MATEMÁTICA APLICADA

2020

Técnico em Eletrotécnica

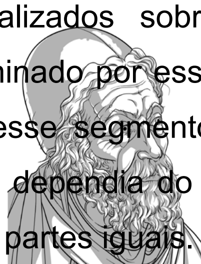
Sumário

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Trigonometria nos primórdios

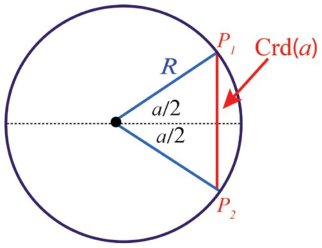
Por alguma razão, o número 60 tinha um apelo místico para os babilônios. Como resultado, cerca de 2.000 anos antes da era cristã, já propunham um sistema de numeração cuja base era esse número.Tal sistema tornou-se conhecido como sexagesimal, uma vez que a base escolhida por eles era o número 60, ou seja, nesse sistema qualquer número poderia ser expresso como soma de potências de 60 multiplicadas por constantes adequadas. Os Babilônios propuseram a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais, daí resultando a unidade de medida de ângulo conhecida como grau. Dessa forma uma circunferência tem 360°.

Hiparco (cerca 140 a.C.) recebeu o crédito por ter iniciado a trigono- metria, ou melhor, ter introduzido, de forma indireta, o conceito de seno de um ângulo. Hiparco era pesquisador no museu de Alexandria, a primeira instituição científica financiada pelo poder público. Transformou-se num dos maiores astrônomos da antiguidade. Sua principal contribuição à matemática teve a influência da matemática dos babilônios. Credita-se a ele a introdução, nos meios científicos relevantes na época, da medida de ângulo proposta pelos babilônios. Introduziu também a função seno utilizando o número 60.



Considerando-se dois pontos ($P1$, $P2$), ambos localizados sobre uma circunferência, é possível construir o segmento de reta determinado por esses dois pontos. Hiparco definia corda (Crd) como o comprimento desse segmento. Para medi-lo, Hiparco introduzia uma unidade de comprimento que dependia do raio da circunferência. Para isso, dividia o raio da circunferência em 60 partes iguais.

Traçando duas semirretas a partir da origem, passando pelos dois pontos, $P1$ e $P2$, podemos agora introduzir o ângulo a medindo a inclinação dessas semirretas. Claramente, a corda depende desse ângulo.Temos assim:



$\text{Crd}(a) = 2R\,sen(a/2)$

Figura - Definição de Corda associada a um ângulo.

Crd = Crd(a)

A corda pode ser, nesse contexto, entendida como função do ângulo *a*.

Adotando essa forma de caracterizar ângulos, ou de medi-los, podemos agora entender como Hiparco introduziu a função seno, como é definida nos dias de hoje. De fato, sua relação com a função comprimento da corda é bem simples:

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\frac{\operatorname{Crd}(a)}{2R}\rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{\operatorname{Crd}(a)}{120}$$

Escrevendo a corda como sendo dada por

Crd (a) = 2l

e utilizando o valor do raio, sem efetuar sua divisão em 60 partes, a função seno, definida a partir da função corda, pode ser escrita como:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{l}{R}$$

A rigor, Hiparco não estava introduzindo a função seno. Ele definia o que denominamos seno de um ângulo. Tal definição é análoga àquela obtida a partir das relações métricas de ângulos agudos num triângulo retângulo.

Hiparco gerou uma tabela de cordas. Essa tabela é muito semelhante a uma tabela dos senos, desde que nos atenhamos a ângulos menores do que 180°. A fim de determinar a posição dos corpos celestes, Hiparco teve a ideia de fazer a interpolação para gerar algo como a **função corda**.

Ptolomeu publicou, em sua obra **O Almagesto**, uma tabela de cordas para ângulos variando dentro de intervalos de 0,5°.

Ângulos no triângulo retângulo: o grau

Um triângulo é retângulo quando possui um ângulo reto, isto é, dois de seus lados são perpendiculares. Esses lados são denominados catetos e aquele oposto ao ângulo reto é deno- minado hipotenusa.

Para medir os ângulos de um triângulo retângulo utilizamos o grau como unidade de medida.

Observamos que, como o ângulo reto tem 90° por medida, os outros dois ângulos de um triângulo retângulo são complementares, ou seja, têm como medida de sua soma 90°.

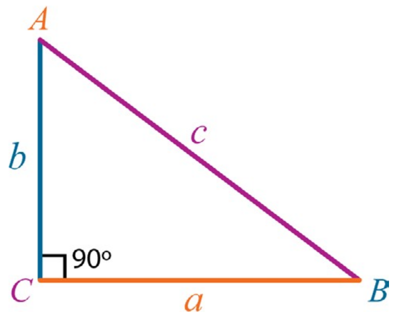


Figura - Lados e vértices do triângulo retângulo.

No caso de um triângulo retângulo, vale o **teorema de Pitágoras**, ou seja, vale a relação:

+ =

onde *c* é medida da hipotenusa, *a* e *b* são as medidas dos catetos.

Definição de seno e cosseno de um ângulo agudo num triângulo retângulo

Considerando o ângulo , por exemplo, o lado que é oposto a ele tem o nome de **cateto oposto** (o lado de medida *a* ou simplesmente o lado *a*), enquanto o lado adjacente a ele, e diferente da hipotenusa (o lado de medida *b* ou lado *b*), é denominado **cateto adjacente** a esse ângulo. Observe que, considerando agora o ângulo ,, o lado *b* é o seu cateto oposto enquanto o lado *a* é o seu cateto adjacente.

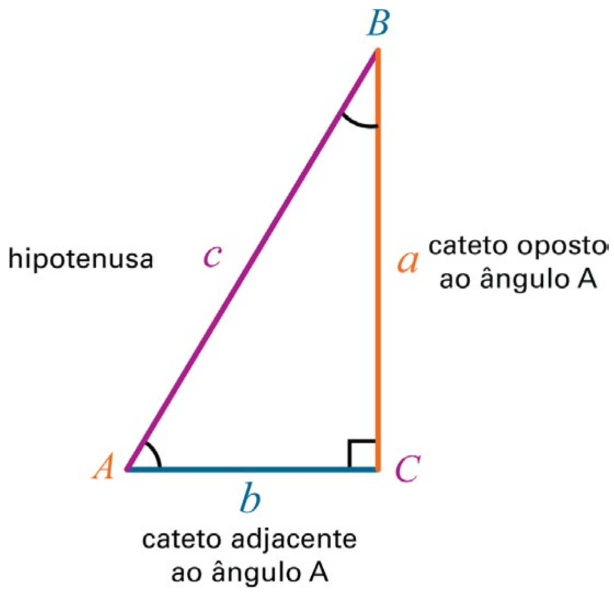
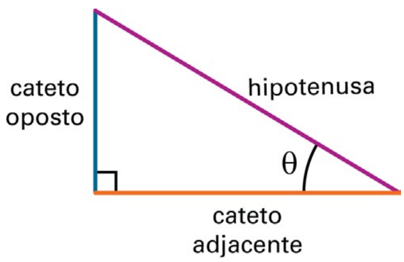


Figura - Lados de um triângulo retângulo.

A partir da notação, definimos o seno de um ângulo agudo do triângulo retângulo como sendo o quociente do cateto oposto pela hipotenusa:



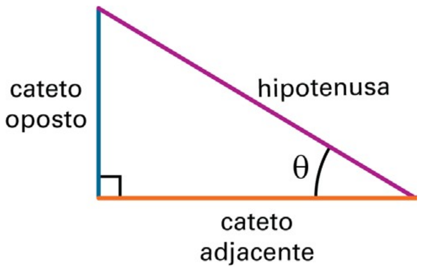
$$\boxed{\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}}$$

Figura - Seno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

Da definição anterior obtemos, na **Figura**:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{c}$$

Podemos também definir o cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo como sendo o quociente do cateto adjacente pela hipotenusa:



$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Figura: Cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

Da definição anterior obtemos, na **Figura**:

$$\cos\hat{A} = \frac{b}{c} \qquad \cos\hat{B} = \frac{a}{c}$$

Convém observar que num triângulo retângulo só temos como definir senos e cossenos para os ângulos agudos.

Propriedades dos senos e cossenos: a lei dos Senos e a lei dos Cossenos

Uma propriedade notável do cosseno e seno de um ângulo agudo num triângulo retângulo é facilmente derivada a partir do teorema de Pitágoras. De fato, tomando os valores do seno e do cosseno do ângulo agudo *A* no triângulo retângulo da **Figura**, conforme as expressões, e, em seguida, somando os valores dos seus respectivos quadrados, obtemos:

$$\text{sen}^2\,\widehat{A} + \cos^2\widehat{A} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

Utilizando o teorema de Pitágoras, resulta de que, para qualquer ângulo agudo num triângulo retângulo, vale a relação:

+ = 1

A fim de poder estabelecer a **Lei dos Senos** e a **Lei dos Cossenos**, que são relações úteis entre os lados e os ângulos de um triângulo **qualquer**, não necessariamente retângulo, podendo ser **acutângulo** ou **obtusângulo**, vamos ampliar o conceito de seno e cosseno de um ângulo. Para tal, introduzimos as seguintes identidades:

$$\text{sen}\,90° = 1$$

$$\cos 90° = 0$$

$$\text{sen}(180° - x) = \text{sen}\,x$$

$$\cos(180° - x) = -\cos x$$

Consideremos, em primeiro lugar, a **Lei dos Senos** a qual estabelece que, num triângulo

ABC qualquer, vale a seguinte relação:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2r$$

onde *a*, *b*, *c* indicam as medidas dos lados opostos aos ângulos de vértices *A*, *B*, *C*, respectiva- mente e *r* é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

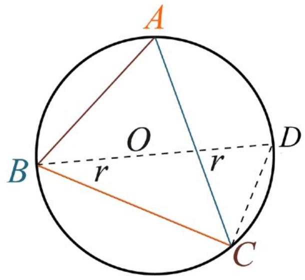


Figura - Triângulo *ABC* qualquer, inscrito numa circunferência de raio *r*.

Considerando um triângulo *ABC* qualquer, inscrito numa circunferência de raio *r*, a partir do vértice *B* podemos encontrar, na circunferência, um ponto diametralmente oposto *D*; ligando *D* a *C*, formamos um novo triângulo *BCD* retângulo em *C*, pois o ângulo B*D*é inscrito numa semicircunferência.

Os ângulos de vértices em *A* e *D* são inscritos na circunferência e determinam o mesmo arco logo têm a mesma medida.

Agora, no triângulo retângulo *BCD*, temos:

de onde

$$\operatorname{sen}\hat{D} = \frac{a}{2r}$$

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{2r}$$

ou seja,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2r$$

Repetindo o raciocínio, para os ângulos de vértices *B* e *C*, teremos as relações:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = 2r \text{ e } \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2r$$

Logo, podemos concluir que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2r$$

Consideremos agora a Lei dos Cossenos, a qual estabelece que, num triângulo ABC, qualquer, valem as seguintes relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\widehat{C}$$

onde *a*, *b*, *c* indicam as medidas dos lados opostos aos ângulos de vértices *A*,*B*,*C*,respectivamente. Vamos provar apenas a primeira das relações e isso será suficiente, pois as três são análogas.

Analisemos as três possibilidades para o ângulo *A* (agudo, obtuso e reto).

a. é um ângulo agudo.

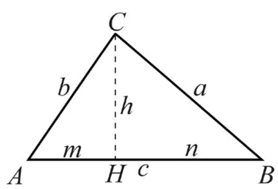


Figura - Triângulo *ABC* em que o ângulo de vértice *A* é agudo.

Seja a altura do triângulo *ABC*, relativa ao lado . O triângulo *AHC* é retângulo e pelo Teorema de Pitágoras,

$$= \ +$$

O triângulo *HBC* também é retângulo e, novamente pelo Teorema de Pitágoras,

$$= \quad +$$

Além disso, $m + n = c$, e, eliminando h nas duas primeiras equações, obtemos:

Eliminando n obtemos:

Portanto, $- \ = \ - \ + 2cm -$

e daí $= + \ - 2cm$.

Mas $(m/b) = \cos$ ou $m = b.\cos$

de onde $= \ + \ - 2bc.\cos$

b. é um ângulo obtuso.

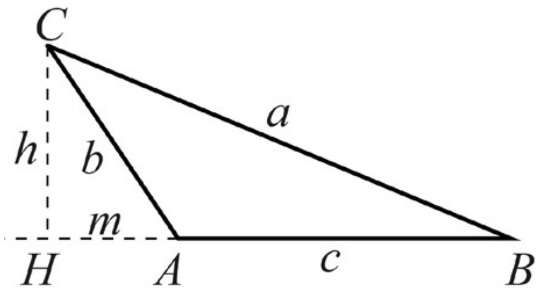


Figura - Triângulo *ABC* em que o ângulo de vértice *A* é obtuso.

Seja a altura do triângulo *ABC*, relativa ao lado . O triângulo *CHA* é retângulo e assim, pelo teorema de Pitágoras,

= +

Como o triângulo *CHB* é retângulo, pelo teorema de Pitágoras,

Eliminando *h*, temos:

- = −

Simplificando a última equação, temos:

= + − 2*cm*.

Mas = cos HC = cos(180°- A) = - cos A, ou seja

Logo,

= +

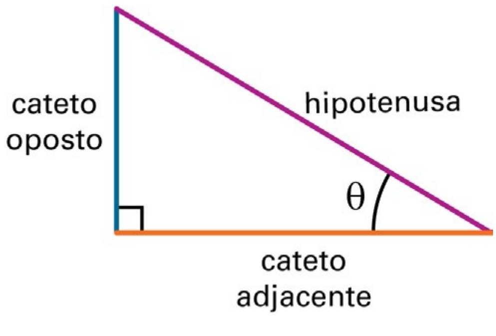
é um ângulo reto.

Este caso é o próprio teorema de Pitágoras, pois cos = 0.

Outras razões trigonométricas

Num triângulo retângulo, sempre no caso de um ângulo agudo, ainda podemos definir outras razões entre as medidas de seus lados, além daquelas que definem o seno e o cosseno.

Definimos a tangente de um ângulo agudo num triângulo retângulo como sendo o quo- ciente do cateto oposto pelo cateto adjacente:



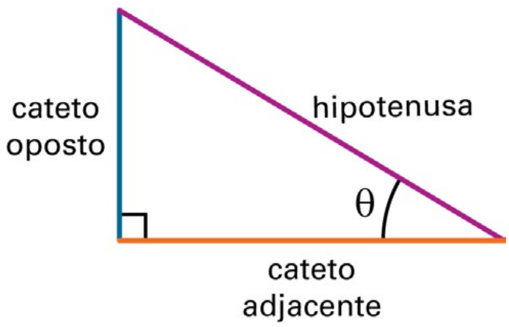
$$tg\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Figura: Tangente de um ângulo agudo do triângulo retângulo.

Temos assim que, num triângulo retângulo, como o da **Figura**, definimos a tangente dos ângulos e , em termos dos catetos do triângulo retângulo:

$$\text{tg}\,\hat{A} = \frac{a}{b} \qquad \text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{a}$$

Definimos também a cotangente de um ângulo agudo num triângulo retângulo como sendo o quociente do cateto adjacente pelo cateto oposto ou o inverso da tangente do mesmo ângulo:



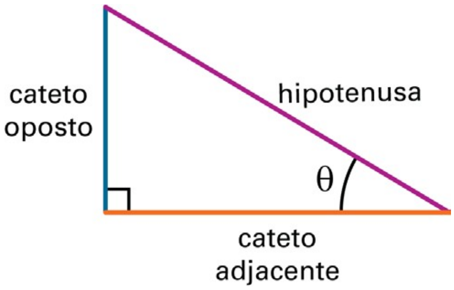
$$\text{cotg}\,\theta = \frac{1}{\text{tg}\,\theta} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$$

Figura: Cotangente de um ângulo agudo do triângulo retângulo.

Temos assim que a cotangente do ângulo e a cotangente do ângulo da Figura são, em termos dos catetos *a* e *b*:

$$\text{cotg}\,\hat{A} = \frac{b}{a} \qquad \text{cotg}\,\hat{B} = \frac{a}{b}$$

Definimos ainda o valor da secante de um ângulo agudo num triângulo retângulo como o inverso do cosseno do mesmo ângulo.Temos, pois, em termos dos lados do triângulo:



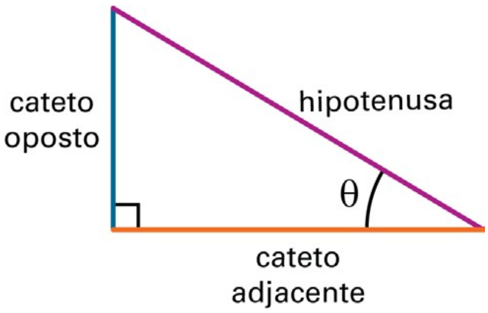
$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$$

Figura - Secante de um ângulo agudo do triângulo retângulo.

Assim, para os ângulos e da Figura, temos:

$$\sec\hat{A} = \frac{c}{b} \qquad \sec\hat{B} = \frac{c}{a}$$

Definimos a cossecante de um ângulo agudo num triângulo retângulo como o inverso do seno do mesmo ângulo:



$$\boxed{\text{cossec}\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}}$$

Figura: Cossecante de um ângulo agudo do triângulo retângulo.

Consequentemente, os valores da cossecante do ângulo e da cossecante do ângulo da **Figura** são dados, em termos dos lados do triângulo

$$\text{cossec}\,\hat{A} = \frac{c}{a} \qquad \boxed{\text{cossec}\,\hat{B} = \frac{c}{b}}$$

Conclui-se que, num triângulo retângulo, podemos definir diferentes valores associados a ângulos agudos, valores esses que são quocientes entre as medidas dos lados do triângulo.

Triangulação: cálculo de distâncias inacessíveis

Medir é comparar. No cotidiano, a medida de distâncias é feita através de uma medida direta, isto é, comparando-se as dimensões de algo com uma unidade padrão. Usualmente, adotamos o **metro** como unidade padrão para medir distâncias. Na astronomia utilizamos outras unidades, as quais serão aqui apresentadas.

Medidas diretas são inviáveis na Astronomia. Por isso, no caso dos objetos localizados fora da Terra as medidas são efetuadas de uma maneira indireta.

Um dos métodos indiretos mais antigos de determinação das distâncias é o uso da **triangu- lação**. Na **Figura** esboçamos o esquema básico do uso da triangulação, para determinação da altura (*h*) do monte. Ele requer a determinação de um ângulo (θ), entre as direções da base e do cume do monte, e da distância (*d*) entre o observador e o monte; θ e *d* podem ser medidos.

O ângulo θ é medido com um instrumento denominado **teodolito**.

