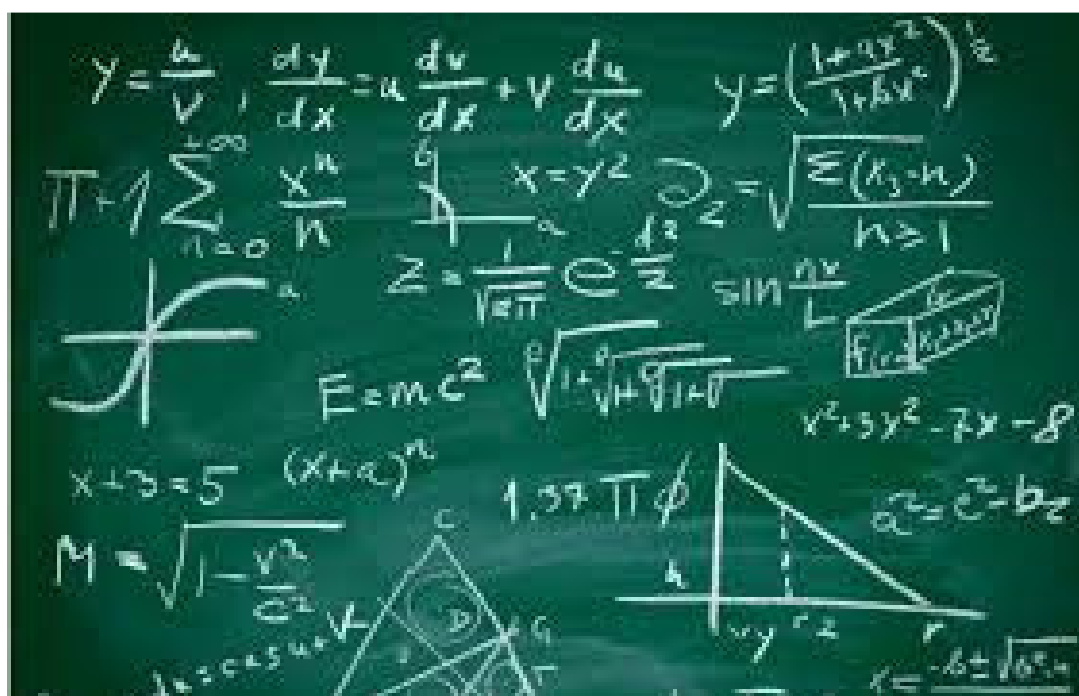


MATEMÁTICA FINANCEIRA I



UNIÃO NACIONAL DE INSTRUÇÃO

VIII – JUROS

Juros representam a remuneração do Capital empregado em alguma atividade produtiva. Os juros podem ser capitalizados segundo dois regimes: simples ou compostos.

JUROS SIMPLES: O juro de cada intervalo de tempo sempre é calculado sobre o capital inicial emprestado ou aplicado.

JUROS COMPOSTOS: o juro de cada intervalo de tempo é calculado a partir do saldo no início de correspondente intervalo. Ou seja: o juro de cada intervalo de tempo é incorporado ao capital inicial e passa a render juros também.

O **juro** é a remuneração pelo empréstimo do dinheiro. Ele existe porque a maioria das pessoas prefere o consumo imediato, e está disposta a pagar um preço por isso. Por outro lado, quem for capaz de esperar até possuir a quantia suficiente para adquirir seu desejo, e neste interim estiver disposta a emprestar esta quantia a alguém, menos paciente, deve ser recompensado por esta abstinência na proporção do **tempo** e **risco**, que a operação envolver. O tempo, o risco e a quantidade de dinheiro disponível no mercado para empréstimos definem qual deverá ser a remuneração, mais conhecida como **taxa de juros**.

Quando usamos juros simples e juros compostos?

A maioria das operações envolvendo dinheiro utiliza **juros compostos**. Estão incluídas: compras a médio e longo prazo, compras com cartão de crédito, empréstimos bancários, as aplicações financeiras usuais como Caderneta de Poupança e aplicações em fundos de renda fixa, etc. Raramente encontramos uso para o regime de juros simples: é o caso das operações de curtíssimo prazo, e do processo de desconto simples de duplicatas.

