



CÁLCULO



Sumário

Sistematização dos Conjuntos Numéricos.....	2
Funções.....	12
Função Polimomial.....	21
Função Exponencial.....	38
Função Logarítmica.....	44
Trigonometria.....	50
Matrizes.....	76
Determinantes.....	83
Sistemas Lineares.....	91
Geometria.....	102

1 Sistematização dos conjuntos numéricos

1.1 Conjuntos numéricos

O conceito de números é um dos mais fundamentais e primitivos na Matemática.

1.1.1 Conjunto dos números naturais

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\};$$

$$N^* = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

1.1.2 Conjunto dos números inteiros

É a ampliação dos números naturais para que a subtração faça sentido.

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\};$$

$$Z^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\};$$

$$Z^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \text{ (inteiros não negativos);}$$

$$Z^- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}, \text{ (Inteiros não positivos).}$$

1.1.3 Conjunto dos números racionais

É qualquer fração envolvendo números inteiros.

$$Q = \left\{ x / x = \frac{p}{q}, p \in Z \text{ e } q \in Z^* \right\}$$

Todo número racional pode ser representado na forma decimal e podemos ter dois casos:

- (a) A representação decimal finita:

Exercício 1 $\frac{3}{4}$

Resolução: $\frac{3}{4} = \dots\dots\dots$

Exercício 2 $\frac{3}{5}$

Resolução: $\frac{3}{5} = \dots\dots\dots$

- (b) A representação decimal infinita periódica:

Exercício 3 $\frac{1}{3}$

Resolução: $\frac{1}{3} = \dots\dots\dots$

Exercício 4 $\frac{47}{90}$

Resolução: $\frac{47}{90} = \dots\dots\dots$

Para se obter representações decimais de um número racional $\frac{p}{q}$, basta dividir p por q . As representações da forma (b) são chamadas dízimas periódicas.

Reciprocamente, podemos representar um número decimal racional na forma $\frac{p}{q}$.

Seja x um número racional. Nos exercícios seguintes, determine x na forma $\frac{p}{q}$.

Exercício 5 $x = 1,25$

Resolução:

$x = \dots\dots\dots$

Exercício 6 $x = 0,666\dots$

Resolução:

$x = \dots\dots\dots$

Exercício 7 $x = 0,5222\dots$

Resolução:

$$x = \dots\dots\dots$$

Exercício 8

$$x = 0,141414\dots$$

Resolução:

$$x = \dots\dots\dots$$

Exercício 9

$$x = 2,171717\dots$$

Resolução:

$$x = \dots\dots\dots$$

Exercício 10

$$x = 0,003777\dots$$

Resolução:

$$x = \dots\dots\dots$$

Exercício 11

$$x = 0,3515151\dots$$

Resolução:

$$x = \dots\dots\dots$$

1.1.4 *Conjunto dos números irracionais*

$I = \{x / x \text{ é um número decimal ilimitado não periódico}\}$

- Nos exercícios abaixo, alguns exemplos de números irracionais:

Exercício 12 $\sqrt{2}$

Resolução: $\sqrt{2} = \dots\dots\dots$

Exercício 13 π

Resolução: $\pi = \dots\dots\dots$

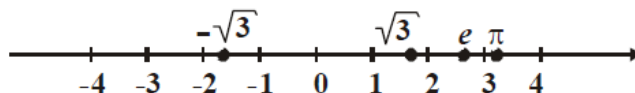
Exercício 14 e

Resolução: $e = \dots\dots\dots$

1.1.5 Conjunto dos números reais

$$R = Q \cup I$$

Existe uma correspondência biunívoca entre todos os números reais e os pontos de uma reta.



[Fig. 1]: Reta real R .

Exercício 15 Mostre que $\sqrt{2} \notin Q$.

Resolução:

1.2 Operações com conjuntos

1.2.1 Noções primitivas

Conjunto, elemento, pertinência entre elementos e conjunto.

Exercício 16 Considerando-se os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{m, n\}$ e $C = \emptyset$ (C é o conjunto vazio), verifique a pertinência ou não dos elementos abaixo aos conjuntos.

Resolução:

- $a \dots\dots\dots A$;
- $n \dots\dots\dots A$;
- $h \dots\dots\dots C$;
- $m \dots\dots\dots B$;
- $c \dots\dots\dots C$;
- $b \dots\dots\dots B$;
- $c \dots\dots\dots A$.

1.2.2 Igualdade de conjuntos

Definição 1 Dois conjuntos A e B são considerados iguais se, e somente se, todo elemento de A pertencer a B e vice-versa.

$$A = B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Exercício 17 Considerando-se os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{m, n\}$, $C = \emptyset$, $D = \{b, c, a\}$, $E = \{\}$ e $F = \{n, m, n\}$, verifique a igualdade ou não dos conjuntos abaixo.