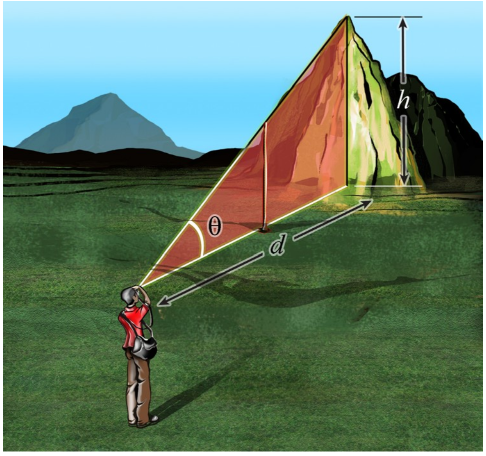


Figura -Determinação da altura do monte por triangulação: $\text{tg}\theta = h/d$ ou $h = d \times \text{tg}\theta$.

Algumas vezes utilizamos a semelhança entre triângulos.

Um dos registros mais antigos de uso desse método indireto é aquele atribuído a Tales de Mileto (625 – 558 a.C.), o qual teria determinado a altura da pirâmide de Gizé a partir da determinação da dimensão da sombra projetada no solo. Tomou o cuidado de efetuar tal medida no exato momento em que o tamanho de sua sombra projetada no solo era igual à sua altura. Nesse momento, o tamanho da sombra da pirâmide era igual à altura da pirâmide.

Na **Figura** está representada a configuração de uma estrela, vista da Terra em duas posições diametralmente opostas no seu movimento de translação e o Sol. A paralaxe estelar é o desvio aparente da estrela em relação às estrelas de fundo. O ângulo de paralaxe é p. As posições aparentes da estrela podem ser registradas em imagens da região do céu, obtidas em épocas diferentes. As paralaxes são diminutas. Ou seja, são medidas em segundos de arco. Por exemplo, a estrela mais próxima do Sol, a Próxima Centauro (e de grande paralaxe, portanto) tem paralaxe de meros 0,77 segundo de arco (2 décimos-milésimo de grau). Estrelas mais distantes têm paralaxes menores ainda.Tendo em vista a dificuldade experimental de distinguir pontos muito próximos, esse método é bastante limitado.

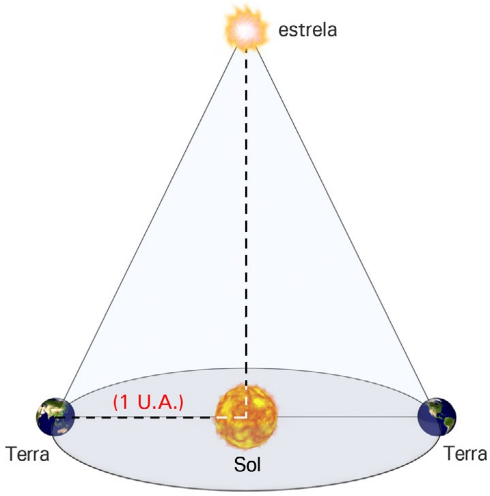


Figura: Paralaxe estelar.

O método da paralaxe trigonométrica introduziu na Astronomia uma nova unidade de comprimento: o **parsec**. Um parsec é equivalente a 3,26 anos-luz ou 206.264 unidades astronômicas, ou ainda 31 trilhões de quilômetros. Nesta unidade, as distâncias a estrelas mais brilhantes visualmente ficam a distâncias entre 1,3 pc (a-Centauri) e 800 pc, excluindo-se evidentemente o Sol.

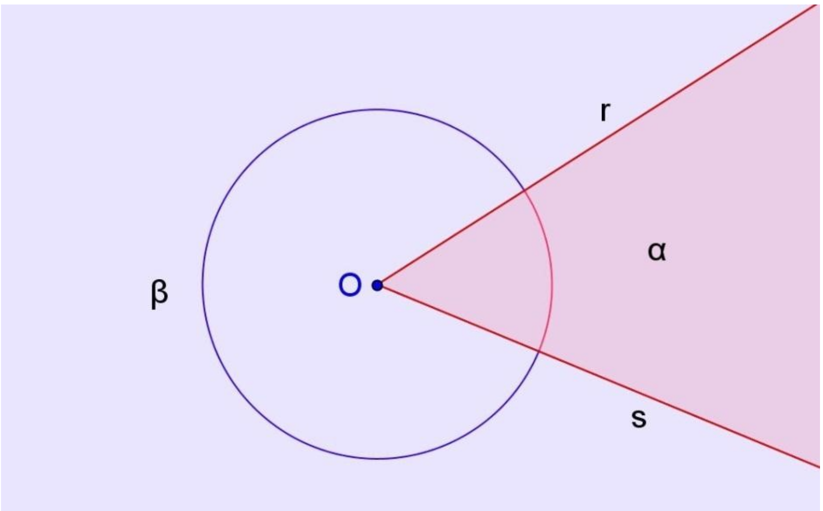
D(parsec) = 1 / p(segundo de arco)

Experimente escrever essas distâncias em km, você vai ter que escrever muitos dígitos! Um parsec = 206265 U.A. Uma unidade astronômica, por sua vez, é equivalente a 1,49 · 108 km.

TRIGONOMETRIA NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Ângulo

Sejam r e s duas semirretas com mesma origem. Definimos ângulo entre elas a cada uma das duas regiões do plano delimitadas por elas, incluindo as duas semirretas. Normalmente utilizamos letras gregas para representar ângulos.

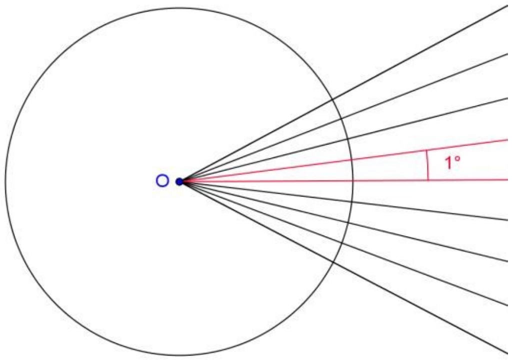


Fica convencionado que o ângulo entre duas semirretas será sempre o menor deles. Logo, na figura, o ângulo entre as semirretas t e s será α. A figura nos mostra também que $\alpha + \beta$ é igual a um ângulo de volta inteira (ou de uma volta).

Unidades de medida de ângulos: Para melhor trabalharmos com os ângulos, devemos saber medi-los, e para tanto, definimos as seguintes unidades:

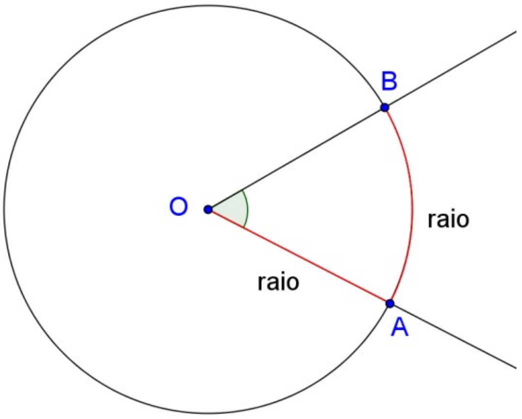
GRAU: Se dividirmos o ângulo de uma volta, independentemente do tamanho de seus lados, em 360 partes iguais, cada uma delas representará $1/360$ desse ângulo e será chamada 1 grau, e sua representação será 1º. O grau é subdividido em 60 minutos (60'), e cada um desses minutos é, por sua vez, subdividido em 60 segundos (60"). Assim, o ângulo de 1º pode ser subdividido em 3600".

Logo, a medida do ângulo de volta inteira é 360º, não importando o quanto a semirreta r for prolongada.

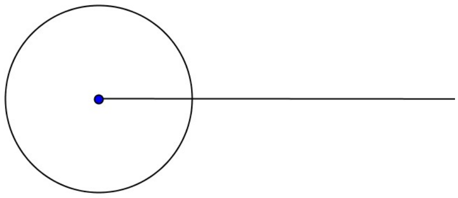
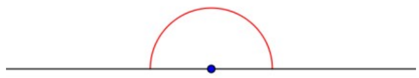
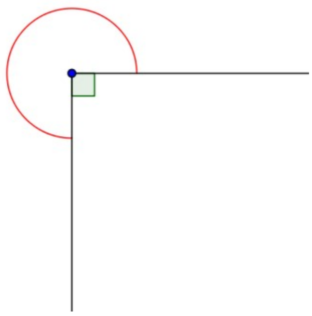


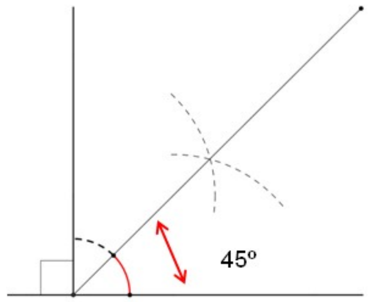
RADIANO: Esta unidade de medida de ângulos, e também de arcos, tem como símbolo $1\,rad$. Dizemos que um arco mede $1\,rad$ se o seu comprimento for igual ao raio da circunferência onde este arco está definido.

$\alpha = arco\ \widehat{AB} = 1\,rad$



Então, a medida do ângulo ou arco de uma volta será igual a $2\pi\,rad$ pois, como já sabemos, o comprimento da circunferência inteira é obtido pela expressão $C = 2\pi r$. Uma terceira um idade de medida de ângulo, o Grado, não será usada neste texto. Podemos agora montar então uma tabela de medidas de alguns ângulos importantes nas que acabamos de definir:

Ângulo	Figura	Graus	Radianos
Volta inteira		360	2π
Meia-volta		180	π
Reto		90	$\frac{\pi}{2}$
3/4 de volta		270	$\frac{3\pi}{2}$

1/8 de volta		45	$\frac{\pi}{4}$

Vemos que assim é possível transformar as medidas de um ângulo de uma unidade para a outra se obedecermos a razão , conforme os exemplos a seguir :

EXEMPLOS:

1) Transforme em radiano o ângulo de 30°.

Devemos utilizar a razão que acabamos de escrever para montar a proporção conveniente: $\frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{30^{\circ}}{\alpha}$, donde podemos ter a equação: $180^{\circ} \cdot \alpha = 30^{\circ} \cdot \pi$, e assim podemos calcular o

valor de :

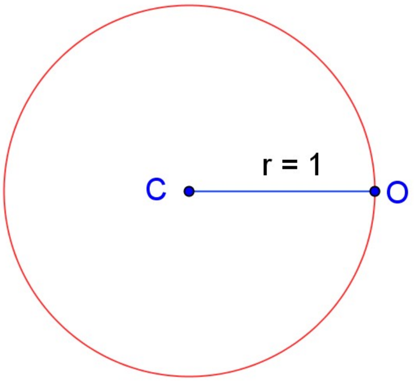
$$\alpha = \frac{30^{\circ}\pi}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{6}\ rad.$$

2) Escreva em graus o ângulo de $\frac{7\pi}{5}\ rad$

A proporção agora será: $\frac{180°}{\pi} = \frac{\alpha}{\frac{7\pi}{5}}$. Então: $\pi \cdot \alpha = 180° \cdot \frac{7\pi}{5}$, e então escreveremos que: $\alpha = \frac{180° \cdot 7\pi}{\pi \cdot 5}$, e finalmente teremos: $\alpha = 252°$

Ciclo Trigonométrico

Ciclo Trigonométrico ou simplesmente Ciclo: Qualquer circunferência cujo raio é considerado unitário, que possua um ponto considerado como Origem e m sentido considerado como positivo (normalmente o anti-horário) é denominada Ciclo Trigonométrico.

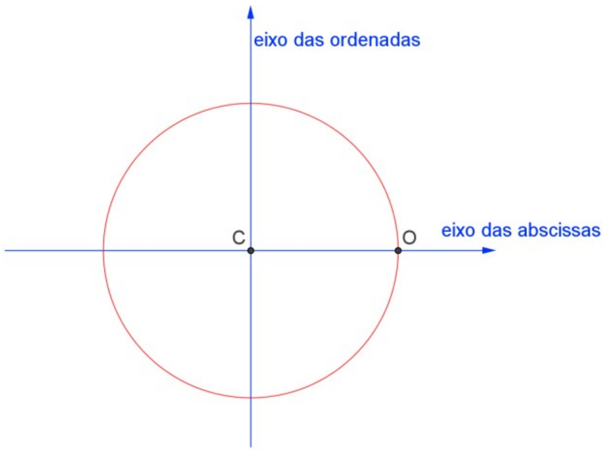


C: Centro

O: Origem

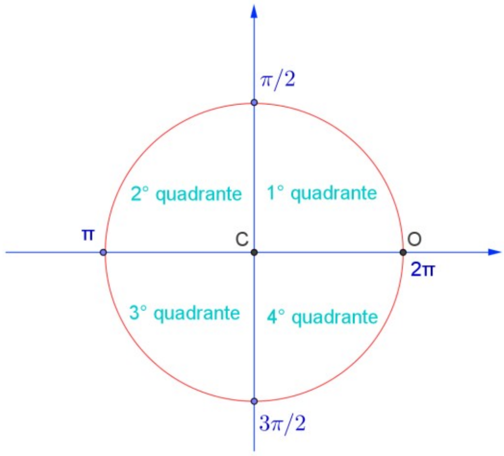
raio r = 1

É costume montarmos um sistema cartesiano ortogonal com origem no Centro do Ciclo e o eixo das abscissas passando pelo ponto O, conforme a figura a seguir:



Este sistema cartesiano, como podemos notar, divide o Ciclo em quatro partes denominadas Quadrantes, numeradas a partir do ponto O e obedecendo o sentido positivo de percurso.

É importante saber que os eixos das abscissas e das ordenadas não fazem parte de nenhum dos Quadrantes. Assim, se um ângulo central α do ciclo está no 1º Quadrante, ele obrigatoriamente será tal que $0° < \alpha < 90°$, ou ainda $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Se ele estiver no 2º Quadrante poderemos afirmar que $90° < \alpha < 180°$ ou $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Se fizer parte do 3º Quadrante deveremos ter $180° < \alpha < 270°$ ou $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, e, finalmente, se α pertencer ao 3º Quadrante, este ângulo será tal que $270° < \alpha < 360°$, ou, em radianos, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.



Porém, um ângulo pode dar mais que uma volta no Ciclo. Para sabermos a que Quadrante pertence um ângulo como este, ou até um ângulo negativo (que se move no sentido horário), deveremos obter sua menor determinação, que vem a ser o que resta dele após retirarmos as voltas inteiras que ele dá no Ciclo. O Quadrante onde esta menor determinação estiver será aquele onde estará o ângulo.

EXEMPLOS:

Obtenha a menor determinação dos seguintes ângulos e o Quadrante ao qual pertencem.

1) 3800º

Se dividirmos 3800º por 360º, obteremos quociente 10 e resto 200º, e isto significa que $3800º = 10 . 360º + 200º$, ou seja: são 10 voltas completas no Ciclo e 200º de menor determinação. Logo, como 200º pertence ao 3º Quadrante, pois $180º < 200º < 270º$, afirmamos que 3800º pertence ao 3º Quadrante.

2) - 4530º

Do mesmo modo que no exemplo anterior, temos: - 4530º = - 12. 360º + (-

210º) = -12. 360º -360º + 360º - 210º = - 13. 360º + 150º.

Isto é: Este ângulo significa 13 voltas completas no sentido horário no Ciclo e 150º de menor determinação, que deve ser sempre maior ou igual a zero. Como 150º está no 2º Quadrante, pois $90° < 150° < 180°$, então o ângulo de $-4530°$ pertence ao 2º Quadrante.

3) $\frac{73\pi}{5}\,rad$

$$\frac{73\pi}{5}rad = \frac{70\pi}{5}rad + \frac{3\pi}{5}rad = 7 \cdot (2\pi\, rad) + \frac{3\pi}{5}rad.$$

Isto quer dizer que este ângulo dá 7 voltas completas no Ciclo e possui menor determinação igual a $\frac{3\pi}{5}rad$, e como sabemos que $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{5} < \pi$, afirmamos que este ângulo faz parte do 2º Quadrante.

4) $-\frac{142\pi}{0}rad$

Podemos perceber com facilidade que:

$$-\frac{142\pi}{9} = -\frac{126\pi}{9} + \left(-\frac{16\pi}{9}\right) = -14\pi - \frac{16\pi}{9} +$$

$$2\pi = 16\pi + \frac{2\pi}{9} = -8 \cdot (2\pi) + \frac{2\pi}{9}$$

Este ângulo, portanto, descreve 8 voltas no Ciclo em sentido horário e sua menor determinação é $\frac{2\pi}{9}$. Como $0 < \frac{2\pi}{9} < \frac{\pi}{2}$, podemos ver que o ângulo inicial está no 1º Quadrante.

OBSERVAÇÃO: É importante perceber que, para que o quociente represente o número inteiro de voltas no Ciclo, ele deve um número par vezes π.

5) $630°$

A divisão por $360°$ nos mostra que $630° = 1 \cdot 360° + 270°$, que significa que este ângulo efetua uma volta inteira no Ciclo no sentido anti-horário e ainda tem uma menor determinação de $270°$. Porém, $270°$ não se encontra em nenhum dos quadrantes, mas sobre o eixo y. Logo, $630°$ está sobre o eixo y, e não pertence a nenhum quadrante.

ARCOS CONGRUENTES

Se dois arcos de um mesmo Ciclo Trigonométrico possuírem mesmas Origens e mesmas Extremidades, eles são chamados congruentes, não importando o número de voltas que eles deem no Ciclo.

Deste modo, todos os arcos ou ângulos escritos na forma com medidas em radianos, ou ainda $\alpha = m + k \cdot 360°$ com medidas em graus, são congruentes a um dado arco de medida m, em radianos, com $0\,rad < m < 2\pi\,rad$, ou $0° < m < 360°$, se em graus.

EXPRESSÕES GERAIS DE ARCOS

Imagine um hexágono regular inscrito no Ciclo, com um de seus vértices coincidindo com a Origem do Ciclo. Seus vértices A,B,C,D,E,F nessa ordem dividirão esse Ciclo Trigonométrico em seis arcos congruentes, cada arco definindo um ângulo central de $60°$ ou $\frac{\pi}{3} rad$.

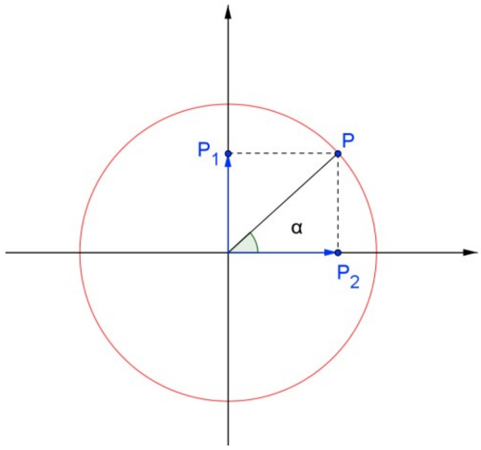
Podemos perceber que os ângulos na forma $\alpha = 60°k$ ou $\alpha = k \cdot \frac{\pi}{3}$, onde $k \in \mathbb{Z}$, serão precisamente aqueles que determinarão os vértices do hexágono citado.