8.1. Taxa de juros

A taxa de juros indica qual remuneração será paga ao dinheiro emprestado, para um determinado período. Ela vem, normalmente, expressa da forma percentual, em seguida da especificação do período de tempo a que se refere:

8 % a.a. - (a.a. significa ao ano).

10 % a.t. - (a.t. significa ao trimestre).

Outra forma de apresentação da taxa de juros é a unitária, que é igual a taxa percentual dividida por 100, sem o símbolo %:

0,15 a.m. - (a.m. significa ao mês).

0,10 a.q. - (a.q. significa ao quadrimestre)

8.2. Juros Simples

O regime de juros será simples quando o percentual de juros incidir apenas sobre o valor principal. Sobre os juros gerados a cada período não incidirão novos juros. Valor Principal ou simplesmente principal é o valor inicial emprestado ou aplicado, antes de somarmos os juros. Transformando em fórmula temos:

$$J = P \cdot i \cdot n$$

Onde:

J = juros

P = principal (capital)

i = taxa de juros

n = número de períodos

Exemplo: Temos uma dívida de R\$ 1000,00 que deve ser paga com juros de 8% a.m. pelo regime de juros simples e devemos pagá-la em 2 meses. Os juros que pagarei serão:

$$J = 1000 \times 0.08 \times 2 = \mathbf{160}$$

Ao somarmos os juros ao valor principal temos o **montante**.

Montante = Principal + Juros

Montante = Principal + (Principal x Taxa de juros x Número de períodos)

$$M = P \cdot (1 + (i \cdot n))$$

Exemplo: Calcule o montante resultante da aplicação de R\$70.000,00 à taxa de 10,5% a.a. durante 145 dias.

SOLUÇÃO:

$$M = P \cdot (1 + (i \cdot n))$$

$$M = 70000 [1 + (10,5/100) \cdot (145/360)] = \mathbf{R\$72.960,42}$$

Observe que expressamos a taxa **i** e o período **n**, na mesma unidade de tempo, ou seja, anos. Daí ter dividido 145 dias por 360, para obter o valor equivalente em anos, já que um ano comercial possui 360 dias.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Calcular os juros simples de R\$ 1200,00 a 13 % a.t. por 4 meses e 15 dias.

$$0.13 / 6 = 0.02167$$

$$\text{logo, } 4m15d = 0.02167 \times 9 = 0.195$$

$$j = 1200 \times 0.195 = \mathbf{234}$$

2) Calcular os juros simples produzidos por R\$40.000,00, aplicados à taxa de 36 % a.a., durante 125 dias.

Temos: $J = P \cdot i \cdot n$

A taxa de 36% a.a. equivale a $0,36/360$ dias = 0,001 a.d.

Agora, como a taxa e o período estão referidos à mesma unidade de tempo, ou seja, dias, poderemos calcular diretamente:

$$J = 40000 \cdot 0,001 \cdot 125 = \mathbf{R\$5000,00}$$

3) Qual o capital que aplicado a juros simples de 1,2% a.m. rende R\$3.500,00 de juros em 75 dias?

Temos imediatamente: $J = P \cdot i \cdot n$ ou seja: $3500 = P \cdot (1,2/100) \cdot (75/30)$

Observe que expressamos a taxa **i** e o período **n** em relação à mesma unidade de tempo, ou seja, meses.

Logo,

$$3500 = P \cdot 0,012 \cdot 2,5 = P \cdot 0,030; \text{ Daí, vem:}$$

$$P = 3500 / 0,030 = R\$116.666,67$$

4) Se a taxa de uma aplicação é de 150% ao ano, quantos meses serão necessários para dobrar um capital aplicado através de capitalização simples?

Objetivo: $M = 2 \cdot P$

Dados: $i = 150/100 = 1,5$

Fórmula: $M = P (1 + i \cdot n)$

Desenvolvimento:

$$2P = P (1 + 1,5 n)$$

$$2 = 1 + 1,5 n$$

$$n = 2/3 \text{ ano} = 8 \text{ meses}$$

8.3. Juros Compostos

O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e, portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia-a-dia. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte.