- $D \dots\dots\dots A$;
- $B \dots\dots\dots F$;
- $D \dots\dots\dots A$;
- $A \dots\dots\dots F$;
- $C \dots\dots\dots E$.

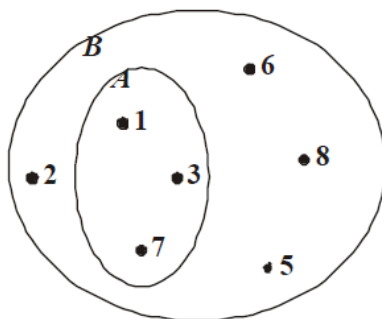
1.2.3 Subconjuntos

Definição 2 Um conjunto A é subconjunto de outro conjunto B quando qualquer elemento de A também pertence a B .

Consideremos os conjuntos A e B , representados também por diagrama:

$$A = \{1, 3, 7\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$$



[Fig. 2]: Diagrama dos conjuntos A e B .

Note que qualquer elemento de A também pertence a B . Nesse caso, dizemos que A é subconjunto de B .

Indica-se: $A \subset B$; lê-se: A está contido em B .

Podemos dizer também que B contém A . Indica-se: $B \supset A$; lê-se: B contém A .

OBS. 1: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

OBS. 2: Os símbolos $\subset$, $\supset$ e $\not\subset$ são utilizados para relacionar conjuntos.

OBS. 3: Para todo conjunto A , tem-se $A \subset A$.

OBS. 4: Para todo conjunto A , tem-se $\emptyset \subset A$, onde $\emptyset$ representa o conjunto vazio.

1.2.4 União de conjuntos

Definição 3 A união de dois conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B .

Designamos a união de A e B por: $A \cup B$; lê-se: A união B .

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

1.2.5 Intersecção de conjuntos

Definição 4 A intersecção de dois conjuntos, A e B , é o conjunto formado pelos elementos que são comuns a A e a B , isto é, pelos elementos que pertencem a A e também pertencem a B .

Designamos a intersecção de A e B por: $A \cap B$; lê-se: A inter B .

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

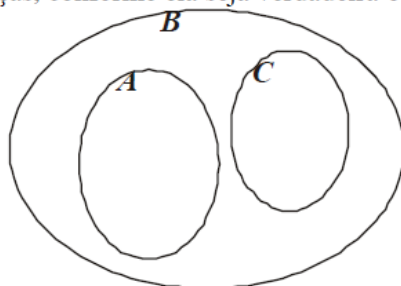
1.2.6 Diferença de conjuntos

Definição 5 A diferença de dois conjuntos A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a A , mas que não pertencem a B .

Designamos a diferença de A e B por: $A - B$; lê-se: A menos B .

$$A - B = \{x / x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Exercício 18 No diagrama seguinte, A , B e C são três conjuntos não vazios. Associe V ou F a cada uma das seguintes sentenças, conforme ela seja verdadeira ou falsa:



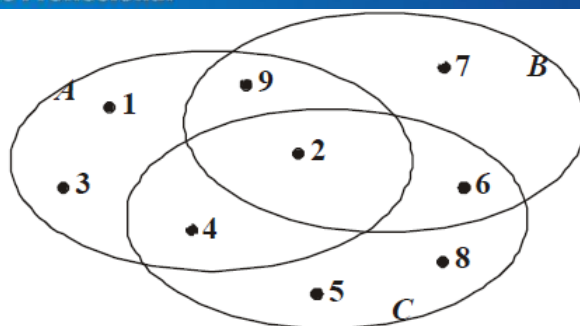
[Fig. 3]: Diagrama dos conjuntos A , B e C (subconjuntos).

Resolução:

- a) $A \subset B$ (.....)
- b) $C \subset B$ (.....)
- c) $B \subset A$ (.....)
- d) $A \subset C$ (.....)
- e) $B \not\subset A$ (.....)
- f) $A \not\subset C$ (.....)
- g) $B \supset A$ (.....)

Exercício 19

Considere o seguinte diagrama:



[Fig. 4]: Diagrama dos conjuntos A , B e C (união / intersecção / diferença).

Resolução:

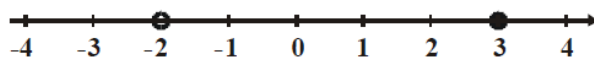
- a) $A \cup B = \{ \dots \}$
- b) $A \cup C = \{ \dots \}$
- c) $B \cup C = \{ \dots \}$
- d) $A \cup B \cup C = \{ \dots \}$
- e) $A \cap B = \{ \dots \}$
- f) $A \cap C = \{ \dots \}$
- g) $B \cap C = \{ \dots \}$
- h) $A \cap B \cap C = \{ \dots \}$
- i) $A - B = \{ \dots \}$
- j) $A - C = \{ \dots \}$
- k) $B - C = \{ \dots \}$
- l) $(A - B) - C = \{ \dots \}$

1.3 Intervalos

O conjunto dos números naturais, dos números inteiros, dos números racionais e dos números irracionais são subconjuntos dos números reais R .