Se, em vez de um hexágono, tivermos um octógono com um dos vértices coincidindo com a Origem do Ciclo, os 8 ângulos centrais que determinam as posições dos vértices deverão obedecer a forma $\alpha = 45°k$ ou $\alpha = k \cdot \frac{\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

$$10, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots$$
$$9, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots$$

O ângulo expresso pela igualdade $\alpha = 30° + 90°$ onde $k \in \mathbb{Z}$, como podemos perceber, está no Primeiro Quadrante se $k = \cdots - 8, -4, 0, 4, 8, 12, \cdots$. Ele estará no Segundo Quadrante se $k = \cdots - 7, -3, 1, 5, 9, 13, \cdots$. Ele pertencerá ao Terceiro Quadrante se $k = \cdots -$, e, finalmente, ele fará parte do Quarto Quadrante se $k = \cdots -$

Dado um ponto $P(p_1, p_2)$ no Ciclo Trigonométrico, fica determinado em consequência um único ângulo central α para o qual definimos as funções seno e cosseno do seguinte modo:

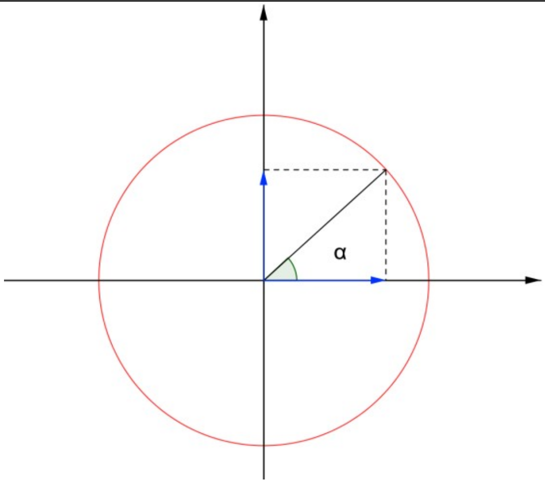
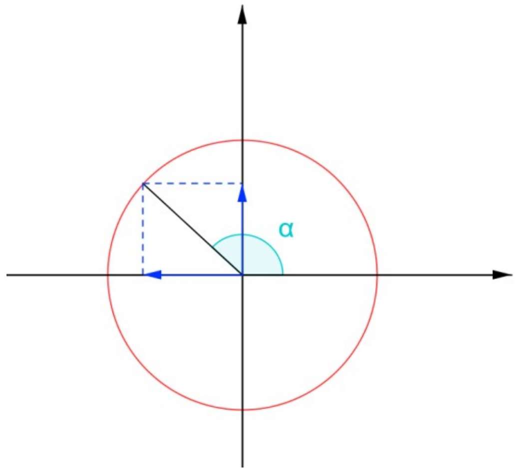
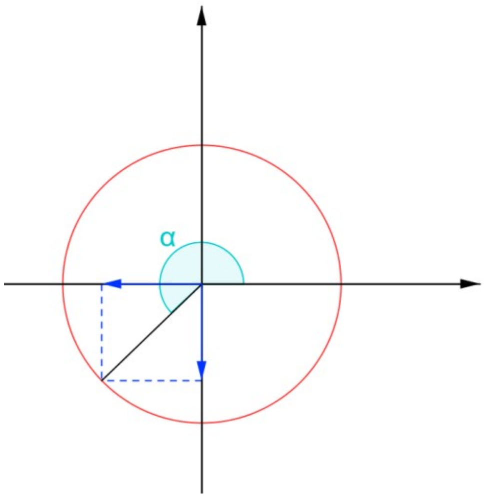
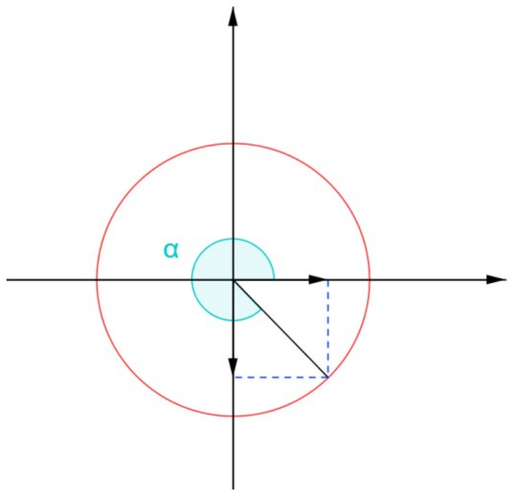


SENO do ângulo α é a ordenada de P, ou seja: $sen\ \alpha = p_1$.

COSSENO do ângulo α é a abscissa de P: $\cos\alpha = p_2$

Analisando as figuras a seguir, poderemos perceber que se o ângulo estiver no 1º Quadrante, tanto o seu seno como o cosseno serão positivos. Porém, se o ângulo estiver no 2º Quadrante, o seno continuará positivo, mas o cosseno será negativo. Se no 3º Quadrante, ambos, seno e cosseno serão negativos, e, por fim, se o ângulo pertencer ao 4º, o seno será negativo e o cosseno, positivo.

1º Quadrante	2º Quadrante

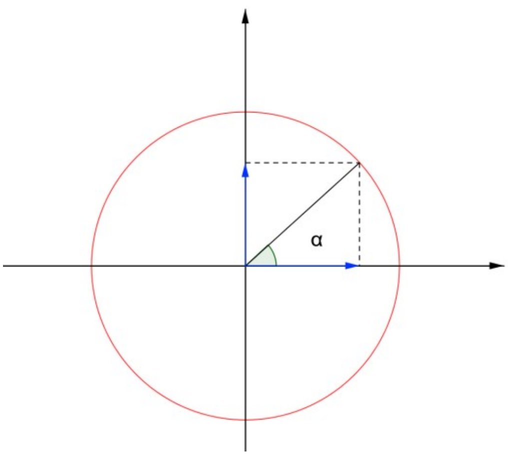
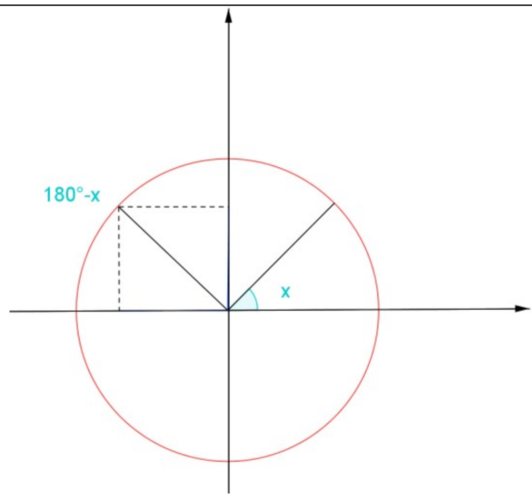
	
$sen\ \alpha > 0$ $\cos \alpha > 0$	$sen\ \alpha > 0$ $\cos \alpha < 0$
3º Quadrante	4º Quadrante
	
$sen\ \alpha < 0$ $\cos \alpha < 0$	$sen\ \alpha < 0$ $\cos \alpha > 0$

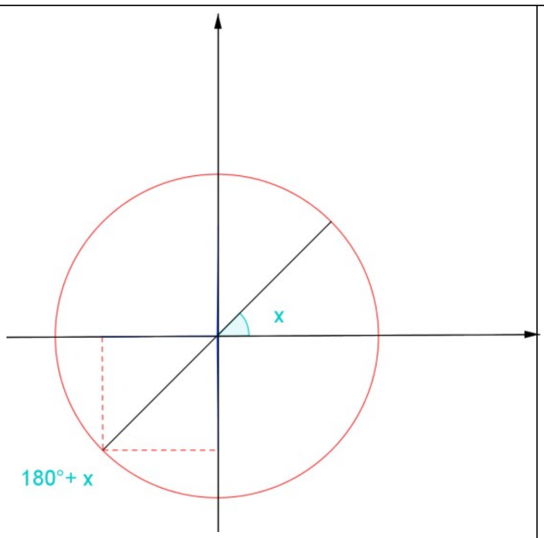
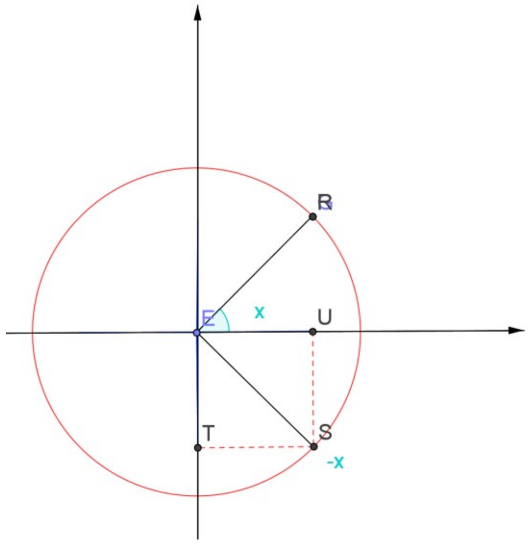
Estas figuras nos permitem, com um pequeno esforço, perceber que a tabela a seguir é verdadeira:

Ângulo	0° (0 rad)	90° ($\frac{\pi}{2} rad$)	180° ($\pi\ rad$)	270° ($\frac{3\pi}{2} rad$)	360° ($2\pi\ rad$)
Seno	0	1	0	-1	0
Cosseno	1	0	-1	0	1

Se supusermos que um ângulo x está no 1º Quadrante, então o ângulo $\pi - x$ estará no 2º, $\pi + x$ pertencerá ao 3º , e $2\pi - x$ ou simplesmente $-x$ estará no 4º Quadrante.

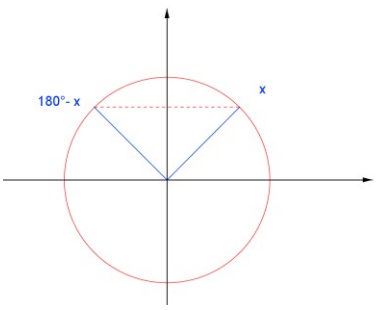
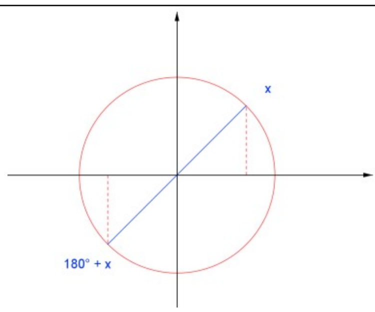
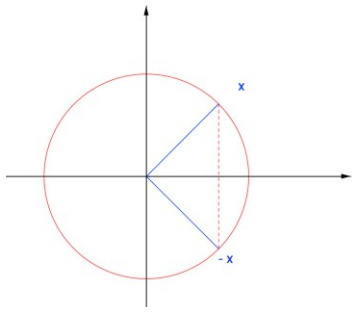
Por isso, poderemos escrever que : $sen\, x > 0$, $\cos x > 0$, $sen\,(\pi - x) > 0$, $sen\,(\pi + x) < 0$, $\cos(\pi + x) < 0$, $sen\,(-x) < 0$ e $\cos(-x) > 0$. Verifique as próximas figuras:

	
$sen\, x > 0$ $\cos x > 0$	$sen(180° - x) > 0$ $\cos(180° - x) < 0$

	
$sen(180° + x) < 0$ $cos(180° + x) < 0$	$sen\ (-x) < 0$ $\cos(-x) > 0$

Podemos ainda perceber que os vários valores de seno e cosseno nos diversos quadrantes podem se relacionar com valores do 1º Quadrante que já estão tabelados.

Assim, se analisarmos as figuras a seguir, poderemos estabelecer o seguinte:

		
$sen\ (180° - x) = sen\ x$ $\cos(180° - x) = \ -\cos x$	$sen(180° + x) = -senx$ $\cos(180° + x) = -\cos x$	$sen\ (-x) = -sen\ x$ $\cos(-x) = \cos x$

EXEMPLOS:

1) Calcular os valores de seno e cosseno pedidos a seguir:

a) $sen\ 207° = sen(180° + 27°) = -sen27° = -0{,}454$

b) $\cos 284° = \cos(360° - 76°) = cos76° = 0{,}242$

c) $\cos(-34°) = \cos 34° = 0{,}829$

d) $sen\ \left(\frac{5\pi}{3}\right) = sen\ \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -sen\ \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $sen\ 3752° = sen\ 152° = sen\ (180° - 28°) = sen\ 28° = 0{,}469$

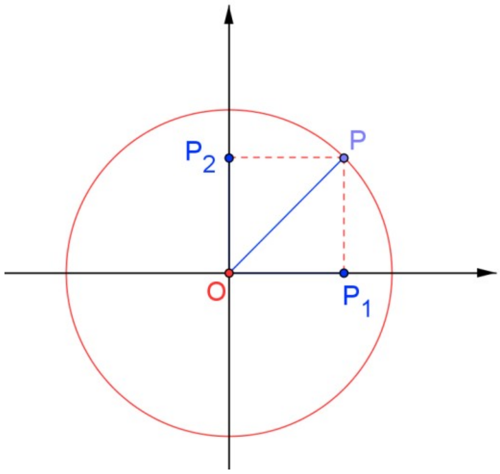
2) Simplificar as expressões:

a) $E = sen\ (x + 540°) - 2\cos(1800° - x) + sen\ (x - 900°)$

b) $E = \cos(x + 6\pi) - 3sen\ (8\pi - x) + \cos(x - 5\pi)$

FUNÇÕES SENO E COSSENO DE UM ARCO

Seja α um número real que representa a medida de um ângulo central no Ciclo Trigonométrico medido a partir da Origem, e que assim determinará um único ponto $P(p_1, p_2)$, conforme a figura.



Com este pressuposto, definimos as funções seno e cosseno de um ângulo do seguinte modo, porém utilizando a letra x para a variável independente que representa o ângulo, e y, ou f(x), para as funções. O eixo das abscissas pode ser chamado de eixo dos cossenos e o das ordenadas de eixo dos senos.

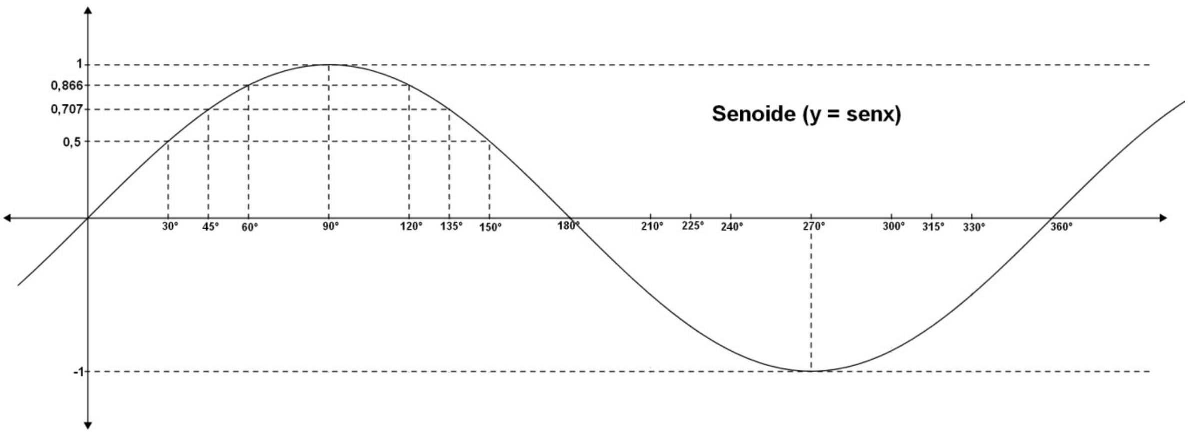
Assim temos as funções y = sen x e y = cos x que associam a cada valor do ângulo x o seu seno ou o seu cosseno, respectivamente. As duas funções de R em R, para serem bem entendidas devem ter suas representações gráficas desenhadas, e, para tanto, pode ser conveniente montar a tabela a seguir, com os ângulos em graus:

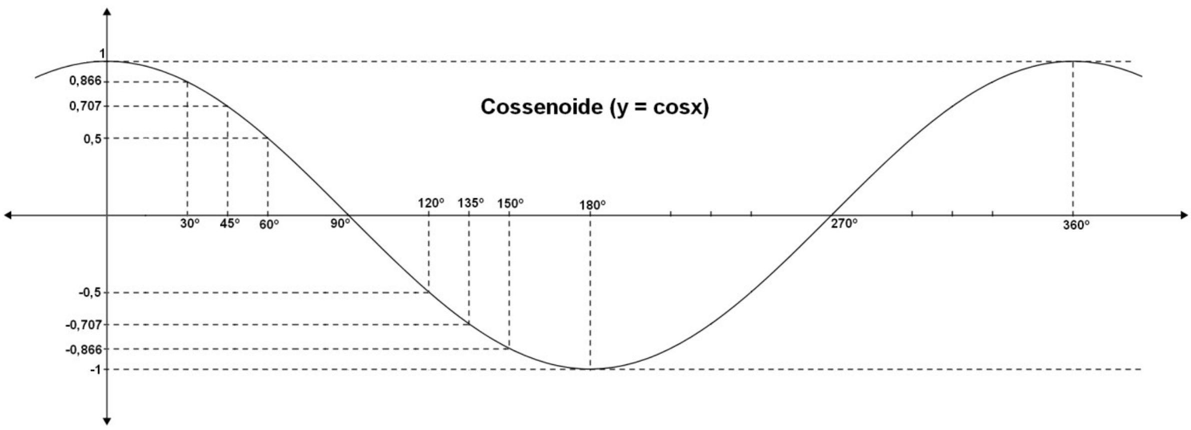
α	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Os valores aproximados dos apresentados na tabela são:

$\frac{1}{2} = 0{,}500; \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707; \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$.

Se representarmos graficamente os pontos dessa tabela, obteremos as seguintes representações gráficas para as funções $y = sen\, x$ e $y = \cos x$:





Observando os dois gráficos que acabamos de traçar, vemos que ambas as funções variam de -1 até +1, o que significa que as suas Imagens são iguais ao intervalo fechado $[-1,1]$. Podemos ainda notar que os gráficos se repetem, formando uma curva que sobe e desce indefinidamente. Tais curvas e suas funções, que se repetem deste modo, são chamadas Periódicas, e seu Período é igual à diferença entre duas abscissas mais próximas para as quais as citadas funções possuem o mesmo valor e a mesma inclinação.

No caso da função $y = sen\ x$, podemos calcular o Período como sendo igual à diferença $P = 360° - 0°\ 360°$, ou ainda $P = 2\pi - 0 = 2\pi$. Vemos também que a função $y = \cos x$ apresenta o mesmo período. É possível perceber ainda que estas funções existem para qualquer valor real da variável x, e isto significa que o seu Domínio é R, conjunto dos Números Reais.