Chamamos de capitalização o momento em que os juros são incorporados ao principal. Após três meses de capitalização, temos:

1º mês: $M = P \cdot (1 + i)$

2º mês: o principal é igual ao montante do mês anterior: $M = P \times (1 + i) \times (1 + i)$

3º mês: o principal é igual ao montante do mês anterior: $M = P \times (1 + i) \times (1 + i) \times (1 + i)$

Simplificando, obtemos a fórmula:

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

Importante: a taxa **i** tem que ser expressa na mesma medida de tempo de **n**, ou seja, taxa de juros ao mês para **n** meses.

Para calcularmos apenas os juros basta diminuir o principal do montante ao final do período:

$$J = M - P$$

Exemplo:

Calcule o montante de um capital de R\$6.000,00, aplicado a juros compostos, durante 1 ano, à taxa de 3,5% ao mês.

(use $\log 1,035=0,0149$ e $\log 1,509=0,1788$)

Resolução:

$$P = \text{R\$}6.000,00$$

$$t = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses}$$

$$i = 3,5 \% \text{ a.m.} = 0,035$$

$$M = ?$$

Usando a fórmula $M=P.(1+i)^n$, obtemos:

$$M = 6000.(1+0,035)^{12} = 6000. (1,035)^{12}$$

Fazendo $x = 1,035^{12}$ e aplicando logaritmos, encontramos:

$$\log x = \log 1,035^{12} \Rightarrow \log x = 12 \log 1,035 \Rightarrow \log x = 0,1788 \Rightarrow x = 1,509$$

$$\text{Então } M = 6000.1,509 = 9054.$$

Portanto, o montante é R\$9.054,00

Relação entre juros e progressões

No regime de juros simples:

$$M(n) = P + n r P$$

No regime de juros compostos:

$$M(n) = P . (1 + r) ^ n$$

Portanto:

num regime de capitalização **a juros simples** o saldo cresce em **progressão aritmética**

num regime de capitalização **a juros compostos** o saldo cresce em **progressão geométrica**

Taxas Equivalentes

Duas taxas i_1 e i_2 são equivalentes, se aplicadas ao mesmo Capital **P** durante o mesmo período de tempo, através de diferentes sistemas de capitalização, produzem o mesmo montante final.

Seja o capital **P** aplicado por um ano a uma taxa anual i_a .

O montante **M** ao final do período de 1 ano será igual a $M = P(1 + i_a)$

Consideremos agora, o mesmo capital **P** aplicado por 12 meses a uma taxa mensal i_m .

O montante **M'** ao final do período de 12 meses será igual a $M' = P(1 + i_m)^{12}$.

Pela definição de taxas equivalentes vista acima, devemos ter **M = M'** .

$$\text{Portanto, } P(1 + i_a) = P(1 + i_m)^{12}$$

$$\text{Daí concluímos que } 1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$$

Com esta fórmula podemos calcular a taxa anual equivalente a uma taxa mensal conhecida.

Exemplos:

1 - Qual a taxa anual equivalente a 8% ao semestre?

Em um ano temos dois semestres, então teremos:

$$1 + i_a = (1 + i_s)^2$$

$$1 + i_a = 1,08^2$$

$$i_a = 0,1664 = 16,64\% \text{ a.a.}$$

2 - Qual a taxa anual equivalente a 0,5% ao mês?

$$1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$$

$$1 + i_a = (1,005)^{12}$$

$$i_a = 0,0617 = 6,17\% \text{ a.a.}$$

IX - DESCONTOS SIMPLES E COMPOSTOS

9.1. Descontos Simples

Desconto é aplicado quando um empréstimo é saldado antes do vencimento previsto.

A fórmula é: $d = N \cdot i \cdot n$

Exemplo:

Qual o desconto de um título no valor de R\$ 50.000,00, se ele for pago 2 meses antes do vencimento a uma taxa de 5,5% a.m.?