Existem, ainda, outros subconjuntos de R que são determinados por desigualdades. Esses subconjuntos são chamados de intervalos.

Conjunto dos números reais maiores que -2 e menores ou iguais a 3 :



[Fig. 5]: Gráfico do intervalo $]-2,3]$.

Este intervalo contém todos os números reais compreendidos entre os extremos -2 e 3 , incluso.

A bola vazia $\circ$ indica que o extremo -2 não pertence ao intervalo e a bola $\bullet$ indica que o extremo 3 pertence ao intervalo. Este é um intervalo semi-aberto à esquerda.

Representação: $\{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 3\}$ ou $] -2, 3]$.

OBS. 5: Sendo a um número real, pode-se considerar intervalos como o que segue:

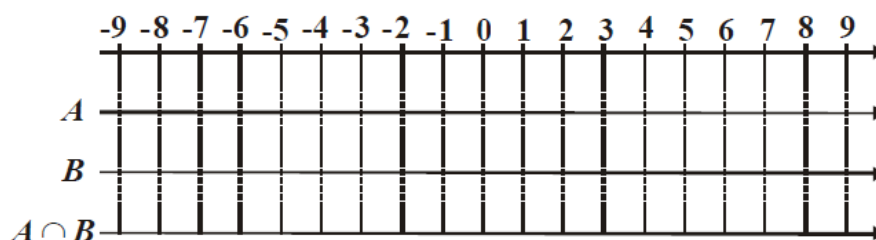
$$\{x \in \mathbb{R} / -2 < x < +\infty\} \text{ ou }] -2, +\infty[\Rightarrow \xrightarrow{-2}$$

1.3.1 Operações com intervalos

Serão consideradas operações do tipo: união ($\cup$), intersecção ($\cap$) e subtração ($-$).

Exercício 20 Se $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 8\}$, determine $A \cap B$.

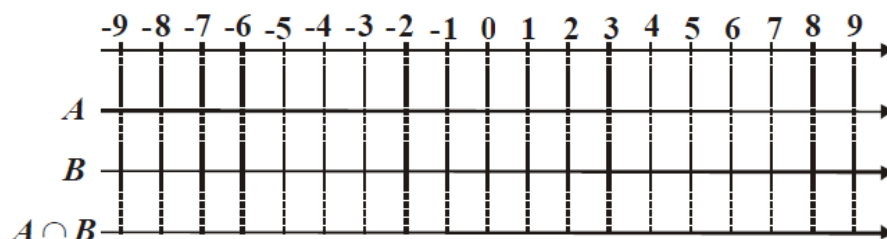
Resolução:



$$A \cap B = \dots\dots\dots$$

Exercício 21 Se $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 3\}$, determine $A \cap B$.

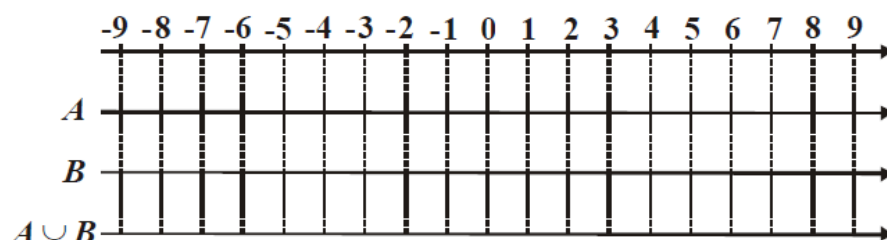
Resolução:



$$A \cap B = \dots\dots\dots$$

Exercício 22 Se $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 4\}$, determine $A \cup B$.

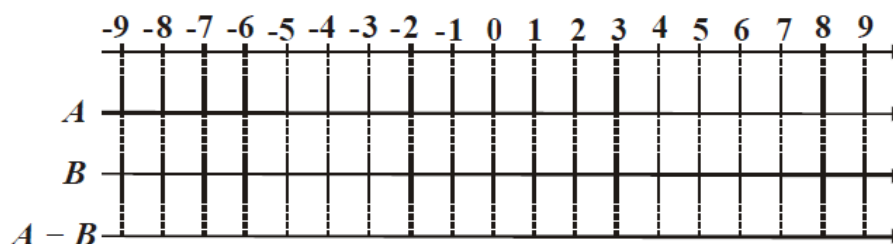
Resolução:



$$A \cup B = \dots\dots\dots$$

Exercício 23 Se $A = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 7\}$, determine $A - B$.