EXEMPLOS:

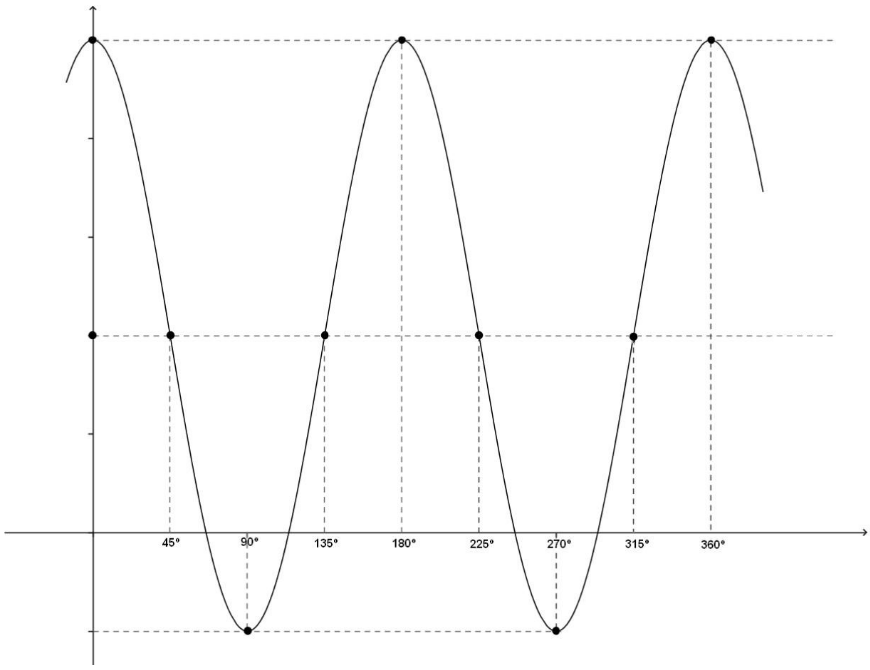
Representar graficamente as funções, e informar Domínio, Imagem e Período:

1) $f(x) = 2 + 3.cos\ 2x$

a) Tabela:

x	$2x$	$cos\ 2x$	$3.cos\ 2x$	$2 + 3.cos\ 2x$
0º	0º	1	3	5
45º	90º	0	0	2
90º	180º	-1	-3	-1
135º	270º	0	0	2
180º	360	1	3	5
270°	540º	-1	-3	-1
360º	720º	1	3	5

b) Gráfico:



c) Se observarmos o gráfico veremos que:

$Dom\left(f(x)\right) = \mathbb{R}$, $Im\left(f(x)\right) = [-1{,}5]$, Período = 180° ou $\pi\, rad$

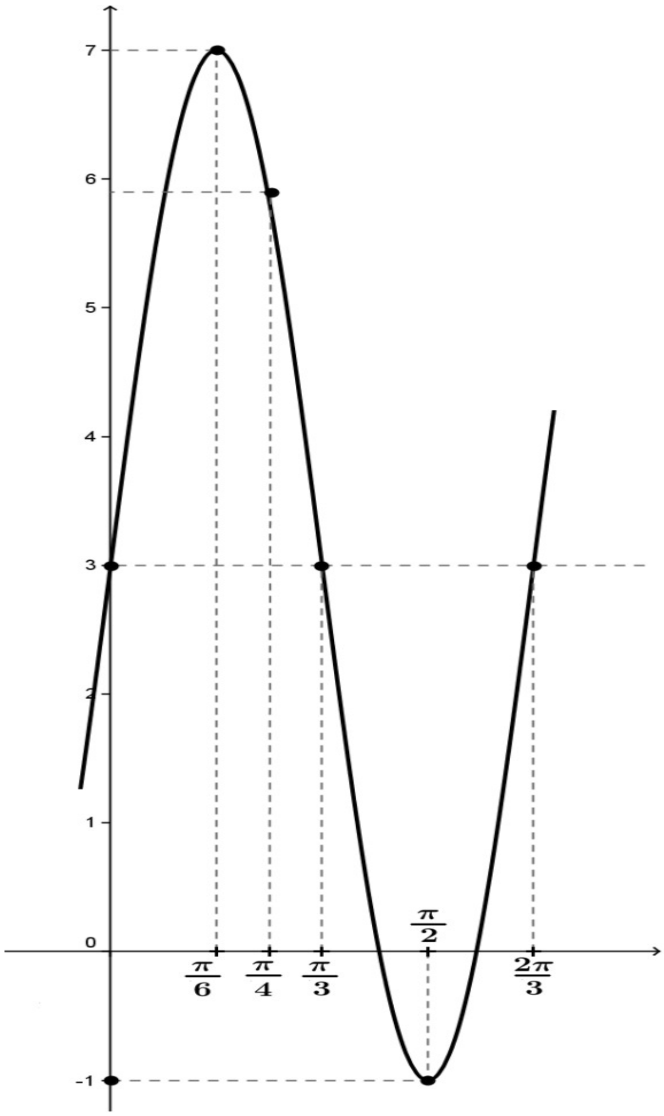
$y = 3 - 4.sen\,(3x - \pi)$

a) Tabela:

x	$3x$	$3x - \pi$	$sen(3x - \pi)$	-4.sen(3x-π)	3-4sen(3x-π)
0	0	-π	0	0	3
/6	/2	- /2	-1	4	7
π/4	3π/4	-π/4	-0,760	3,040	6,040
π/3	π	0	0	0	3
π/2	3π/2	π/2	1	-4	-1

2π/3	2π	π	0	0	3

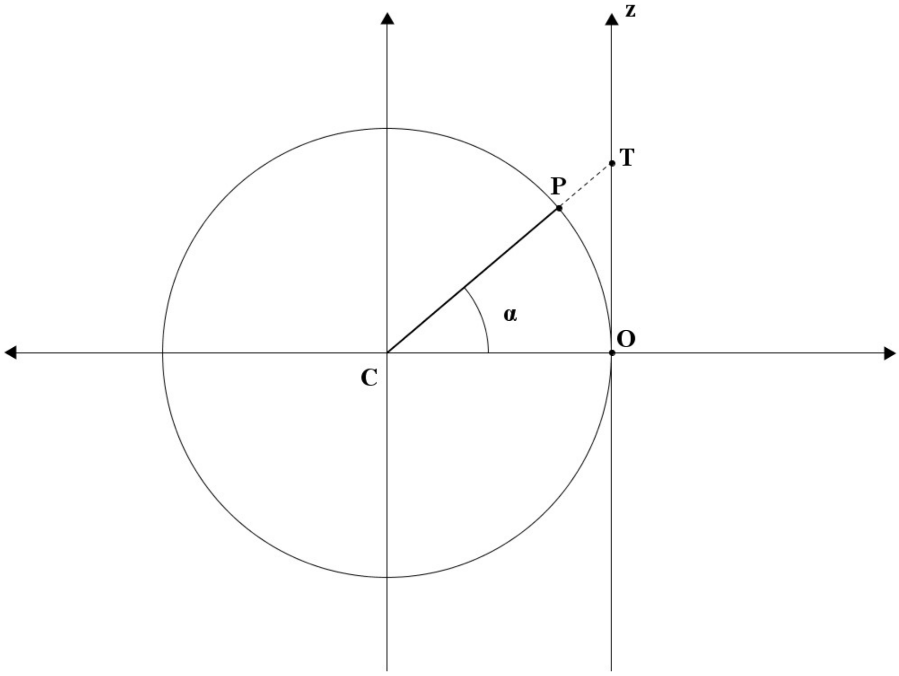
b) Gráfico:



c) $Dom\left(f(x)\right) = \mathbb{R}$; $Im\left(f(x)\right) = [-1,7]$; Período = $\frac{2\pi}{3}\ rad$ ou 120°

FUNÇÃO TANGENTE DE UM ARCO

Pela Origem de um Ciclo Trigonométrico, tracemos um eixo vertical orientado de baixo para cima, que chamaremos de eixo z, e prolonguemos o raio que determina o arco $\widehat{OP}$ até encontrar este eixo vertical no Ponto T, conforme a figura:

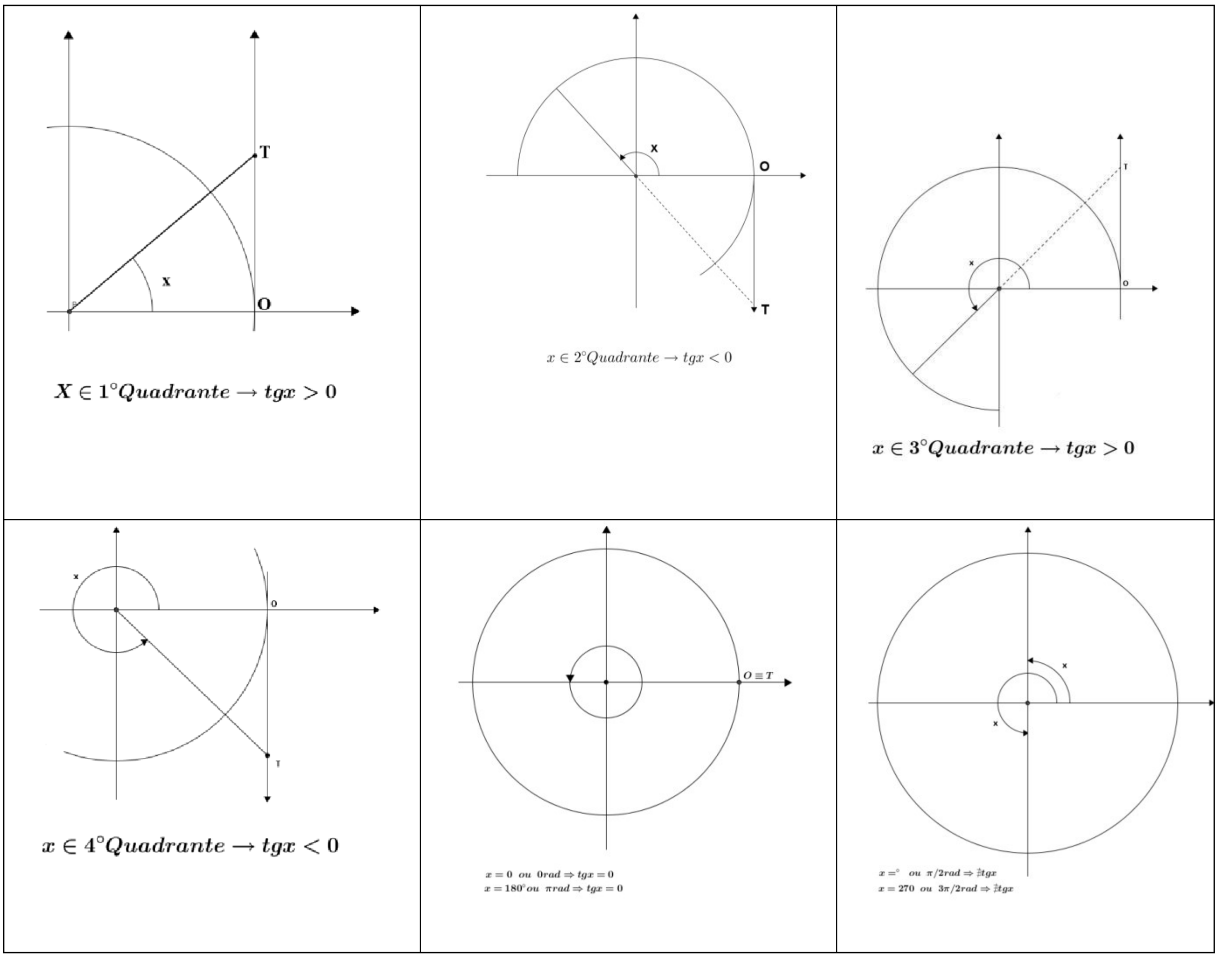


Ao segmento $\overline{OT}$, orientado de O para T, damos o nome de tangente do ângulo , e utilizamos o símbolo: $tg\ \alpha = OT$.

O eixo z é chamado de eixo das tangentes.

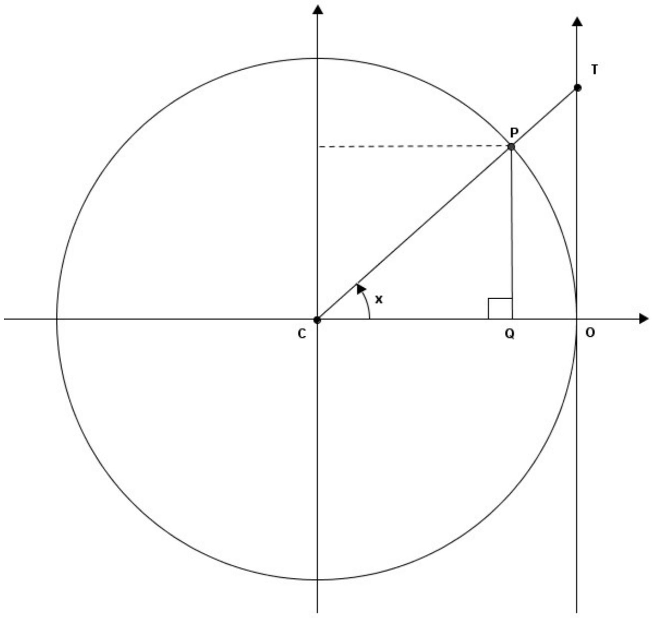
Mais uma vez, se observarmos a figura, perceberemos que se $= 0$, então $tg\ \alpha = 0$, pois os pontos O e T coincidirão. Porém, se $= 90°$, então o raio que determina este ângulo será vertical e, em consequência, não cruzará o eixo z, também vertical. Dizemos então que não existe $tg\ 90°$. Analogamente, não existirá também $tg\ 270°$.

As figuras a seguir nos mostram os sinais da função $y = tg\ x$ nos vários quadrantes:



Você já sabe que a igualdade $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$ é verdadeira quando x é ângulo agudo de um triângulo retângulo. Vamos agora demonstrar que tal propriedade também vale no Ciclo Tigonométrico:

Observemos a figura a seguir, onde temos o ângulo x no Ciclo Trigonométrico e os triângulos ΔCQP e ΔCOT retângulos respectivamente em Q e em O.



Como o ângulo x é interno dos dois triângulos, podemos afirmar que, pelo caso AA (ângulo, ângulo) de semelhança de triângulos, estes dois triângulos são semelhantes, e então podemos escrever as seguintes proporções e, em seguida, usar as definições de $sen\,x$, $\cos x$ e $tg\,x$ no Ciclo Trigonométrico que já conhecemos:

$$\frac{CO}{CQ} = \frac{OT}{QP} = \frac{CT}{CP} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{tg\,x}{sen\,x} = \frac{CT}{1} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{tg\,x}{sen\,x} \Rightarrow tg\,x = \frac{sen\,x}{\cos x}$$

Esta propriedade nos mostra que, para que exista $tg\,x$ é necessário que $\cos x$ não seja nulo, ou ainda que x seja diferente dos ângulos de $90°$ e $270°$, ou ainda $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}\ rad$.

Desta forma, justificamos de dois modos, algebricamente e geometricamente, a não existência da tangente dos ângulos de $90°$ e $270°$.

Se utilizarmos esta relação e a tabela de valores de seno e cosseno de um ângulo que construímos na página 14, poderemos calcular os valores das tangentes dos ângulos notáveis.

Assim, temos:

$$tg\ 30° = \frac{sen\ 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\ 60° = \frac{sen\ 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

$$tg\ 45° = \frac{sen\ 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 1$$

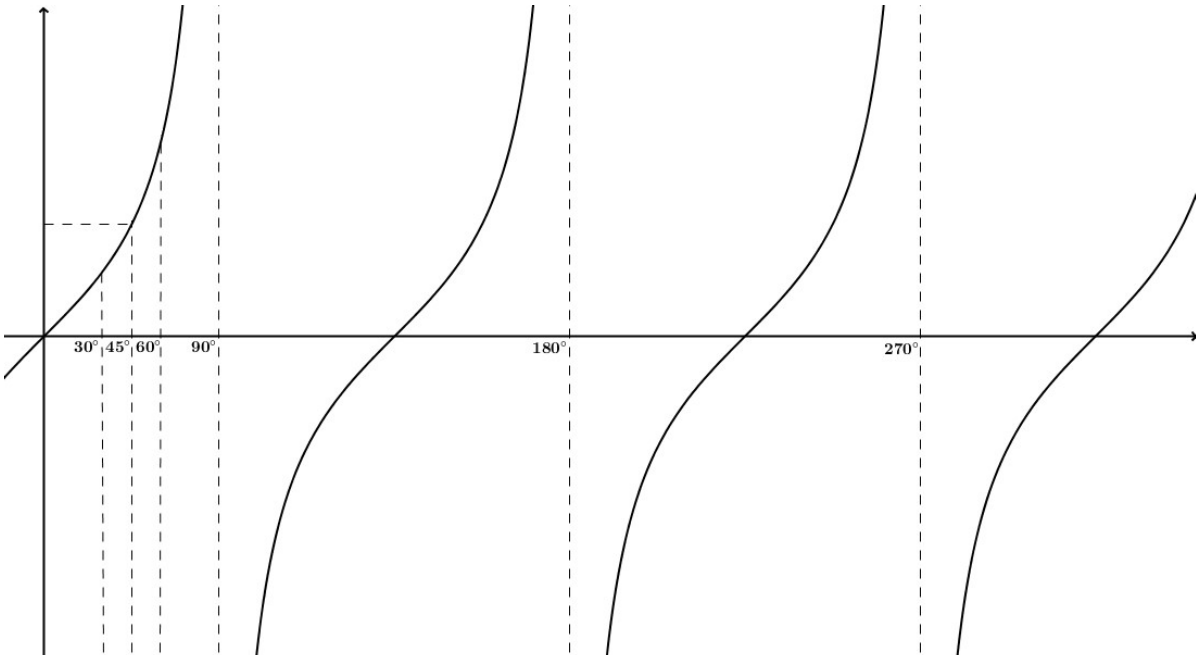
$$tg\ 135° = \frac{sen\ 135°}{\cos 135°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

Como exercício, deduza os valores das tangentes da tabela a seguir:

Ângulo	Tangente
0°	0
30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	1
60°	$\sqrt{3}$
90°	$\nexists$
120°	$-\sqrt{3}$
135°	-1
150°	

	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	0
210°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225°	1
240°	$\sqrt{3}$
270°	$\nexists$
300°	$-\sqrt{3}$
315°	-1
330°	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
360°	0

Esta tábua de valores nos dá condições de traçar o gráfico de função $f(x) = tg\ x$:



Analisando a representação gráfica que acabamos de elaborar, podemos afirmar que o período da função tangente é π radianos ou $180°$, sua Imagem é todo o conjunto R e seu domínio é o conjunto R do qual retiramos os ângulos $90°$, $270°$, $450°$, $630°$, etc., além dos valores negativos $-90°$, $-270°$, etc. Estes ângulos podem ser descritos por uma única expressão, que é $90° + 180°.k$, ou $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, onde k é um número inteiro. Assim, o domínio da função $y = tg\ x$ é dado por: $Dom(tg\ x) = \mathbb{R} - \{x/\ x = 90° + 180° \cdot k\}$ ou $\mathbb{R} - \left\{x\ /x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Esta função apresenta em seu gráfico infinitos ramos, e ela é sempre crescente, ao contrário das funções seno e cosseno que ora são crescentes, ora decrescentes.

