ a\ \alpha}{Cateto\ Adjacente\ a\ \alpha}$$

$$\boxed{tangente(\alpha) = \frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente}}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo do ciclo trigonométrico temos:

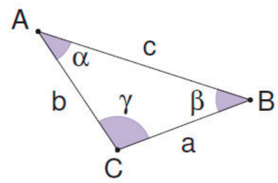
$1^2 = \text{seno}^2(\alpha) + \text{cosseno}^2(\alpha)$ ou $\text{seno}^2(\alpha) + \text{cosseno}^2(\alpha) = 1$

10.7- TRIÂNGULO QUALQUER

As relações métricas e trigonométricas apresentadas anteriormente são validas apenas para o triângulo retângulo. Para os outros casos devemos aplicar outras relações mais generalistas. As principais relações aplicadas a triângulos quaisquer são a lei do seno e a lei do cosseno. As leis dos senos e cossenos podem ser aplicadas aos triângulos retângulos.

LEI DOS SENOS.

$$\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c}$$



LEI DOS COSSENOS.

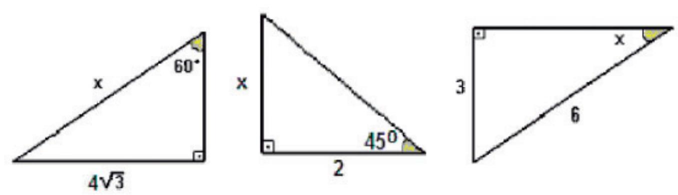
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times \text{b} \times \text{c} \times \text{cosseno}(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \times \text{a} \times \text{c} \times \text{cosseno}(\beta)$$

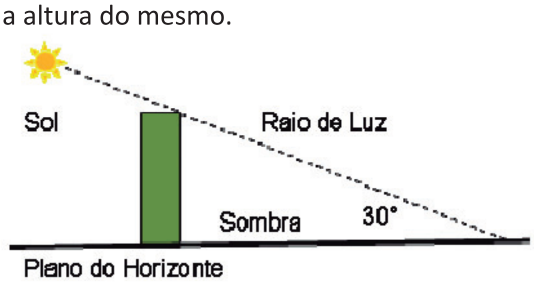
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times \text{a} \times \text{b} \times \text{cosseno}(\gamma)$$

Exercícios:

1) Para os triângulos retângulos abaixo, calcular o valor de X.



2) O sol atinge um prédio formando um ângulo de 30 graus com o plano do horizonte. Sabendo a medida da sombra projetada pelo prédio corresponde a 220m, calcular a altura do mesmo.



3) Uma escada de 7m de comprimento encontra apoiada em uma parede, formando um ângulo de 85° com o piso. Deseja-se saber qual é o afastamento dos pés em relação à parede. Dados (85)=0,996194698

4) Para determinar um ponto inacessível, um agrimensor determinou os seguintes dados:

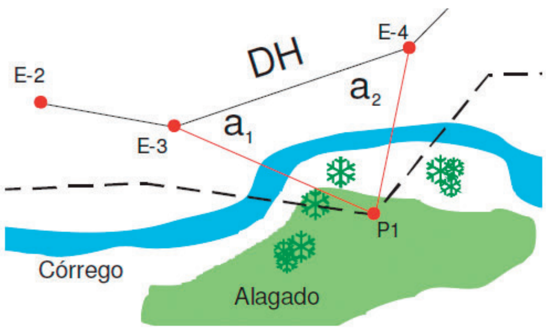
a_1: 45º

a_2: 60º

DH: 150m

Qual é a distância entre E-3 e p1?

Qual é a distância entre E-4 e p1?



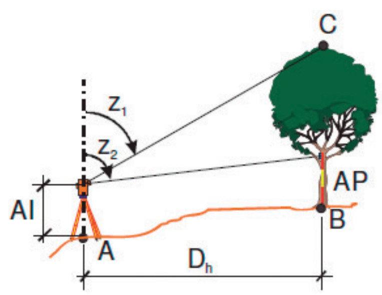
5) Para determinar a altura de uma árvore um agrimensor obteve os seguintes dados:

Z_1: 80°

Z_2: 81°

AP=AI= 1,6m

DH: 150m



Qual é a altura da árvore em metros?
(Valor da questão:1 5)

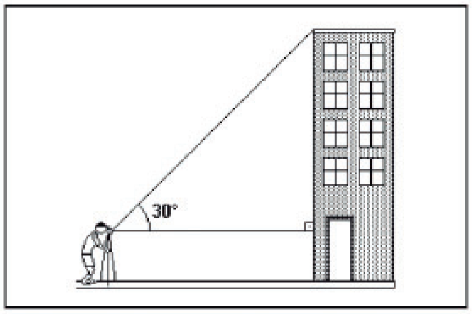
Dados:

seno (80°) = 0,9848077553 e Cosseno (80°) = 0,173648178

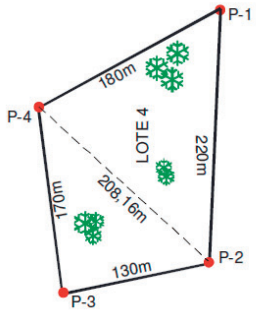
seno (81°) = 0,987688341 e Cosseno (81°) = 0,156434465

6) Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito (instrumento ótico para medir ângulos) a 200 metros do edifício e mediu um ângulo de 30°, como indicado na figura a seguir. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,5 metros do solo, Calcule a altura do prédio.

Use os valores: sen 30° = 0,5 , cos 30° = 0,866 e t g 30° = 0,577



7) Um Eng. Civil efetuou as seguintes medidas de um lote irregular como mostra a figura ao lado. Utilizando as relações métricas e trigonométricas do triângulo, deseja-se saber os ângulos internos do polígono bem como a sua área.



Anexo

Pronúncia	Minúscula	Maiúscula
alfa	α	Α
beta	β	Β
gama	γ	Γ
delta	δ	Δ
épsilon	ε	Ε
zeta	ζ	Ζ
eta	η	Η
téta	θ	Θ
iota	ι	Ι
capa	κ	Κ
lambda	λ	Λ
miu	μ	Μ

Pronúncia	Minúscula	Maiúscula
niu	ν	Ν
csi	ξ	Ξ
omicron	ο	Ο
pi	π	Π
rho	ρ	Ρ
sigma	σ	Σ
tau	τ	Τ
upsilon	υ	Υ
phi	φ	Φ
khi	χ	Χ
psi	ψ	Ψ
ômega	ω	Ω