Resolução:

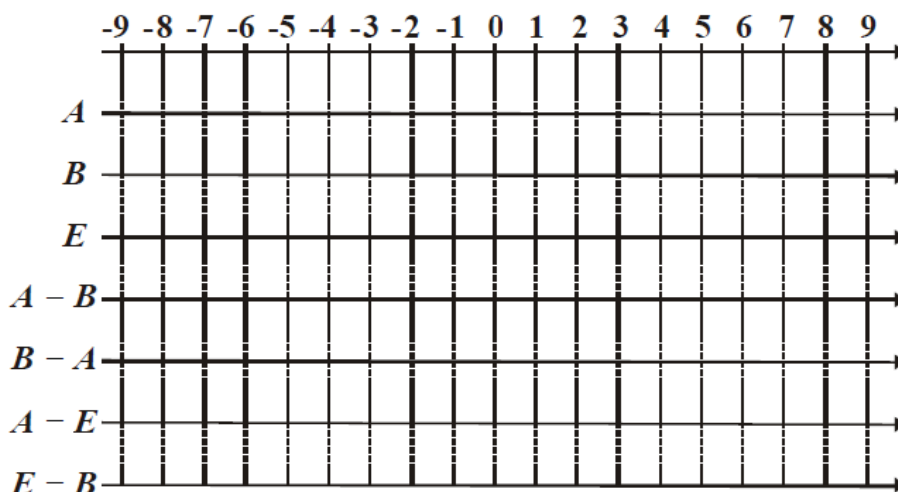


$A - B = \text{.....}$

Exercício 24 Dados $A = [2, 7]$, $B = [-1, 5]$ e $E = [3, 9[$, calcule:

a) $A - B$; b) $B - A$; c) $A - E$; d) $E - B$.

Resolução:



a) $A - B = \text{.....};$

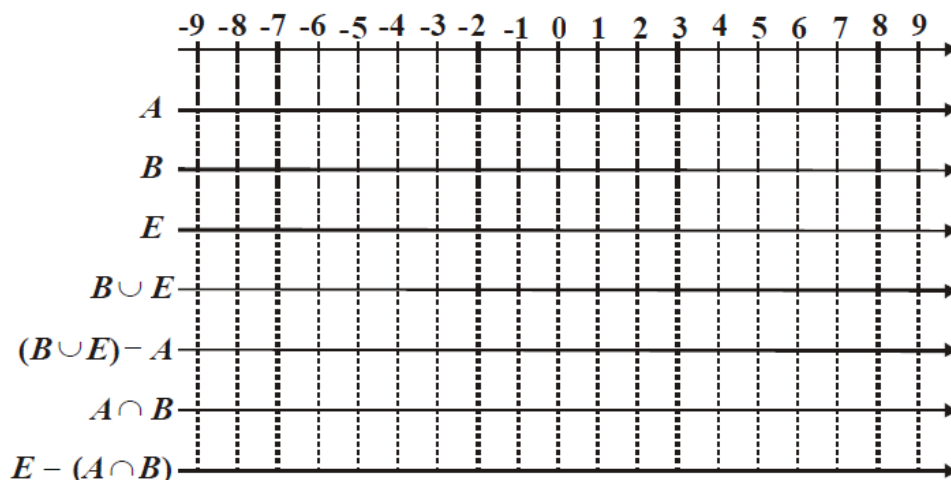
b) $B - A = \text{.....};$

c) $A - E = \text{.....};$

d) $E - B = \text{.....}.$

Exercício 25 Dados $A = [-1, 6[$, $B =]-4, 2]$ e $E =]-2, 4[$, calcule:

a) $(B \cup E) - A$; b) $E - (A \cap B)$.



a) $(B \cup E) - A =$

b) $E - (A \cap B) =$

2 Funções

2.1 Conceito matemático de função

Definição 6

Domínio da função é o conjunto de todos os valores dados para a variável independente.

Definição 7

Imagem da função é o conjunto de todos os valores correspondentes da variável dependente.

Como, em geral, trabalhamos com funções numéricas, o domínio e a imagem são conjuntos numéricos, e podemos definir com mais rigor o que é uma função matemática utilizando a linguagem da teoria dos conjuntos.

Para isso, temos que definir antes o que é um produto cartesiano e uma relação entre dois conjuntos.

Definição 8

Produto cartesiano: Dados dois conjuntos não vazios A e B , denomina-se produto cartesiano (indica-se: $A \times B$) de A por B o conjunto formado pelos pares ordenados nos quais o primeiro elemento pertence a A e o segundo pertence a B .

$$(Eq.1) A \times B = \{ (x, y) / x \in A \text{ e } y \in B \}.$$

Definição 9

Relação: Dados dois conjuntos A e B , dá-se o nome de relação r de A em B a qualquer subconjunto de $A \times B$.