ADIÇÃO DE ARCOS

Você já sabe que $sen\,30° = \frac{1}{2}$, $sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen\,90° = 1$. Então é imediato perceber que $sen\,30° + sen\,60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \neq 1 = sen\,90°$. Ou seja, se somarmos dois arcos os seus senos não se somam, e, do mesmo modo podemos perceber que seus cossenos e suas tangentes também não se somarão.

Para tais cálculos precisamos desenvolver algumas fórmulas próprias:

$$cos\,(a + b) = cos\,a\,.cos\,b - sen\,a\,.sen\,b$$

$$sen\,(a + b) = sen\,a\,.cos\,b + sen\,b\,.cos\,a$$

$$tg(a + b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tga \cdot tg\,b}$$

DEMONSTRAÇÕES

Para a demonstração da primeira fórmula, cosseno de uma soma, são necessários conceitos que serão desenvolvidos futuramente em Geometria Analítica, e, por isso, consideraremos ser ela verdadeira.

Já a fórmula do seno de uma soma pode ser demonstrada com a utilização da anterior:

$$sen(a+b) = \cos\big(90° - (a+b)\big) = \cos((90° - a) - b)$$

$$= \cos\,(90° - a) \cdot \cos\,(-b) - sen\,(90° - a) \cdot sen(-b)$$

$$= sen\ a \cdot \cos\ b - \cos\ a \cdot (-senb) = sen\ a \cdot \cos\ b + sen\ b \cdot \cos\ a$$

A formula da tangente utiliza a já conhecida igualdade $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$ com $cos\ x$ não nulo:

$$tg\,(a+b) = \frac{sen\,(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{sen\ a{\cdot}\cos b + sen\ b{\cdot}\cos a}{\cos a{\cdot}\cos b + sen\ a{\cdot}sen\ b}.$$

Se dividirmos o numerador e o denominador desta última fração por $cosa.cosb$ (não nulo) , obteremos :

$$tg\,(a+b) = \frac{\frac{sen\ a\cdot\cos b + sen\ b\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b}}{\frac{\cos a\cdot\cos b - sen\ a\cdot sen\ b}{\cos a\cdot\cos b}} = \frac{\frac{sen\ a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b} + \frac{sen\ b\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b}}{\frac{\cos a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b} - \frac{sen\ a\cdot sen\ b}{\cos a\cdot cosb}} = \frac{tg\ a + tg\ b}{1 - tg\ a\cdot tg\ b},$$

Com o denominador diferente de zero.

Conhecidas tais fórmulas, podemos deduzir as seguintes:

a)

$\cos(a-b)$, que já foi usada para demonstrar a fórmula $sen\,(a+b)$, pode ser assim obtida: $\cos(a-b) = \cos\big(a + (-b)\big) = \cos a \cdot \cos(-b) - sen\ a \cdot sen\,(-b) =$

$\cos a \cdot \cos b - sen\ a \cdot (-sen\ b) = \cos a \cdot cosb + sen\ a \cdot sen\ b$

b)

$sen\ (a-b) = sen\ \big(a+(-b)\big) = sen\ a \cdot \cos(-b) + sen\ (-b) \cdot \cos a = sen\ a \cdot$

$\cos b + (-sen\ b) \cdot \cos a = sen\ a \cdot \cos b - sen\ b \cdot \cos a$

c)

$tg(a-b) = tg\big(a+(-b)\big) = \frac{tg\ a + tg\ (-b)}{1 - tg\ a \cdot tg\ (-b)} = \frac{tg\ a + (-tg b)}{1 - tg\ a \cdot (-tg\ b)} = \frac{tg\ a - tg\ b}{1 + tg\ a \cdot tg\ b},$

Supondo o denominador não nulo.

APLICAÇÃO

DUPLICAÇÃO DE UM ARCO

As fórmulas de adição de dois arcos podem ainda ser úteis na sua duplicação. Vejamos:

a) $\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - sen\ a \cdot sen\ a = cos^2 a - sen^2 a$

Como $sen^2 a + cos^2 a = 1$, a última expressão ainda pode ser melhorada para: $cos^2 a =$

$sen^2 a = cos^2 a - (1 - cos^2 a) = cos^2 a - 1 + cos^2 a = 2 \cdot cos^2 a - 1$ ou ainda:

$cos^2 a -$ $sen^2 a = 1 - sen^2 a - sen^2 a = 1 - 2 \cdot sen^2 a$

.

Isto nos mostrou que a fórmula de cos 2a pode ter até três apresentações.

b)

$sen\ 2a = sen\ (a + a) = sen\ a\ \cdot \cos a = 2 \cdot sen\ a\ \cdot \cos a$

c)

$tg\ 2a = tg(a + a) = \frac{tg\ a + tg\ a}{1 - tg\ a \cdot tg\ a} = \frac{2 \cdot tg\ a}{1 - tg^2 a}$

EXEMPLOS:

Obtenha os seguintes valores:

1)

$sen\ 75° = sen\ (30° + 45°) = sen\ 30° \cdot \cos 45° + sen\ 45° \cdot \cos 30° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2)

$\cos 285° = \cos 15° = \cos(60° - 45°) = \cos 60° \cdot \cos 45° + sen\ 60° \cdot sen\ 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

3)

$$tg\,\frac{7\pi}{3} = \left(tg 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{tg\ 2\pi + tg\frac{\pi}{3}}{1 + tg 2\pi \cdot tg\,\frac{\pi}{3}} = \frac{0+\sqrt{3}}{1+0\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

APLICAÇÃO

ARCO METADE

Já sabemos que $cos\ 2a\ =\ 2.cos^{2a}$-1=1-2.sen²a.Se fizermos $2a\ =\ x$, teremos:

$\cos x = 2 \cdot cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, e ainda:

$\cos x = 1 - 2 \cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, e ainda:

$\cos x = 1 - 2 \cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow sen\ \left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, e, além disso:

$tg\ \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

Nestas fórmulas, o sinal “ ” será substituído por “+” ou por “-”, quando for conhecido o quadrante onde estamos trabalhando.

EXEMPLOS:

Calcular o valor de:

a) $sen\ 15° = sen\ \left(\frac{30°}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-cos30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

b) $\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

c)

$$tg\left(\frac{3\pi}{8}\right) = tg\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{1+cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{4-2}{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

Esta última expressão deve ter o seu denominador racionalizado ainda mais uma vez, e teremos:

$$tg\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4-2} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}{2} = 1+\sqrt{2}$$

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Dizemos que uma equação é trigonométrica se sua variável for um ângulo do qual desejamos uma função trigonométrica.

Assim, as equações:

$$2 - 3\,sen\,(2x + 90º) = \frac{1}{2}\ \text{, e } 3.tg\,x = -1$$

são trigonométricas, porém a equação $2x - 7\,cos\,45° = 0$ não é.

A resolução de uma destas equações envolve o conhecimento da Imagem e do Período das funções que dela fazem parte.

EXEMPLOS:

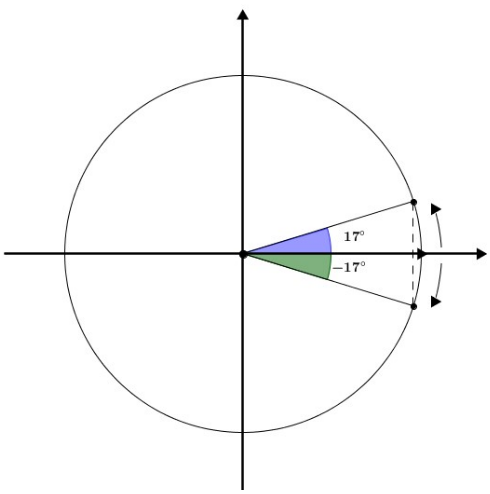
Resolva as equações em R:

1) $\text{sen x} = 3$

Como sabemos, a Imagem da função $y = sen\, x$ é $[-1{,}1]$. Ou seja, 3 não faz parte dela, então esta equação é tal que sua solução é impossível, e teremos: .

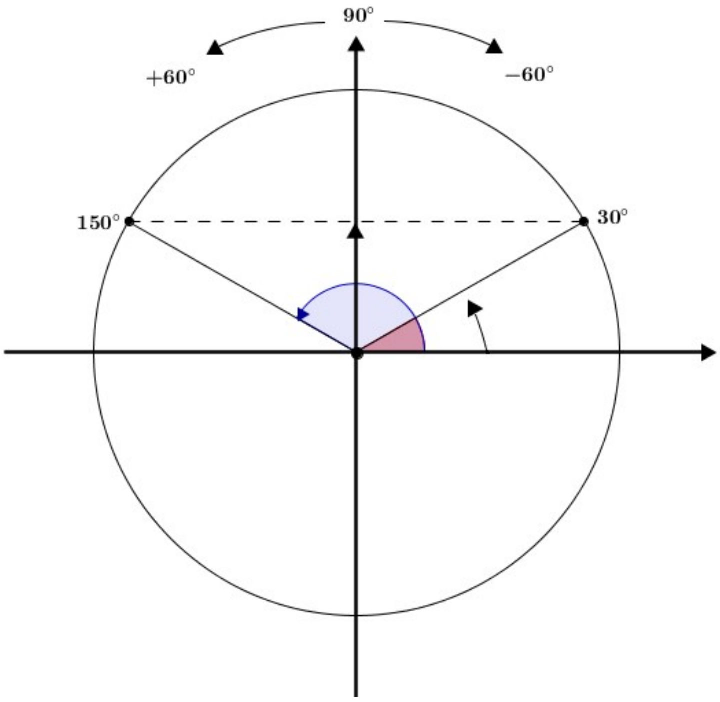
2) $\cos x \ = \ \cos 17°$

De acordo com o estudo que fizemos da função cosseno, podemos dizer que a solução desta equação é $x = \pm 17° + k \cdot 360°$, pois, tanto $17°$ como $-17°$ têm o mesmo cosseno, e o período desta função, em graus, é $360°$. Portanto, $V = \{\pm 17° + 360° \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$.



3) $sen\, x = \frac{1}{2}$

Sabemos que $sen\, 30° = \frac{1}{2}$, porém há outro ângulo que, na 1ª volta tem o mesmo seno, e este ângulo é $180° \ - 30° \ = 150°$. Além disso, há ângulos nas demais voltas que são também solução da equação.



Podemos representar todas estas soluções da seguinte maneira: $x = 30° + k \cdot 360°$ e $x = 150° + k \cdot 360°$, com , pois, como você já sabe, o Período da função seno é $360°$.

Então, o Conjunto Verdade da equação será:

$$V = \{30° + 360° \cdot k, 150° + 360° \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Esta resposta ainda pode ser escrita do seguinte modo:

$$V = \{90° \pm 60° + 360° \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

4) $2.sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

Esta equação nos permite escrever que: $sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}+2k\cdot\pi$, com $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$.

Logo, $V=\left\{\frac{3\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi, com\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

5) $3tg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$

De imediato, temos: $tg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Logo, podemos escrever imediatamente: $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$, e, assim, $2x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$. Assim, poderemos afirmar que $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$, e concluir que $V=\left\{-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6) $sen\,x-\sqrt{3}\cdot\cos x=0$, com $x\in[-2\pi,\ 2\pi]$.

Da equação, temos: $sen\,x=\sqrt{3}\cdot\cos x\Rightarrow\frac{sen\,x}{\cos x}=\sqrt{3}$, com $cos\,x$ não nulo. Então, $tg\,x=\sqrt{3}$. Logo, $x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi, k\in\mathbb{Z}$. Porém, a solução está restrita ao intervalo dado, portanto o conjunto solução da equação será: $V=\left\{-\frac{\pi}{6},-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right\}$.

7) $sen\,2x - sen\,x = 0$

Se aplicarmos a fórmula do seno do arco duplo, a equação passará a ser a seguinte:

$2 \cdot sen\ x \cdot \cos x - sen\ x = 0 \Longrightarrow sen\ x \cdot (2 \cdot \cos x - 1) = 0 \Longrightarrow$

$$\begin{cases} senx = 0 \Longrightarrow x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2 \cdot \cos x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Logo, $V = \left\{k\pi \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Esta mesma equação poderia também ser resolvida do seguinte modo:

$$sen\ 2x - sen\ x = 0 \Rightarrow sen\ 2x = sen\ x \Rightarrow \begin{cases} 2x + x + 2k\pi \\ 2x = \pi - x + 2k\pi = -x + (2k+1) \cdot \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k \cdot \pi, com\ k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1) \cdot \pi \Rightarrow x = (2k+1) \cdot \dfrac{\pi}{3} com\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Então, temos: $V = \left\{2k \cdot \pi, (2k+1) \cdot \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

OBSERVAÇÃO: Esperávamos que as duas resoluções chegassem às mesmas raízes. Porém, se observarmos melhor, veremos que, se variarmos os valores de K, elas realmente coincidem.

8) $sen^2 x - \cos x = 1$

Se nos lembrarmos que $sen^2 x + 1 - cos^2 x$, a equação inicial se transforma em: $1 - cos^2 x - \cos x = 1 \ \Rightarrow cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + k\pi \Rightarrow x = \pi \cdot (1 + k), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Assim, o conjunto solução da equação será: $S = \left\{\pi \cdot \left(\frac{1}{2} + k\right), \pi \cdot (1 + k), k \in \mathbb{Z}\right\}$

Monômios

Identificando as Partes de um Monômio

No monômio **$-3xy^2$** o número **-3** representa o seu **coeficiente numérico** e a sua **parte literal** é representada por **xy^2**.

Por convenção omitimos o coeficiente numérico quando ele é igual a **1**, escrevemos **x** em vez de escrevermos **1x**, por exemplo, ou então **-x** no lugar de **-1x**.

Temos um **monômio nulo** quando o coeficiente numérico é igual a **0**, assim o termo algébrico **$0x^2$** é igual a **0**. Acima utilizamos o número **2** como um exemplo de monômio. De fato todo número real é um monômio, só que sem a parte literal.

Grau de um Monômio:

O **grau de um monômio** é obtido através da **soma dos expoentes** de todas as variáveis.

O Coeficiente numérico deve ser diferente de zero, caso contrário o monômio será nulo.

$7xy^2$ é um monômio de **grau 3**, já que o expoente de **x** subentende-se que seja igual a **1** e o de **y** é igual a **2**.

O monômio **$-5x^4$** é de **grau 4**, pois só possui a variável **x** com expoente igual a **4**. **18^2** é de **grau 0**, pois é um monômio sem a parte literal.

Adição de Monômios:

Se você tiver 3 bananas e 2 maçãs, ao ganhar mais 2 bananas e 2 maçãs, você ficará com 5 bananas e 4 maçãs. Note que somamos bananas com bananas e maçãs com maçãs. O mesmo raciocínio é aplicado à soma algébrica de monômios em relação aos termos semelhantes.

Observe a seguinte expressão formada pela soma algébrica de três monômios semelhantes:

$$3x^2y + 5x^2y + 7x^2y$$

Como os três termos algébricos são semelhantes podemos reduzi-los a um único monômio somando os coeficientes numéricos e mantendo a parte literal:

$$3x^2y + 5x^2y + 7x^2y = (3 + 5 + 7)x^2y = 15x^2y$$

Veja outros exemplos:

Subtração de Monômios

Em sendo a **subtração** a operação inversa da **adição**, o que explicamos acima para a soma, vale também de forma análoga para a diferença de monômios. Vejamos alguns exemplos:

- $7xy - 3xy = (7 - 3)xy = 4xy$
- $20ab - 3ab - 8ab = (20 - 3 - 8)ab = 9ab$
- $7x^2 - 3x^2 - 4x^2 = (7 - 3 - 4)x^2 = 0x^2 = 0$
- $4a - 3a = (4 - 3)a = 1a = a$

Multiplicação de Monômios

A **multiplicação** de monômios é realizada simplesmente se multiplicando os coeficientes numéricos entre si, assim como a parte literal.

Veja o seguinte exemplo:

$$5ab^2c \cdot 3bc^3 = (5 \cdot 3) \cdot (a) \cdot (b^2 \cdot b) \cdot (c \cdot c^3) = 15ab^3c^4$$

Sabemos que na **multiplicação de potências de mesma base** mantemos a base e somamos os expoentes. Se você observar, verá que além da multiplicação dos coeficientes numéricos, foi exatamente isto o que fizemos no produto acima.

A variável **a** tem expoente **1** no primeiro termo algébrico e não ocorre no segundo termo. Portanto mantém-se com o expoente igual a **1**.

A incógnita **b** tem os expoentes **2** e **1** no primeiro e segundo termo respectivamente, totalizando **3** no expoente.

Já a variável **c** tem os expoentes **1** e **3**, que somados totalizam um expoente igual a **4**.

Então como regra geral para multiplicarmos monômios é multiplicarmos os coeficientes e para cada variável somarmos os seus expoentes.

Vejamos outros exemplos:

- $4x^2y^3z^4 \cdot 5xy^2z^3 = (4 \cdot 5)(x^{2+1})(y^{3+2})(z^{4+3}) = 20x^3y^5z^7$
- $\frac{1}{2}a^4b^3 \cdot -2a^5b = (\frac{1}{2} \cdot -2)(a^{4+5})(b^{3+1}) = -a^9b^4$
- $7 \cdot 2x^2 = (7 \cdot 2)x^2 = 14x^2$
- $xyzw \cdot y^2z \cdot x^3z^4 = (x^{1+3})(y^{1+2})(w)(z^{1+1+4}) = x^4y^3wz^6$

Divisão de Monômios

Agora vamos tratar a operação inversa da multiplicação, a **divisão** de monômios.

Os procedimentos serão semelhantes ao do caso anterior, iremos dividir os coeficientes numéricos e subtrair os expoentes das incógnitas da parte literal.

Observe este exemplo:

$$15x^7y^4 \div 5x^3y^2 = (15 \div 5)(x^{7-3})(y^{4-2}) = 3x^4y^2$$

O exemplo é autoexplicativo, mas para que não fique qualquer dúvida, vamos comentá-lo.

O coeficiente numérico foi obtido pela divisão dos dois coeficientes originais.

A variável **x** possui respectivamente os expoentes **7** e **3**, então subtraindo o segundo do primeiro obtemos o expoente **4**.