Aplicando a fórmula:

d: o que você quer saber

N: 50.000,00

i: 5,5% - 0,055

n: 2

$$d = 50000 \cdot 0,055 \cdot 2$$

d = R\$ 5.500,00 de desconto

A taxa de desconto talvez seja a mais familiar de todas. Quem nunca pediu desconto em uma compra? A diferença entre o desconto e os juros é que o desconto é calculado a partir do valor futuro, enquanto que os juros sobre o valor presente.

9.2. Descontos Compostos

Conceito de desconto em juros compostos é similar ao de desconto em juros simples.

A fórmula é: $A = N \cdot 1 / (1+i)^n$

Exemplo:

Suponhamos que você quer descontar um título de R\$ 25.000,00, 2 meses antes do vencimento, de um banco que utiliza uma taxa de juros compostos de 3% a.m. Calcule o valor atual do título.

Aplicando a fórmula:

A - o que você quer saber

N - 25.000,00

i - 3 % - 0,03

n - 2

Logo: $25000.1 / (1+0,03)^2 = 23.564,90$

X - FLUXO DE CAIXA

Fluxo de caixa de uma empresa, de uma aplicação financeira ou de um empréstimo consiste no conjunto de entradas (recebimentos) e saídas (pagamentos) de dinheiro ao longo de um determinado período.

XI - TAXAS NOMINAIS

A taxa nominal é quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital não coincide com aquele a que a taxa está referida. Alguns exemplos:

- 34% ao semestre com capitalização mensal.
- 150% ao ano com capitalização mensal.
- 19,5% ao ano com capitalização trimestral.

Exemplo:

Uma taxa de 15 % a.a., capitalização mensal, terá 16.08 % a.a. como taxa efetiva:

$$15/12 = 1,25 \quad 1,25^{12} = 1,1608$$

XII - TAXAS EFETIVAS

A taxa Efetiva é quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital coincide com aquele a que a taxa está referida. Alguns exemplos:

- 11,5% ao mês com capitalização mensal.
- 25% ao semestre com capitalização semestral.
- 125% ao ano com capitalização anual.

Taxa Real: é a taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período da operação.

Fluxo de Caixa

O fluxo de caixa serve para demonstrar graficamente as transações financeiras em um período de tempo. O tempo é representado na horizontal dividido pelo número de períodos relevantes para análise. As **entradas** ou **recebimentos** são representados por setas verticais apontadas para **cima** e as **saídas** ou **pagamentos** são representados por setas verticais apontadas para **baixo**. Observe o gráfico abaixo:

		150	450		VF=100
VP=100		↑	↑		↑
0	1	2	3	4	5
↓	↓			↓	
	250			350	

Chamamos de **VP** o **valor presente**, que significa o valor que eu tenho na data 0; **VF** é o **valor futuro**, que será igual ao valor que terei no final do fluxo, após juros, entradas e saídas.

XIII - VALOR PRESENTE E VALOR FUTURO

Na fórmula $M = P \cdot (1 + i)^n$, o principal P é também conhecido como **Valor Presente** ($PV = present value$) e o montante M é também conhecido como **Valor Futuro** ($FV = future value$).

Então essa fórmula pode ser escrita como

$$FV = PV (1 + i)^n$$

Isolando PV na fórmula temos:

$$PV = FV / (1+i)^n$$

Na HP-12C, o valor presente é representado pela tecla PV .

Com essa mesma fórmula podemos calcular o valor futuro a partir do valor presente.

Exemplo:

Quanto teremos daqui a 12 meses se aplicarmos R\$1.500,00 a 2% ao mês?

Solução: $FV = 1500 \cdot (1 + 0,02)^{12} = R\$ 1.902,36$

XIV - REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

DUARTE, Heron Márcio Ferreira. Conhecendo a matemática financeira. Brasília: Ativa Editora Gráfica, 2000.

DUARTE, Heron M. F. Raciocínio Lógico e Quantitativo, DF: Ativa, 1999.

PARENTE, Eduardo, CARIBÉ, Roberto. Matemática Comercial e Financeira. São Paulo: FTD, 1996