(Eq.2) r é relação de A em $B \Leftrightarrow r \subset A \times B$.

Exercício 26

Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e a relação r de A em B , tal que $y = 2x$, $x \in A$ e $y \in B$. Escrever os elementos dessa relação r .

Resolução:

Como $x \in A$:

$x = 0 \Rightarrow$

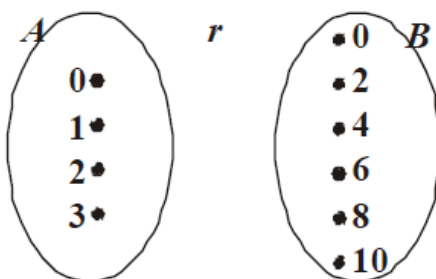
$x = 1 \Rightarrow$

$x = 2 \Rightarrow$

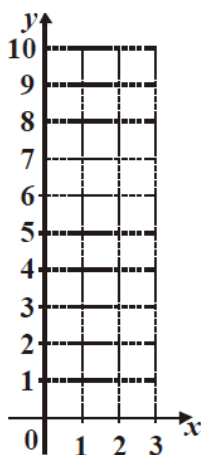
$x = 3 \Rightarrow$

Então, {

..... }.



[Fig. 6]: Representação da relação por diagrama.



[Fig. 7]: Representação da relação por sistema cartesiano.

OBS. 6: Podemos observar que, numa relação r de A em B , o conjunto r é formado pelos pares (x, y) em que o elemento $x \in A$ é associado ao elemento $y \in B$ mediante uma lei de associação (no caso, $y = 2x$).

2.2 Definição de função

Definição 10

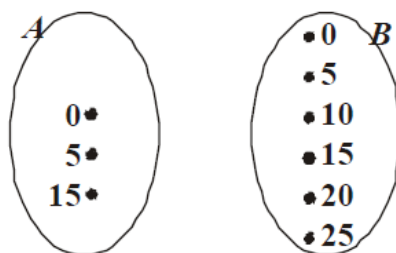
Sejam A e B dois conjuntos não vazios e f uma relação de A em B . Essa relação f é uma função de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e apenas um elemento y do conjunto B .

Nos exercícios a seguir, verifique se as relações representam função de A em B . Justifique sua resposta e apresente o diagrama da relação.

Exercício 27

Dados os conjuntos $A = \{0, 5, 15\}$ e $B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$, seja a relação de A em B expressa pela fórmula $y = x + 5$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Resolução:



$$x=0 \Rightarrow \dots\dots\dots;$$

$$x=5 \Rightarrow \dots\dots\dots;$$

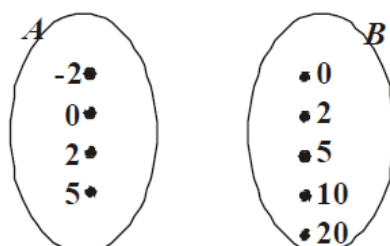
$$x=15 \Rightarrow \dots\dots\dots.$$

- Todos os elementos de A B .
- A cada elemento de A B .

Neste caso, a relação de A em B expressa pela fórmula $y = x + 5$

Exercício 28 Dados os conjuntos $A = \{-2, 0, 2, 5\}$ e $B = \{0, 2, 5, 10, 20\}$, seja a relação de A em B expressa pela fórmula $y = x$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Resolução:

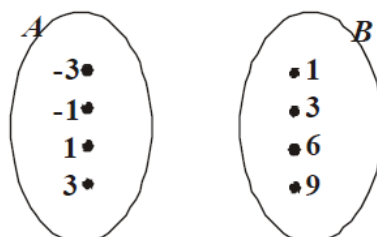


$x=0 \Rightarrow$;
 $x=2 \Rightarrow$;
 $x=5 \Rightarrow$

Neste caso, a relação de A em B

Exercício 29 Dados os conjuntos $A=\{-3,-1,1,3\}$ e $B=\{1,3,6,9\}$, seja a relação de A em B expressa pela fórmula $y=x^2$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Resolução:



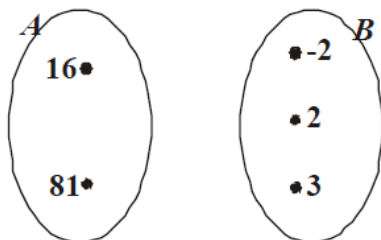
$x=-3 \Rightarrow$;
 $x=-1 \Rightarrow$;
 $x=1 \Rightarrow$;
 $x=3 \Rightarrow$