Por fim a incógnita **y** que tem expoente **4** no primeiro monômio e **2** no segundo, fica com o expoente **2**, resultante de**4 - 2**.

Veja mais estes outros exemplos:

$$25ab^2 \div 5ab = (25 \div 5)(a^{1-1})(b^{2-1}) = 5a^0b^1 = 5b$$
$$21xy \div 3xy = (21 \div 3)(x^{1-1})(y^{1-1}) = 7x^0y^0 = 7$$
$$8ab^3c^4d^5 \div 8bc^2d^3 = (8 \div 8)(a)(b^{3-1})(c^{4-2})(d^{5-3}) = ab^2c^2d^2$$
$$5x^2y \div 15xy = (5 \div 15)(x^{2-1})(y^{1-1}) = \frac{1}{3}x^1y^0 = \frac{1}{3}x$$
$$12x^2y \div 3xy^3 = (12 \div 3)(x^{2-1})(y^{1-3}) = 4x^1y^{-2} = 4xy^{-2}$$

Repare que no último exemplo a variável **y** terminou com um expoente negativo. Conforme estudado no tópico sobre **potenciação**, podemos escrever esta expressão na forma de uma fração:

$$4xy^{-2} = \frac{4x}{y^2}$$

Exponenciação de Monômios

Já vimos que **a potência do produto de dois ou mais fatores é igual ao produto de cada um destes fatores elevados ao referido expoente**, na **potenciação** de monômios aplicamos o mesmo princípio. Vejamos este exemplo:

$$(-5x^2y^4)^3 = (-5)^3(x^2)^3(y^4)^3 = -125(x^{2\cdot 3})(y^{4\cdot 3}) = -125x^6y^{12}$$

Note que transformamos a potência de produtos, nos produtos de potências. Assim elevamos o coeficiente numérico e cada uma das potências das variáveis ao expoente **3**. **-5^3** resulta em **-125**.

$(x^2)^3$ como sabemos é igual a **$x^{2\cdot 3}$** que é igual a **x^6**.

Assim como **$(y^4)^3$** sabemos que é igual a **$y^{4\cdot 3}$** que é igual a **y^{12}**. E para terminar este tópico vamos a mais alguns exemplos:

$$(2a)^3 = (2)^3(a)^3 = 8a^3$$
$$(3x^2)^5 = (3)^5(x^2)^5 = 243(x^{2\cdot5}) = 243x^{10}$$
$$(-5x^2y^4)^3 = (-5)^3(x^2)^3(y^4)^3 = -125(x^{2\cdot3})(y^{4\cdot3}) = -125x^6y^{12}$$
$$(3r^3s^2t)^4 = (3)^4(r^3)^4(s^2)^4(t)^4 = 81(r^{3\cdot4})(s^{2\cdot4})(t^4) = 81r^{12}s^8t^4$$

Polinômios

Anteriormente falamos sobre termos algébricos explicamos o que são monômios semelhantes e em seguida tratamos a sua soma e subtração.

A adição ou subtração algébrica de monômios é denominada polinômio.

Vejamos alguns **exemplos de polinômios:**

$$7ab^2$$
$$3x^3y + 2xy^2$$
$$4x^2y^3z^4 - 5xy^2z^3$$
$$4a + 6x^2z4a - 6x^2z$$
$$-8ab^3c^4d^5 + \tfrac{3}{5}bc^2d^3 - 2ac^2d + b^2d^5$$

No primeiro exemplo temos um polinômio de apenas um monômio. Os demais possuem vários monômios, estes monômios são denominados termos do polinômio.

O segundo exemplo é um polinômio de dois termos: $\mathbf{3x^3y}$ e $\mathbf{2xy^2}$.

Multiplicação de Polinômios

Temos tanto o caso da multiplicação de um monômio por um polinômio, quanto o caso da multiplicação de um polinômio por um polinômio.

Multiplicação de um Polinômio por um Monômio

No primeiro caso a multiplicação é realizada **multiplicando-se o monômio por cada um dos termos do polinômio.**

Vejamos a multiplicação abaixo:

$$7xy^2 \cdot (2x^2 + y) = (7xy^2 \cdot 2x^2) + (7xy^2 \cdot y) = 14x^3y^2 + 7xy^3$$

Repare que multiplicamos **$7xy^2$** por ambos os termos do polinômio, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação.

Caso você ainda tenha dúvidas sobre **como realizar a multiplicação de monômios**, faça uma revisão antes de prosseguir neste tema.

Veja mais alguns exemplos:

$$2a \cdot (7b + 3c) = (2a \cdot 7b) + (2a \cdot 3c) = 14ab + 6ac$$
$$(6a + 5b) \cdot 3c = (6a \cdot 3c) + (5b \cdot 3c) = 18ac + 15bc$$
$$(4x - 2y) \cdot -3x = (4x \cdot -3x) - (2y \cdot -3x) = -12x^2 + 6xy$$

Multiplicação de um Polinômio por um Polinômio

No caso da multiplicação de polinômio por polinômio efetuamos a multiplicação de cada um dos termos do primeiro polinômio, por cada um dos termos do segundo polinômio e depois realizamos a redução do polinômio resultante.

Vamos analisar a multiplicação abaixo a qual separamos em três linhas para podermos observá-la mais facilmente:

Na primeira linha temos os dois polinômios a serem multiplicados.

Os dois primeiros produtos na segunda linha foram obtidos da multiplicação de **$3a^2b$** por cada um dos dois termos do segundo polinômio, **$2a$** e **$7a^2b^3$**.

Os dois últimos produtos na segunda linha foram obtidos multiplicando-se agora o segundo termo do primeiro polinômio, também por cada um dos dois termos do segundo.

A terceira linha que é o resultado final, já que não há termos semelhantes a reduzir, é o resultado após a multiplicação dos monômios entre parênteses na linha anterior. Analise estes outros exemplos para uma melhor assimilação:

$$(3a^2b - 5ab^2)(2a + 7a^2b^3) =$$
$$(3a^2b \cdot 2a) + (3a^2b \cdot 7a^2b^3) - (5ab^2 \cdot 2a) - (5ab^2 \cdot 7a^2b^3) =$$
$$6a^3b + 21a^4b^4 - 10a^2b^2 - 35a^3b^5$$

Para multiplicar mais de dois polinômios, comece multiplicando os dois primeiros, depois multiplique o polinômio obtido pelo terceiro e assim por diante até multiplicar por todos.

Para a multiplicar (a+b) (a – b) (2a+b) , por exemplo, primeiro multiplique (a+b) (a – b), que como vimos acima é igual a (, então multiplique por (2a+b)

Divisão de Polinômios

Como no caso da multiplicação, temos tanto a divisão de um polinômio por um monômio, quanto a divisão de um polinômio por um polinômio. Vamos tratar cada um dos casos individualmente.

Divisão de um Polinômio por um Monômio

Este é o caso mais simples, pois podemos fazê-lo dividindo cada um dos monômios que formam o polinômio, pelo monômio em questão.

Vamos analisar a divisão do polinômio abaixo:

$$(14x^3y^2 + 7xy^3) \div 7xy^2 = (14x^3y^2 \div 7xy^2) + (7xy^3 \div 7xy^2) = 2x^2 + y$$

Note que desmembramos o polinômio em duas partes, dividindo tanto **$14x^3y^2$** por **$7xy^2$**, quanto **$7xy^3$**.

Em caso de dúvida **consulte a divisão de monômios**, que foi explicada em detalhes na página sobre este tema.

Observe mais estes exemplos:

$$(14ab + 6ac) \div 2a = (14ab \div 2a) + (6ac \div 2a) = 7b + 3c$$
$$(18ac + 15bc) \div 3c = (18ac \div 3c) + (15bc \div 3c) = 6a + 5b$$
$$(-12x^2 + 6xy) \div -3x = (-12x^2 \div -3x) + (6xy \div -3x) = 4x - 2y$$
$$(4x - 2y) \cdot -3x = (4x \cdot -3x) - (2y \cdot -3x) = -12x^2 + 6xy$$

Divisão de um Polinômio por um Polinômio

Para realizarmos a divisão de polinômios é preciso que eles estejam reduzidos e ordenados.

O conceito da **redução de termos semelhantes** foi visto acima, quanto à ordenação de polinômios, dizemos que um polinômio está ordenado em relação à determinada variável, quando o grau de todos os monômios que os compõe, em relação a esta variável, estão ordenados de forma crescente ou decrescente.

O polinômio **$-5x^4 + 6x^5 - 7x^3$**, não está ordenado em relação a variável **x**, já o polinômio **$6x^5 - 5x^4 - 7x^3$** está ordenado de forma decrescente em relação a esta variável. Observe que os expoentes desta incógnita decrescem de **5** a **3**.

Para explicar o procedimento da divisão de polinômios pelo método das chaves, vamos dividir **8a² - 2ab 15b²** por**2a - 3b**.

A primeira coisa a verificar é se o grau do dividendo é maior ou igual ao grau do divisor. Se for menor o quociente será zero e o resto será o próprio dividendo.

Repare que ambos os polinômios estão ordenados de forma decrescente em relação à incógnita **a**:

$$8a^2 - 2ab - 15b^2 \;\big|\; \underline{2a - 3b}$$

A divisão de polinômios é muito semelhante à **divisão de números naturais**. Vamos começar dividindo o monômio **8a²**pelo monômio **2a** e colocar o quociente **4a** abaixo da chave:

$$\begin{array}{l|l} 8a^2 - 2ab - 15b^2 & \underline{2a - 3b} \\ & 4a \end{array}$$

Agora vamos multiplicar por **-4a**, o valor oposto do quociente, cada um dos monômios do divisor **2a - 3b** e colocar o resultado embaixo do dividendo:

$$\begin{array}{l|l} 8a^2 - 2ab - 15b^2 & \underline{2a - 3b} \\ -8a^2 + 12ab & 4a \end{array}$$

Executamos então a soma dos monômios:

$$
\begin{array}{rrr|l}
8a^2 & -\ 2ab & -\ 15b^2 & \underline{2a - 3b} \\
\underline{-8a^2} & \underline{+\ 12ab} & & 4a \\
0 & +\ 10ab & &
\end{array}
$$

Continuamos a divisão baixando o terceiro monômio do dividendo:

$$
\begin{array}{rrr|l}
8a^2 & -\ 2ab & -\ 15b^2 & \underline{2a - 3b} \\
\underline{-8a^2} & \underline{+\ 12ab} & & 4a \\
0 & +\ 10ab & -\ 15b^2 &
\end{array}
$$

Agora dividimos **10ab** por **2a**, que vai dar **5b** e também o colocamos abaixo da chave:

$$
\begin{array}{rrr|l}
8a^2 & -\ 2ab & -\ 15b^2 & \underline{2a - 3b} \\
\underline{-8a^2} & \underline{+\ 12ab} & & 4a + 5b \\
0 & +\ 10ab & -\ 15b^2 &
\end{array}
$$

Multiplicamos por **-5b**, o valor oposto de **5b**, cada um dos monômios do divisor **2a - 3b** e colocamos o resultado embaixo do primeiro resto parcial:

$$
\begin{array}{rrr|l}
8a^2 & -\ 2ab & -\ 15b^2 & \underline{2a - 3b} \\
\underline{-8a^2} & \underline{+\ 12ab} & & 4a + 5b \\
0 & +\ 10ab & -\ 15b^2 & \\
 & -10ab & +\ 15b^2 &
\end{array}
$$

Por fim executamos a soma que resultará em zero, indicando uma divisão exata:

$$
\begin{array}{rrrl|l}
8a^2 & -\ 2ab & -\ 15b^2 & & \underline{\ 2a - 3b\ } \\
\underline{-8a^2} & \underline{+\ 12ab} & & & \ 4a + 5b \\
0 & +\ 10ab & -\ 15b^2 & & \\
 & \underline{-10ab} & \underline{+\ 15b^2} & & \\
 & & 0 & &
\end{array}
$$

Como pudemos ver o procedimento da divisão de polinômios e bastante simples e semelhante à divisão de números naturais.

Para fechar o tema vamos a um outro exemplo, só que desta vez veremos uma divisão com um resto diferente de zero.

Vamos dividir 2**x⁴ - 7x³ + 3x²** por **x - 2**:

$$
\begin{array}{rrr|l}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 3x^2 & \underline{\ x - 2\ }
\end{array}
$$

Dividimos o monômio **2x⁴** pelo monômio **x**, que resulta em **2x³** e o colocamos abaixo da chave:

$$
\begin{array}{rrr|l}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 3x^2 & \underline{\ x - 2\ } \\
 & & & \ 2x^3
\end{array}
$$

Agora vamos multiplicar por **-2x³**, o valor oposto do quociente, cada um dos monômios do divisor **x - 2** e colocar o resultado embaixo do dividendo:

$$
\begin{array}{rrr|l}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 3x^2 & \underline{\ x - 2\ } \\
-2x^4 & +\ 4x^3 & & \ 2x^3
\end{array}
$$

Executamos a soma dos monômios:

$$
\begin{array}{rrrl}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 3x^2 & \big|\ \underline{x - 2} \\
-2x^4 & +\ 4x^3 & & \ \ 2x^3 \\ \cline{1-2}
0 & -\ 3x^3 & &
\end{array}
$$

Continuamos a divisão baixando o último monômio do dividendo:

$$
\begin{array}{rrrl}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 3x^2 & \big|\ \underline{x - 2} \\
-2x^4 & +\ 4x^3 & & \ \ 2x^3 \\ \cline{1-2}
0 & -\ 3x^3 & +\ 3x^2 &
\end{array}
$$

Dividimos então $-3x^3$ por x, que vai dar $-3x^2$ e o colocamos também abaixo da chave:

$$
\begin{array}{rrrl}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 3x^2 & \big|\ \underline{x - 2\qquad} \\
-2x^4 & +\ 4x^3 & & \ \ 2x^3 - 3x^2 \\ \cline{1-2}
0 & -\ 3x^3 & +\ 3x^2 &
\end{array}
$$

Então multiplicamos por **$3x^2$**, que é o valor oposto de **$-3x^2$**, cada um dos monômios do divisor **x - 2** e colocamos o resultado embaixo do primeiro resto parcial:

$$
\begin{array}{rrrl}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 3x^2 & \big|\ \underline{x - 2\qquad} \\
-2x^4 & +\ 4x^3 & & \ \ 2x^3 - 3x^2 \\ \cline{1-2}
0 & -\ 3x^3 & +\ 3x^2 & \\
 & 3x^3 & -\ 6x^2 &
\end{array}
$$

Como anteriormente, efetuamos a soma dos monômios:

$$
\begin{array}{rrrl}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 3x^2 & \big|\ \underline{x - 2\qquad} \\
-2x^4 & +\ 4x^3 & & \ \ 2x^3 - 3x^2 \\ \cline{1-2}
0 & -\ 3x^3 & +\ 3x^2 & \\
 & 3x^3 & -\ 6x^2 & \\ \cline{2-3}
 & 0 & -\ 3x^2 &
\end{array}
$$

Note que o resto **-3x²** é um polinômio de grau **2**, que não é de grau inferior ao grau do divisor, que é um polinômio de grau **1**, então devemos continuar a divisão.

Dividimos **-3x²** por **x** e colocamos o resultado **-3x** abaixo da chave:

$$
\begin{array}{rrr|l}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 3x^2 & x - 2 \\ \cline{4-4}
-2x^4 & +\ 4x^3 & & 2x^3 - 3x^2 - 3x \\ \cline{1-2}
0 & -\ 3x^3 & +\ 3x^2 & \\
 & 3x^3 & -\ 6x^2 & \\ \cline{2-3}
 & 0 & -\ 3x^2 &
\end{array}
$$

Multiplicamos por **3x**, que é o simétrico de **-3x**, cada um dos monômios do divisor **x - 2** e botamos o resultado embaixo do segundo resto parcial:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 3x^2 & & x - 2 \\ \cline{5-5}
-2x^4 & +\ 4x^3 & & & 2x^3 - 3x^2 - 3x \\ \cline{1-2}
0 & -\ 3x^3 & +\ 3x^2 & & \\
 & 3x^3 & -\ 6x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & -\ 3x^2 & & \\
 & & 3x^2 & -\ 6x & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & -\ 6x &
\end{array}
$$

Somamos então os monômios:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 3x^2 & & x - 2 \\ \cline{5-5}
-2x^4 & +\ 4x^3 & & & 2x^3 - 3x^2 - 3x \\ \cline{1-2}
0 & -\ 3x^3 & +\ 3x^2 & & \\
 & 3x^3 & -\ 6x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & -\ 3x^2 & & \\
 & & 3x^2 & -\ 6x & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & -\ 6x &
\end{array}
$$

Como tanto **-6x**, quanto **x - 2** são de grau **1**, devemos continuar a divisão:

Dividimos então **-6x** por **x**, que vai dar **-6** e também o inserimos abaixo da chave:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -\,7x^3 & +\,3x^2 & & & x-2 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +\,4x^3 & & & & 2x^3-3x^2-3x-6 \\ \cline{1-2}
0 & -\,3x^3 & +\,3x^2 & & & \\
 & 3x^3 & -\,6x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & -\,3x^2 & & & \\
 & & 3x^2 & -\,6x & & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & -\,6x & &
\end{array}
$$

Multiplicamos por **6**, que é o simétrico de **-6**, novamente cada um dos monômios do divisor **x - 2** e botamos o resultado embaixo do terceiro resto parcial:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -\,7x^3 & +\,3x^2 & & & x-2 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +\,4x^3 & & & & 2x^3-3x^2-3x-6 \\ \cline{1-2}
0 & -\,3x^3 & +\,3x^2 & & & \\
 & 3x^3 & -\,6x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & -\,3x^2 & & & \\
 & & 3x^2 & -\,6x & & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & -\,6x & & \\
 & & & 6x & -\,12 &
\end{array}
$$

Somamos mais uma vez os monômios:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -\,7x^3 & +\,3x^2 & & & x-2 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +\,4x^3 & & & & 2x^3-3x^2-3x-6 \\ \cline{1-2}
0 & -\,3x^3 & +\,3x^2 & & & \\
 & 3x^3 & -\,6x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & -\,3x^2 & & & \\
 & & 3x^2 & -\,6x & & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & -\,6x & & \\
 & & & 6x & -\,12 & \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & -\,12 &
\end{array}
$$

Agora o grau do resto **-12** é igual a **0** e, portanto, inferior ao grau do divisor que é **1**, então terminamos a divisão por aqui.

Se você realizar a multiplicação do quociente **$2x^3$ - $3x^2$ - 3x - 6** por **x - 2** irá obter **$2x^4$ - $7x^3$ + $3x^2$ + 12** que somado a**-12** resultará em **$2x^4$ - $7x^3$ + $3x^2$**, exatamente o dividendo original.