Neste caso, a relação de A em B

Exercício 30 Dados os conjuntos $A=\{16,81\}$ e $B=\{-2,2,3\}$, seja a relação de A em B expressa pela fórmula $y^4=x$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Exercício 30 Dados os conjuntos $A = \{16, 81\}$ e $B = \{-2, 2, 3\}$, seja a relação de A em B expressa pela fórmula $y^4 = x$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Resolução:



$x = 16 \Rightarrow$;
 $x = 81 \Rightarrow$

Neste caso, a relação de A em B

2.3 Notação de função

Quando temos uma função de A em B , podemos representá-la da seguinte forma:

$f: A \rightarrow B$ (lê-se: função de A em B)

x a y (lê-se: a cada valor de $x \in A$ associa-se um só valor $y \in B$)

A letra f , em geral, dá o nome às funções, mas podemos ter também a função g , h , etc.

Numa função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada pela fórmula $y = x^2 - 8$, podemos também escrever $g(x) = x^2 - 8$. Neste caso, $g(2)$ significa o valor de y quando $x = 2$, ou $g(2) = -6$.

2.4 Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Uma função f com domínio A e imagens em B será denotada por:

$f: A \rightarrow B$ (função que associa valores do conjunto A a valores do conjunto B)

x a $y = f(x)$ (a cada elemento $x \in A$ corresponde um único $y \in B$)

O conjunto A é denominado domínio da função, que indicaremos por D . O domínio da função também chamado campo de definição ou campo de existência da função, serve para definir em que conjunto estamos trabalhando, isto é, os valores possíveis para a variável x .

O conjunto B é denominado contradomínio da função, que indicaremos por CD . É no contradomínio que estão os elementos que podem corresponder aos elementos do domínio.

Cada elemento x do domínio tem um correspondente y no contradomínio. A esse valor de y damos o nome de imagem de x pela função f . O conjunto de todos os valores de y que são imagens de valores de x forma o conjunto imagem da função, que indicaremos por **Im**. Note que o conjunto imagem da função é um subconjunto do contradomínio da mesma.

$f: A \rightarrow B$

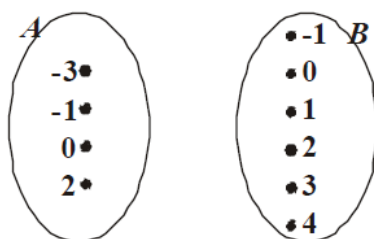
$x \text{ a } y = f(x)$

$D = A$, $CD = B$, $\text{Im} = \{ y \in CD / y \text{ é correspondente de algum valor de } x \}$.

Exercício 31

Dados os conjuntos $A = \{-3, -1, 0, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, determinar o conjunto imagem da função $f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = x + 2$.

Resolução:



$\text{Im} = \{ \dots \}$

Exercício 32 Dada a função $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in R$, calcular a e b , sabendo que $f(1) = 4$ e $f(-1) = -2$.

Resolução:

$a = \dots$ e $b = \dots \Rightarrow f(x) = \dots$

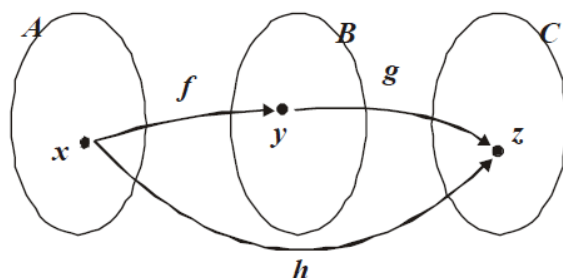
2.5 Função composta

Tome as funções $f: A \rightarrow B$, definida por $f(x) = 2x$, e $g: B \rightarrow C$, definida por $g(x) = x^2$. Note que o contradomínio B da função f é o mesmo domínio da função g .

$f: A \rightarrow B$: a cada $x \in A$ associa-se um único $y \in B$, tal que $y = 2x$.

$g: B \rightarrow C$: a cada $y \in B$ associa-se um único $z \in C$, tal que $z = y^2$.

Neste caso, podemos considerar uma terceira função, $h: A \rightarrow C$, que faz a composição entre as funções f e g :



[Fig. 8]: Função composta

$h: A \rightarrow C$: a cada $x \in A$ associa-se um único $z \in C$, tal que $z = y^2 = (2x)^2 = 4x^2$.

Essa função h de A em C , dada por $h(x) = 4x^2$, é denominada função composta de g e f .

De um modo geral, para indicar como o elemento $z \in C$ é determinado de modo único pelo elemento $x \in A$, escrevemos:

$$z = g(y) = g(f(x))$$

Notação:

A função composta de g e f será indicada por $g \circ f$ (lê-se: g círculo f)

$$(Eq.3) \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Exercício 33 Sejam as funções reais f e g definidas respectivamente por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x^2 - 3$. Determine:

- a) $f(g(x))$.