Para verificar se você compreendeu bem o conteúdo explicado, é desejável que você realize a multiplicação e a soma acima, para ver se consegue chegar ao mesmo resultado final. Também seria muito bom se você tentasse resolver novamente todos os exemplos resolvidos neste encontro forte abraço Monster Guerreiro e até mais.

IGUALDADE DE POLINÔMIOS

A matemática é repleta de comparações feitas por meio do sinal de igualdade que denotam se dois objetos matemáticos são ou não iguais.

Sendo assim, no estudo dos polinômios, temos uma condição para que dois polinômios sejam iguais. Para que isso ocorra, temos que obter valores numéricos iguais para qualquer valor de **a**.

Ou seja,

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow p(a) = q(a) \quad (para\ qualquer\ valor\ de\ a)$$

Desta igualdade podemos obter uma informação:

$$p(x) - q(x) = 0\ (Caso\ sejam\ polinômios\ semelhantes)$$

Com isso, podemos afirmar que dois polinômios serão iguais se, e somente se, tiverem coeficientes respectivamente iguais, ou seja, se os coeficientes dos termos de mesmo grau forem todos iguais.

Com esta informação, podemos afirmar também que para dois polinômios serem iguais, devem ser polinômios de mesmo grau.

Exemplo:

Determine os valores de a, b, c, d de modo que os polinômios sejam iguais.

$p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ e $q(x)=x^3+2x^2+4x-2$.

Temos que: $\mathbf{ax^3+bx^2+cx+d = x^3+2x^2+4x-2}$

Com isso, podemos afirmar que:

$a=1$; $b=2$; $c=4$; $d=-2$

Pois, para que os polinômios sejam iguais, devem ser de mesmo grau e devem ter os coeficientes iguais. Como podemos ver, ambos são de terceiro grau: bastou igualarmos os coeficientes referentes a cada grau.

POTÊNCIAS DE DEZ, NOTAÇÃO CIENTÍFICA E ORDENS DE GRANDEZA

Na natureza, algumas grandezas são muito maiores que a unidade empregada. Por exemplo, o diâmetro da terra é de aproximadamente 10.000.000 metros. Por outro lado, outras grandezas são muito menores que a unidade, como por exemplo o raio de uma bactéria comum, que é de aproximadamente 0,000001 metros. Nestes casos, escrever algarismos com muitos algarismos zero é inconveniente, podendo inclusive levar a erros. Emprega-se então a notação com potências de dez, também conhecida como notação científica. A vantagem do uso desta notação é substituir o número de zeros da grandeza por 10 elevado ao um expoente igual ao número de zeros. Por exemplo:

- Diâmetro da terra: 10.000.000 m = 10^7 m
- Diâmetro da bactéria: 0,000001 m = 10^{-6} m

No primeiro exemplo, o expoente 7 é igual ao número de zeros que aparece no número que define o valor do diâmetro da terra. No segundo exemplo o expoente 6 também é o número de zeros que define o valor da grandeza “diâmetro da bactéria”, porém o expoente é negativo, o que significa que é menor que a unidade. Outros exemplos:

$10^1=10$

$10^2=100$

$10^3=1000$

10-1 = 0,1

10-2 = 0,01

10-3 = 0,001

$3 \times 10^1 = 3 \times 10 = 30$

$1,2 \times 10^4 = 1,2 \times 10.000 = 12.000$

$2 \times 10^{-1} = 2 \times 0,1 = 0,2$

$4,53 \times 10^{-2} = 4,53 \times 0,01 = 0,0453$

Observação: O número que multiplica a potência de dez deve estar preferencialmente entre 1 e 10.

Exemplo:

34×10^{3} (evitar!!!)

$34 \times 10^{3} = 3,4 \times 10^{4}$ (preferível)

No exemplo acima, o expoente de dez passou de 3 para 4 (aumentou em 1) porque na transformação de 34,0 para 3,4 a vírgula se deslocou uma casa para a esquerda.

Outro exemplo:

$302,61 \times 10^{-6}$ (evitar!!!)

$302,61 \times 10^{-6} = 3,0261 \times 10^{-4}$ (preferível)

No exemplo acima, a vírgula de deslocou **duas casas para a esquerda** e o **expoente** de dez **aumentou em 2**.

Por outro lado, quando a vírgula se **desloca para a direita**, o **expoente** de dez **diminui** na mesma quantidade de casas decimais deslocadas.

Exemplos:

$0,489 \times 10^{4}$ (evitar) = $4,89 \times 10^{3}$ (preferível)

$0,489 \times 10^{-3}$ (evitar) = $4,89 \times 10^{-4}$ (preferível)

Operações com potências de dez

Multiplicação

Para multiplicar números em notação científica (potência de dez), basta **somar** os **expoentes** de dez e multiplicar os números que aparecem na frente das potências normalmente. Exemplos:

$(3 \times 10^{-2}) \times (4 \times 10^{-3}) = (3 \times 4) \times (10^{-2-3}) = 12 \times 10^{-5} = 1{,}2 \times 10^{-4}$

$(3{,}2 \times 10^{2}) \times (2 \times 10^{3}) = (3{,}2 \times 2) \times (10^{2+3}) = 6{,}4 \times 10^{5}$

$(2 \times 10^{-5}) \times (4 \times 10^{3}) = (2 \times 4) \times (10^{-5+3}) = 8 \times 10^{-2}$

Divisão

Para dividir números em notação científica (potência de dez), basta **diminuir** os **expoentes** e dividir os números que aparecem na frente das potências normalmente. Exemplos:

$(3 \times 10^{-2}) \div (4 \times 10^{-3}) = (3 \div 4) \times (10^{-2-(-3)}) = 0{,}75 \times 10^{1} = 7{,}5$

$(3{,}2 \times 10^{2}) \div (2 \times 10^{3}) = (3{,}2 \div 2) \times (10^{2-3}) = 1{,}6 \times 10^{-1}$

$(2 \times 10^{-5}) \div (4 \times 10^{3}) = (2 \div 4) \times (10^{-5-3}) = 0{,}5 \times 10^{-8} = 5 \times 10^{-9}$

Soma e Subtração

Para somar ou subtrair números com notação científica (potência de dez), os **expoentes devem ser iguais**. Portanto, o primeiro passo é transformar os dois números para potências de dez com o mesmo expoente. Assim, os números podem ser somados ou subtraídos normalmente.

Exemplos:

$10^{-2} + 10^{-3} = 1 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} = 10 \times 10^{-3} + 1 \times 10^{-3} = 11 \times 10^{-3} = 1,1 \times 10^{-2}$

$2,37 \times 10^{4} - 1,1 \times 10^{3} = 23,7 \times 10^{3} – 1,1 \times 10^{3} = 22,6 \times 10^{3} = 2,26 \times 10^{4}$

$2 + 3 \times 10^{-6} = 2 + 0,000003 = 2,000003$

ORDENS DE GRANDEZA

A ordem de grandeza de uma grandeza física é a potência de dez que mais se aproxima do valor da grandeza. Por exemplo, foi dito anteriormente que o diâmetro aproximado da terra é de 10^7 metros. Na verdade, um valor mais real para o diâmetro da terra é de $1,3 \times 10^7$ metros. Neste caso, diz se que a ordem de grandeza do diâmetro da terra é de 10^7 metros. Outros exemplos:

- Altura média de uma pessoa adulta: 1,70 metros = $1,7 \times 10^0$ (ordem de grandeza de 10^0 metros).

- Altura média de um edifício de 10 andares: 30 metros = 3×10^1 (ordem de grandeza de 10^1 metros).

- Velocidade média de um avião comercial de grande porte: 1000 km/h (quilômetros por hora) = 1×10^3 km/h (ordem de grandeza 10^3 km/h).

- Velocidade média de um automóvel de passeio em rodovias de pista dupla: 110 km/h= $1,1 \times 10^2$ km/h (ordem de grandeza 10^2 km/h).

- Velocidade da luz no vácuo 300.000.000 m/s (metros por segundo) = 3×10^8 m/s (ordem de grandeza 10^8 m/s).

- Potência média do motor de um automóvel de 1.000 cilindradas: 60 CV (cavalosvapor) = 6×10^1 (ordem de grandeza de 10^1 CV).

- Potência aproximada do motor de um carro de Formula-1: 1000 cv = 10^3 cv (ordem de grandeza de 10^3 cv).
- Distância equivalente a 1 ano-luz: 9,46 x 10^{15} metros (ordem de grandeza de 10^{15} metros)
- Raio de um átomo de hidrogênio: 5 x 10^{-11} metros (ordem de grandeza de 10^{-11} metros)

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

Conforme já mencionado, toda grandeza física pode ser medida e para se fazer uma medição é necessário que se estabeleça uma **unidade**. Por exemplo, a unidade de comprimento oficial no Brasil é o metro, cujo símbolo é “m”. Existem outras unidades de medida de comprimento, como a polegada, a milha, a jarda, etc. que são utilizadas principalmente nos E. U. A. Devido à grande influência econômica dos E.U.A. sobre os demais países, a polegada acaba sendo também utilizada em países como o Brasil. No entanto, o sistema de unidades oficial do Brasil e da grande maioria dos demais países do mundo é o Sistema Internacional de Unidades – SI. A tabela mostra as **sete unidades fundamentais do SI**, além da grandeza e o símbolo correspondentes. Observe a maneira correta de escrever o nome da unidade e o símbolo. Por exemplo, o símbolo correto de metro é “m” e não “M”, “mts”, etc. como comumente encontramos no cotidiano.

Tabela – Unidades fundamentais do SI

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de matéria	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

A partir destas sete unidades fundamentais, várias outras unidades podem ser derivadas. A tabela apresenta as unidades derivadas mais comuns e que serão utilizadas no curso e na vida profissional técnica. A última coluna mostra como a grandeza é definida a partir das grandezas fundamentais. Como pode-se perceber na coluna “Forma analítica”, todas as unidades derivadas podem ser escritas a partir das unidades fundamentais. Novamente, observe nesta tabela a grafia correta de cada unidade e seus respectivos símbolos.

Tabela – Unidades derivadas do SI

Grandeza	Unidade	Símbolo	Forma analítica	Definição
Área superficial	metro quadrado	m^2	m^2	m^2
Volume sólido	metro cúbico	m^3	m^3	m^3
Velocidade	metro por segundo	m/s	m/s	m/s
Aceleração	metro por segundo quadrado	m/s^2	m/s^2	m/s^2
Vazão	metro cúbico por segundo	m^3/s	m^3/s	m^3/s
Densidade volumétrica	quilograma por metro cúbico	$kg/\ m^3$	$kg/\ m^3$	$kg/\ m^3$
Ângulo plano	radiano	rad	1	m/m
Freqüência	hertz	Hz	1/s	1/s
Força	newton	N	$kg{\cdot}m/s^2$	$kg{\cdot}m/s^2$
Pressão	pascal	Pa	$kg/(m{\cdot}s^2)$	N/m^2
Energia	joule	J	$kg{\cdot}m^2/s^2$	N·m
Potência	watt	W	$kg{\cdot}m^2/s^3$	J/s
Carga elétrica	coulomb	C	A·s	A·s
Tensão elétrica	volt	V	$kg{\cdot}m^2/(s^3{\cdot}A)$	W/A
Resistência elétrica	ohm	Ω	$kg{\cdot}m^2/(s^3{\cdot}A^2)$	V/A
Capacitância	farad	F	$A^2{\cdot}s^2{\cdot}s^2/(kg{\cdot}m^2)$	A·s/V
Temperatura em Celsius	grau Celsius	°C	---	K-273,2

Múltiplos e submúltiplos do SI

Alternativamente à notação científica, quando a grandeza física é muito maior ou muito menor que a unidade, é comum utilizar-se os múltiplos e submúltiplos das unidades. A Tabela apresenta a correspondência entre a notação científica e os múltiplos e submúltiplos do SI. Cada múltiplo/submúltiplo do SI tem um símbolo correspondente, que deve ser escrito na frente do símbolo da unidade. Por exemplo, o símbolo k (quilo) corresponde a 10^3. Assim, dizer que uma certa distância é de 120 km, corresponde a dizer que esta distância é igual 120 x 10^3 m, ou 1,2 x 10^5 m.

Tabela – Múltiplos e submúltiplos das unidades do SI

10^n	Prefixo	Símbolo	Escala curta	Equivalente decimal
10^{24}	yotta	Y	Septilhão	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{21}	zetta	Z	Sextilhão	1 000 000 000 000 000 000 000
10^{18}	exa	E	Quintilhão	1 000 000 000 000 000 000
10^{15}	peta	P	Quadrilhão	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	Trilhão	1 000 000 000 000
10^{9}	giga	G	Bilhão	1 000 000 000
10^{6}	mega	M	Milhão	1 000 000
10^{3}	quilo	k	Milhar	1 000
10^{2}	hecto	h	Centena	100
10^{1}	deca	da	Dezena	10
10^{0}	*nenhum*	*nenhum*	Unidade	1
10^{-1}	deci	d	Décimo	0,1
10^{-2}	centi	c	Centésimo	0,01
10^{-3}	mili	m	Milésimo	0,001
10^{-6}	micro	µ (*)	Milionésimo	0,000 001
10^{-9}	nano	n	Bilionésimo	0,000 000 001
10^{-12}	pico	p	Trilionésimo	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto	f	Quadrilionésimo	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	atto	a	Quintilionésimo	0,000 000 000 000 000 001
10^{-21}	zepto	z	Sextilionésimo	0,000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	yocto	y	Septilionésimo	0,000 000 000 000 000 000 000 001

* Pode ser escrito como 'u' se o 'µ' não estiver disponível, como em '10uF'

TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES

Conforme já mencionado, o sistema de unidades oficial do Brasil é o SI. Infelizmente, é bastante comum a utilização de outros sistemas de unidades, como o Inglês, onde a unidade de comprimento é a polegada. Outras unidades bastante utilizadas na prática são o quilograma-força (símbolo kgf) para força, o cavalo vapor (símbolo CV) e “horse-power” (símbolo HP) para potência, a atmosfera (símbolo atm) e o bar (símbolo bar) para pressão, entre muitos outros. Muitas vezes, é necessário transformar estas unidades para as do SI. Isto pode ser feito de diversas maneiras, como:

- Substituição de múltiplos/submúltiplos

- Tabelas,
- Regra de três simples

Substituição de múltiplos/submúltiplos

O método da substituição de múltiplos e submúltiplos **só pode ser usado** para unidades do **SI**. Para transformar múltiplos e submúltiplos de unidades basta escrever em notação em potência de dez e rearranjar para o múltiplo ou submúltiplo desejado. Exemplos:

- Potência de um motor elétrico: 8 kW = 8 x 10^3 W.
- Diâmetro de uma broca específica: 10 mm = 10 x 10^{-3} m = 10^{-2} m = 1 cm.
- Comprimento de um campo de futebol em km:

$$100 \text{ m} = 100 \times (10^{-3} \times 10^{3} \text{ m}) = 10^{2} \times 10^{-3} \text{ km} = 10^{-1} \text{ km} = 0{,}1 \text{ km}.$$

- Área de um campo de futebol em km^2:

$$700 \text{ m}^2 = 700 \times (10^{-3} \text{km})^2 = 7 \times 10^{2} \times 10^{-6} \text{ km}^2 = 7 \times 10^{-4} \text{ km}^2.$$

Método da tabela

O método da tabela é usado para transformar unidades de sistemas diferentes. A Tabela apresenta na coluna do meio os fatores que devem ser multiplicados à unidade da primeira coluna para se obter a unidade da última coluna. Por exemplo para se transformar polegada (primeira coluna) para metro (última coluna), deve-se multiplicar por 0,0254 (1 pol x 0,00254 = 0,0254 m = 2,54 cm = 25,4 mm). Outros exemplos:

- 5 ft em pol: 5 x 12 “ = 60”
- 1 mi em km: 1 x 1.609 m = 1.609 m   1,6 km
- 20 psi em kPa: 20 x 6.899 Pa = 137.980 Pa   138 kPa
- 7.000 BTU/h em kW: 7.000 x 0,293 = 2.051 W   2 kW

Tabela – Correspondência entre unidades do SI e outras unidades.

Unidade (símbolo)	Multiplicar por	Unidade (símbolo)
polegada (pol, inch, “)	0,0254	metro (m)
pé (ft)	12	polegada (pol, “)
milha terrestre (mi)	1.609	metro (m)
milha náutica (n.mi)	1.853	metro (m)
litro (l)	10-3	metro cúbico (m^3)
galão dos E.U.A	3,785	litro (l)
galão da Inglaterra	4,54	litro (l)
quilograma-força (kgf)	aceleração da gravidade (9,81)	newton (N)
libra-massa (lb)	0,454	quilograma (kg)
tonelada (t)	1.000	quilograma (kg)
libra-força (lbf)	0,454 x gravidade (9,81) = 4,45	newton (N)
atmosfera (atm)	101.325	pascal (Pa)
libra-força por polegada quadrada (psi, lbf/pol^2)	6.899	pascal (Pa)

quilograma-força por centímetro quadrado (kgf/cm^2)	gravidade (9,81) x 10^4	pascal (Pa)
bar (bar)	10^5	pascal (Pa)
caloria (cal)	4,186	joule (J)
unidade térmica inglesa (BTU)	1.055	joule (J)
watt-hora (W.h)	3.600	joule (J)
Cavalo-vapor (CV)	736	watt (W)
Horse-power (HP)	746	watt (W)
BTU por hora (BTU/h)	0,293	watt (W)
tonelada de refrigeração (TR)	12.000	BTU/h
hora (h)	3.600	segundo (s)

Para se fazer a transformação inversa, ou seja transformar as unidades da última coluna para as da primeira coluna, basta dividir pelo valor da coluna do meio. Por exemplo, para transformar 5 metros cúbicos (última coluna) em litros (primeira coluna), deve-se dividir por 10^{-3} (coluna do meio), ou seja:

Regra de três simples

O método da regra de três simples é usado para transformar tanto unidades de sistemas diferentes quanto unidades do SI. Basta saber a correspondência entre as unidades inicial e final. Por exemplo, para se transformar 3 polegadas em metro, deve-se saber de antemão que 1 pol corresponde a 0,0254 m. Nesta caso temos a seguinte relação de proporção:

1 pol = 0,0254 m

3 pol = X m

Efetuando a multiplicação cruzada temos: 1 . X = 3 . 0,0254.

Portanto: X = 0,0762 m

Suponha agora que queremos converter este valor para centímetros. Devemos saber de antemão que 1 centímetro é igual a 10^{-2} metros. Podemos então escrever a seguinte proporção:

1 cm = 10^{-2} m

X cm = 0,0762 m

Efetuando a multiplicação cruzada temos: 1.0,0762= X.

Isolando X na equação acima temos:

$$X = \frac{0{,}0762}{10^{-2}} = 0{,}0762.10^{2} = 7{,}62 \text{ cm.}$$

Outros exemplos:

- 5 ft em pol:

1 ft = 12 “

5 ft = X”

1 . X = 5 . 12 X = 60”

- 2 kW em HP:

1 HP = 746 W

X HP = 2.10³ W

$1.2.10^3 = X . 746$

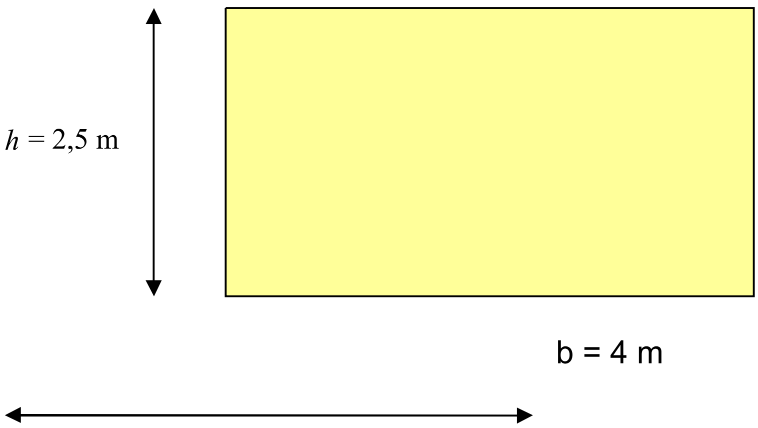
$$X = \frac{2.10^3}{746} = 2,68 \text{ HP}$$

OBTENÇÃO DE UNIDADES PELO CONCEITO FÍSICO DAS GRANDEZAS

Conforme já pode ser visto até agora, existe uma grande quantidade de unidades com as quais o profissional pode se deparar em sua vida. No entanto, sabemos da importância de se dominar o conhecimento das unidades das grandezas físicas. Para evitar termos que "decorar" todas estas unidades, é possível deduzir a unidade de uma certa grandeza a partir do conhecimento do seu conceito físico. Estudaremos aqui como obter a unidade a partir da fórmula das seguintes grandezas físicas: superfície, volume, densidade (linear, superficial e volumétrica), vazão, pressão, potência elétrica e energia elétrica.

Superfície

Suponhamos que você deseja trocar o piso cerâmico do banheiro de sua casa. O banheiro tem forma de retângulo e mede 2,5 metros de largura por 4 metros de comprimento. Se você for a uma loja de material de construção para comprar o piso desejado, o vendedor vai perguntar qual a área **em metros quadrados** de piso você deseja comprar. Para obter esta informação, você multiplica as duas dimensões do chão do banheiro, ou seja: 2,5 m x 4 m = 2,5 x 4 x m x m = 10 m^2. O símbolo m^2 apareceu porque sabemos da matemática que: X . X = X^2. Desta forma, se lembrarmos que a medida de superfície é sempre o **produto de duas dimensões de comprimento**, a unidade de superfície será a **unidade de comprimento ao quadrado**. A Figura apresenta isso de forma resumida.



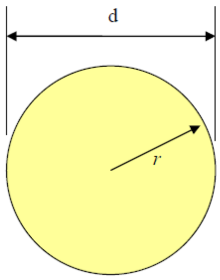
$$\boldsymbol{S = b\ .\ h}$$

$$S = 4\text{ m} . 2{,}5\text{ m}$$

$$S = 10\text{ m}^2$$

Figura – Área da superfície de um retângulo

É importante observar que mesmo quando a área não tem forma de retângulo, a unidade de superfície será sempre a unidade de comprimento ao quadrado. Por exemplo, a área superficial de um círculo de raio “r” e diâmetro “d”, pode ser calculado com as seguintes fórmulas:



$$S = \pi . r^2$$

ou

$$S = \frac{\pi . d^2}{4}$$

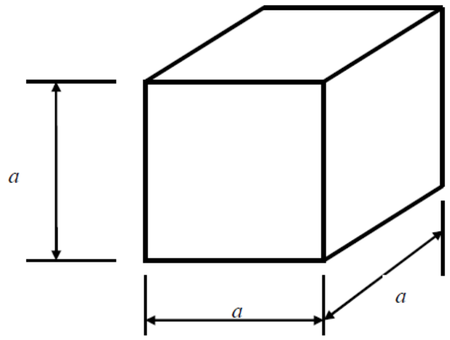
Figura – Área da superfície de um círculo

Tanto “r” como “d” são medidos em [m], e ambos estão elevados ao quadrado nas fórmulas.

Logo, a medida da **área superficial** “S “ de um círculo terá unidade **[m^2]**. O mesmo raciocínio vale para qualquer outro formato de superfície.

Volume

De maneira semelhante à superfície, o volume é calculado a partir da multiplicação de dimensões de comprimento. Da matemática, sabemos que o volume de um cubo, por exemplo, é a medida do lado “a” elevado à potência 3. Logo, a **unidade de volume** é igual à unidade de comprimento elevada à potência 3 ou seja, **[m^3]**, **[cm^3]**, etc.



$$V = a^3$$

Figura – Volume de um cubo

Semelhante ao que acontece com a área superficial, o volume terá sempre unidades de comprimento ao cubo (potência 3), independentemente do formato. Ex. esfera, paralelepípedos, cones, etc.

Densidades linear, superficial e volumétrica

É muito comum na prática nos depararmos com situações onde uma grandeza física por si própria não significa nada. Elas têm um significado muito maior quando analisadas a sua **densidade** ao longo de uma linha, de uma superfície ou de um volume. A razão entre a grandeza e o comprimento da linha, da superfície ou do volume é chamada densidade linear, superficial e volumétrica, respectivamente.

Densidade linear

Para entender o que significa densidade linear, considere a seguinte pergunta exemplo:

Qual é a massa [kg] de um fio de cobre com 5 mm de diâmetro?

A resposta é na verdade outra pergunta: qual o comprimento deste fio?? Portanto, a “massa de um fio de cobre de 5 mm de diâmetro” não é uma grandeza física, apesar de sabermos que massa é uma grandeza física. Em casos como esse é comum tratarmos com a **densidade linear**. Se a pergunta for: qual a densidade linear de um fio de cobre com 5 mm de diâmetro? A resposta é exata: 0,1 kg/m. Isto significa que cada metro deste fio tem uma massa de 0,1 kg.

De uma maneira geral, a densidade linear é definida pela seguinte equação:

Onde

d_l = densidade linear [kg/m]

m = massa [kg]

l = comprimento [m]

A **unidade de densidade linear** é a **unidade de massa** dividida pela **unidade de comprimento**. Como a unidade de massa no SI é [kg] e a de comprimento é [m], a unidade de densidade linear no SI é [kg/m]. No entanto, outras unidades são usuais, como [g /m], [g/cm], [lb/ft], etc.

<u>Exemplos:</u>

a) Num certo rolo de fio de costura tem uma massa de 500 g e 2.000 m de comprimento.

Calcular a densidade linear deste fio.

Solução:

A fórmula da densidade linear é:

A massa é m= 500 g e o comprimento é l =2.000 m.

Logo:

Resposta: A densidade linear é de 0,25 g/m. Isto significa que a cada metro de fio, a massa é de 0,25 g.

b) Sabendo que a densidade linear de um certo tubo de cobre é de 3,58 kg/m, pergunta-se qual a massa de 3,5 m deste tubo.

Solução:

m

A fórmula da densidade linear é: d_l

l

m

O comprimento é l = 3,5 m e a densidade linear é d_l = 3,58 kg/m. Logo: 3,58

3,5 Isolando a massa "m" nesta equação, tem-se: m 3,58.3,5 12,53kg . Resposta: A massa é de 12,53 kg.

Densidade superficial

Para entender o conceito de densidade superficial, considere o seguinte exemplo. Suponha que uma mulher de 55 kg queira caminhar sobre um terreno arenoso. Será que o terreno é capaz de suportar o peso desta mulher sem ceder?

A resposta irá depender de qual o tipo de sapato que a mulher está calçando. Se for um com salto fino, obviamente ele vai afundar. Por outro lado, se for uma sapatilha de solado chato, provavelmente não haverá problemas. Mas observe que nos dois casos o peso da mulher é o mesmo, no entanto, o resultado é diferente. Isto ocorre porque a área do salto fino é menor que a área do solado da sapatilha. Disto concluímos que o peso da mulher por si próprio não é o fator determinante. Neste caso, o que importa é a **densidade superficial**, que é a massa da mulher dividida pela área da superfície da sola do sapato. No caso do salto fino a densidade superficial é muito maior que no caso do solado plano. Por isso, o salto fino irá afundar.

Em termos matemáticos, a densidade superficial é dada pela seguinte equação:

Onde

d_S = densidade superficial [kg/m^2]

m = massa [kg]

S = área da superfície [m^2]

A **unidade de densidade superficial** é a **unidade de massa** dividida pela **unidade de superfície**. Como a unidade de massa no SI é [kg] e a de superfície é [m^2], a unidade de densidade superficial no SI é [kg/m^2]. No entanto, outras unidades são usuais, como [g /cm^2], [lb/pol^2], etc.

<u>Exemplo:</u> A densidade superficial de uma determinada chapa metálica é de 24,8 kg/m^2. Sabendo-se que esta chapa é vendida em tiras de 1 m de largura e pretende-se comprar 1,5 m desta tira, qual a massa de chapa a ser comprada?

Solução:

A fórmula da densidade superficial é:

A densidade superficial é d_S = 24,8 kg/m^2 e a área de um retângulo (formato da chapa) é dada por:

$$S = b \,.\, h = 1 \,.\, 1{,}5 = 1{,}5\ m^2$$

Logo: $24{,}8 = \dfrac{m}{1{,}5} \quad \rightarrow \quad m = 24{,}8 \,.\, 1{,}5 = 37{,}2\ kg$

Resposta: A massa de chapa é de 37,2 kg.

Densidade volumétrica

Novamente, para entender o conceito de densidade volumétrica, vamos considerar um exemplo prático. Tente responde a seguinte pergunta: Qual a massa da água?

A resposta depende da quantidade de água considarada, um copo de 300 ml, um balde de 15 litros, uma caixa d'água de 1.000 litros, etc... Observe que, mais uma vez a massa por si própria, apesar de ser uma grandeza física, não responde ao questionamento. Agora, se a pergunta for sobre a **densidade volumétrica** da água, ou seja, a sua massa dividida pelo volume que ela ocupa, a reposta é única: 1.000 kg/m^3. Ou seja, a densidade volumétrica, muitas vezes chamada apenas densidade, é o parâmetro que realmente importa, especialmente quando estamos lidando com líquidos.

A definição de densidade volumétrica é dada pela seguinte equação:

Onde

d_V = densidade volumétrica [kg/m^3]

m = massa [kg]

V = volume [m^3]

A **unidade de densidade volumétrica** é a **unidade de massa** dividida pela **unidade de volume**. Como a unidade de massa no SI é [kg] e a de comprimento é [m^3], a unidade de densidade volumétrica no SI é [kg/m^3]. No entanto, outras unidades são usuais, como [g /cm^3], [lb/pol^3], etc.

<u>Exemplo:</u> Qual a massa de água contida num copo de 300 ml ?

Solução:

A fórmula da densidade volumétrica é:

A densidade volumétrica da água, conforme já mencionada, é $d_V = 1.000$ kg/m^3 e o volume do copo é 300 ml. Observe que as unidades são incompatíveis: densidade tem "m^3" e volume tem "ml ". Para podermos incluir estes dados na fórmula da densidade, é necessário transformar o volume também para m^3. Neste caso, tem-se:

$$300 \text{ ml} = 300 \,.\, 10^{-3} \text{ l} = 0{,}3 \text{ l} = 0{,}3 \,.\, 10^{-3} \text{ m}^3 = 3.\, 10^{-4} \text{ m}^3$$

Logo: $$1.000 = \frac{m}{3.10^{-4}} \quad \rightarrow \quad m = 3.10^{-4}\,.10^{3} = 3.10^{-1} = 0{,}3\,kg$$

Resposta: A massa de água é de 0,3 kg ou 300 g.

Vazão

Considere uma tubulação de água conectada a uma caixa d'água. Suponha que a caixa tenha um volume interno de 1 m^3 e que a tubulação demora 1 h para encher a caixa d'água. Neste caso diz-se que a vazão da tubulação é de 1 metro cúbico por hora, ou seja 1m^3/h. A vazão é definida como sendo o volume (V) de fluido transportado dividido pelo tempo (t) necessário para transportar o fluido, ou seja:

A **unidade de vazão** é a **unidade de volume** dividida pela **unidade de tempo**. Como a unidade de volume no SI é [m^3] e a de tempo é [s] (segundo), a unidade de vazão no SI é [m^3/s]. No entanto, outras unidades são usuais, como [l /s], [l /min], etc.

Pressão

Considere uma seringa com água dentro conforme a Figura. Se o êmbolo for pressionado com uma certa força, a razão entre esta força e a área do êmbolo é a chamada **pressão** da água dentro da seringa. Matematicamente, a pressão é definida como sendo:

$$P = \frac{F}{A}$$

Onde: P = pressão [Pa]

F = força [N]

A = área [m^2]

A **unidade de pressão** é a **unidade de força** dividida pela **unidade de área**. Como a unidade de força no SI é [N] e a de área é [m^2], a unidade de vazão no SI é [N/m^2], que também é conhecida como [Pa] (Pascal). No entanto, outras unidades são usuais, como [kgf/mm^2], [lbf/pol^2], [bar], etc.

Teorema de Pascal

O Teorema de Pascal diz que quando provocamos um acréscimo de pressão dentro de um líquido homogêneo, este aumento de pressão se propaga em todas as direções e atinge todos os pontos do líquido. Este teorema é o princípio de funcionamento de equipamentos bastante comuns do nosso dia-a-dia, como a prensa e o macaco hidráulicos. Para ilustrar este princípio, considere a Figura, onde dois tanques com áreas A_1 e A_2 estão conectados entre si. Em cada tanque tem um pistão, semelhante ao da seringa discutida anteriormente. A área A_1 é bem menor do que a área A_2. Se exercermos uma força F_1 no pistão que tem área A_1, a pressão no pistão 1 será:

$$P_1 = \frac{F_1}{A_1}$$

Já a pressão no pistão 2 será:

$$P_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

Mas como, pelo Teorema de Pascal, a pressão no pistão 1 deve ser igual à pressão no pistão 2, tem-se:

$$P_1 = P_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Isolando a força do pistão 2 (F_2), temos:

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

Mas como A_2 é muito maior que A_1, temos que F_2 é muito maior que F_1. Como isso tem-se um dispositivo que multiplica a força aplicada.

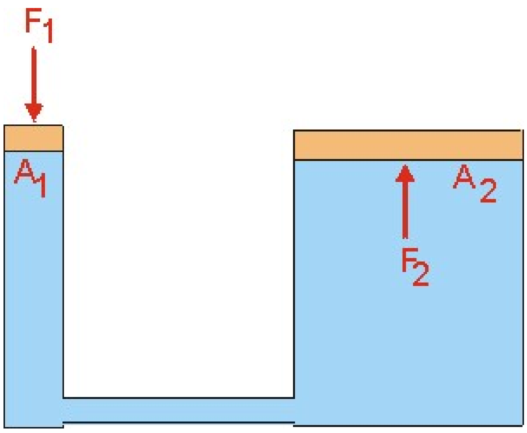


Figura – Princípio de Pascal

Exemplo: Considere um dispositivo como o da Figura com o pistão 1 de 75 mm de diâmetro e o pistão 2 com 150 mm de diâmetro. O pistão 2 levanta um peso cuja massa é de 150 kg.

Qual a força necessária no pistão 1 para levantar o peso?

Solução:

As áreas dos dois pistões são:

$$A_1 = \frac{\pi . d_1^2}{4} = \frac{3{,}1416.(0{,}075)^2}{4} = 0{,}00442\, m^2$$

$$A_2 = \frac{\pi . d_2^2}{4} = \frac{3{,}1416.(0{,}15)^2}{4} = 0{,}01767\, m^2$$

A força no pistão 2 é calculada pela equação: F_2 =m.g , onde **m** é a massa [kg] e **g**=10 m/s^2 é a aceleração da gravidade. Logo: F_2=150.10 = 1500 N

Finalmente: $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$

$$\frac{F_1}{0{,}00442} = \frac{1500}{0{,}01767}$$

F_1= 375 N

Logo, para levar uma massa cujo peso é de 1500 N, são necessários apenas 375 N.

Empuxo

Todo corpo imerso dentro de um fluido recebe do mesmo uma força, chamada empuxo, contrária à força da gravidade. Por exemplo, um peixe dentro d'água recebe da água uma força de empuxo. Se o empuxo for maior que o peso, o peixe irá flutuar na superfície, se o empuxo for menor que o peso, o peso irá afundar cada vez mais e se o peso e o empuxo forem iguais, o peixe está em equilíbrio com a água. O mesmo acontece com submarinos e balões de gás e ar quente. O empuxo é uma força que tem módulo igual ao peso do fluido deslocado. Ou seja, no caso do peixe, o empuxo da água sobre o peixe é igual ao peso da água que estaria ocupando o espaço do peixe caso ele não estivesse lá. Isso pode ser escrito da seguinte forma:

E =d_vV g

Onde: E = empuxo [N]

d_v = densidade volumétrica do fluido [kg/m^3]

V = volume do corpo submerso no fluido [m^3]

g = 10 m/s^2 (aceleração da gravidade)

Exemplo: Um submarino tem um volume de 3000 m^3. Qual o empuxo da água salgada (densidade de 1100 kg/m3) sobre o submarino? Qual a massa em toneladas do submarino?

Solução:

O empuxo é calculado com:

$E = d_v V g = 1100.3000.10 = 33000000 N = 3,3.10^7 N$

A massa do submarino é calculada sabendo que o empuxo deve ser igual ao peso do submarino e o peso é a massa multiplicada pela gravidade:

E=P

E = m.g

$3,3.10^7 = m.10 \quad m = 3,3.10^6 kg = 3300$ ton

Potência elétrica

Considere uma lâmpada elétrica ligada a uma bateria, conforme a figura abaixo. Em um dos dois fios que conectam a bateria à lâmpada, existe um amperímetro, que é um instrumento que mede a corrente elétrica. A corrente elétrica representa o fluxo de elétrons que circulam pelo circuito elétrico. A unidade da corrente elétrica é o ampère [A], conforme a Tabela. A **potência elétrica** é a **tensão** da bateria **multiplicada** pela **corrente elétrica**, ou seja:

$$P = U.I$$

Onde: P = potência [W]

U = tensão [V]

I = corrente [A]

A unidade da potência no sistema internacional é watt [W], conforme mostrado na Tabela. No exemplo da figura abaixo, a potência da lâmpada é: 12 V . 5 A = 60 W.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. Ensino Subseqüente. São Paulo: Ática, 2003.

GELSON, Tezzi et al. APOIO – Matemática: Ciência e aplicações: Ensino Subseqüente . São Paulo. Atud, 2004.