Resolução:

$$f(g(x)) = \dots\dots\dots$$

- b) $g(f(x))$.

- $g(f(x)) = \dots\dots\dots$.

c) Os valores de x para que se tenha $f(g(x)) = g(f(x))$.

Resolução:

$$x = \dots\dots\dots$$

Exercício 34 Sendo $f(x) = 3x - 1$ e $f(g(x)) = 6x + 8$, determine $g(x)$.

Resolução:

$$g(x) = \dots\dots\dots$$

2.6 Função inversa

Definição 11

Função bijetora: A função f é denominada BIJETORA, se satisfaz as duas condições abaixo:

- 1. O contradomínio de f coincide com sua imagem, ou seja, todo elemento do contradomínio é correspondente de algum elemento do domínio.
- 2. Cada elemento do contradomínio de f é imagem de um único elemento do domínio.

Definição 12

Diz-se que uma função f possui inversa f^{-1} se for bijetora.

2.6.1 Determinação da função inversa

Caso a função seja bijetora, possuindo portanto inversa, é possível determinar a sua inversa. Para isso “trocamos” a variável x por y na lei que define a função e em seguida “isolamos” o y , obtendo a lei que define a função inversa.

É preciso apenas tomar certo cuidado com o domínio da nova função obtida.

Exercício 35

Obter a lei da função inversa f^{-1} da função f dada por $y = x + 2$.

Resolução:

Logo:

$$f(x) = \dots\dots\dots \text{ e } f^{-1}(x) = \dots\dots\dots$$

Exercício 36

Construir os gráficos das funções f e f^{-1} do exercício anterior, num mesmo sistema de coordenadas.

Exercício 37 Determinar a função inversa g^{-1} da função $g(x) = \frac{x+5}{2x-3}$, cujo domínio é

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

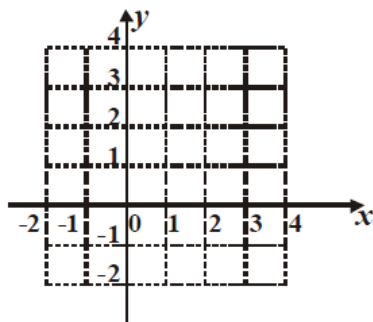
Resolução:

Resolução:

x	$f(x)$

x	$f^{-1}(x)$

Note que os gráficos das funções f e f^{-1} são simétricos em relação à reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.



Logo, $g^{-1} : \dots \rightarrow \dots$ dada por y
 $= \dots$ é a função inversa procurada.

3 Função Polinomial

Definição 13 Função polinomial com uma variável ou simplesmente função polinomial é aquela cuja formulação matemática é expressa por um polinômio.

3.1 Função polinomial do 1º grau

A função polinomial do 1º grau é a que tem sua representação matemática por um polinômio de grau 1.

Representação da função polinomial do 1º grau:

$f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$). a e b são os coeficientes e x a variável independente.

Exercício 38 Em uma função polinomial do 1º grau, $y = f(x)$, sabe-se que $f(1) = 4$ e $f(-2) = 10$. Escreva a função f e calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Resolução:

A função é $f(x) = \dots$ e $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \dots$.

3.1.1 Função linear

Seja a função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$. No caso de $b = 0$, temos $f(x) = ax$, e ela recebe o nome especial de função linear.

OBS. 7: Se, em uma função linear tivermos $a = 1$, teremos $f(x) = x$ ou $y = x$, que se dá o nome de função identidade.

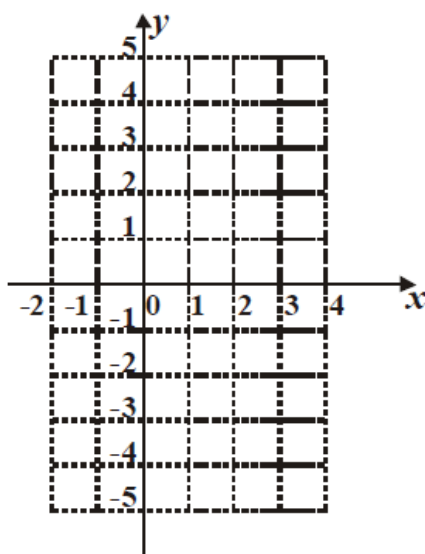
3.1.2 Gráfico de uma função polinomial do 1º grau

Para construir o gráfico de uma função polinomial do 1º grau, atribuímos valores do domínio à variável x e calculamos as respectivas imagens.

Exercício 39 Construir o gráfico da função real f dada por $y = 2x - 1$.

Resolução:

x	y	Par ordenado
-2		(,)
-1		(,)
0		(,)
1		(,)
2		(,)
3		(,)



Resolução:

Sabendo-se que $y = ax + b$, do gráfico, temos que:

Resolução: Sabendo-se que $y = ax + b$, do gráfico, temos que:

Resolução: Sabendo-se que $y = ax + b$, do gráfico, temos que:

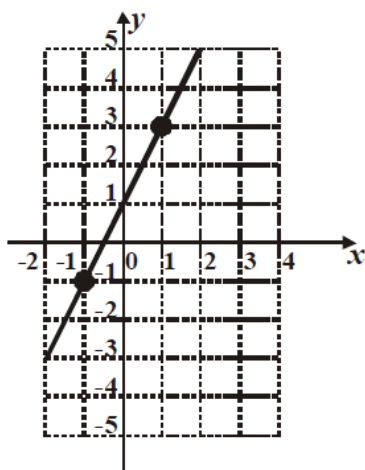
Definição 14 O gráfico da função linear $y = a x$ ($a \neq 0$) é sempre uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano.

Definição 15 O gráfico da função polinomial do 1º grau $y = a x + b$ ($a \neq 0$) intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, b)$.

3.1.3 Determinação de uma função a partir do gráfico

Nos exercícios abaixo, determine a lei de formação da função $f(x) = a x + b$.

Exercício 40 Determine a lei de formação da função f , cujo gráfico cartesiano é:

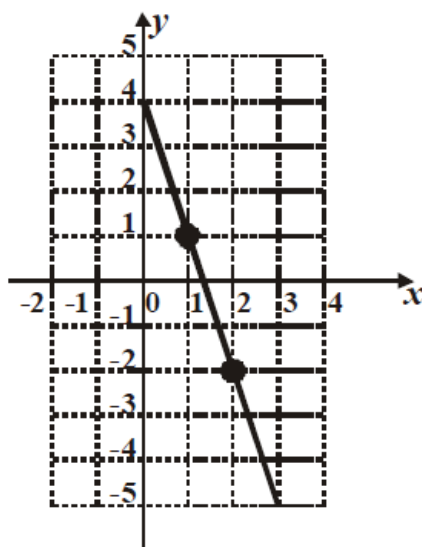


Resolução: Sabendo-se que $y = a x + b$, do gráfico, temos que:

Logo:

A função é $f(x) = \dots\dots\dots$.

Exercício 41 Determine a lei de formação da função f , cujo gráfico cartesiano é:



Resolução: Sabendo-se que $y = a x + b$, do gráfico, temos que:

Logo:

A função é $f(x) = \dots\dots\dots$.

3.1.4 Crescimento e decrescimento de uma função polinomial do 1º grau

Seja f a função polinomial do 1º grau definida por $f(x) = ax + b$.

Podemos determinar que:

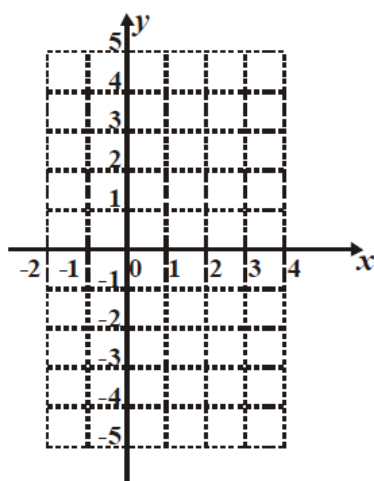
- i) A função f é crescente se o coeficiente $a > 0$;
- ii) A função f é decrescente se o coeficiente $a < 0$.

Exercício 42 Construir os gráficos das funções f e g do 1º grau a seguir:

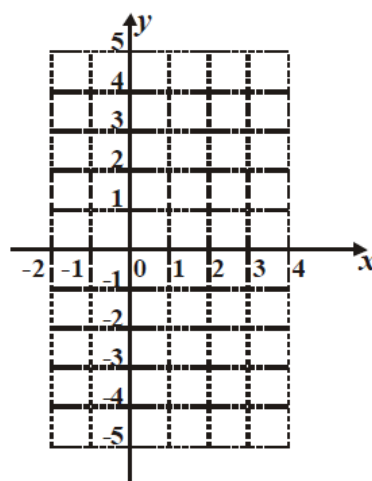
i) $f(x) = 2x + 1$

ii) $g(x) = -2x + 1$

Resolução:



- i) Aumentando os valores atribuídos a x , aumentam também os valores correspondentes da imagem $f(x)$.



- ii) Aumentando os valores atribuídos a x , diminuem os valores correspondentes da imagem $g(x)$.

3.1.5 Estudo do sinal da função polinomial do 1º grau

Definição 16 Estudar o sinal de uma função f significa determinar para que valores de x temos $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$.

3.1.5.1 Zero de uma função polinomial do 1º grau

Definição 17

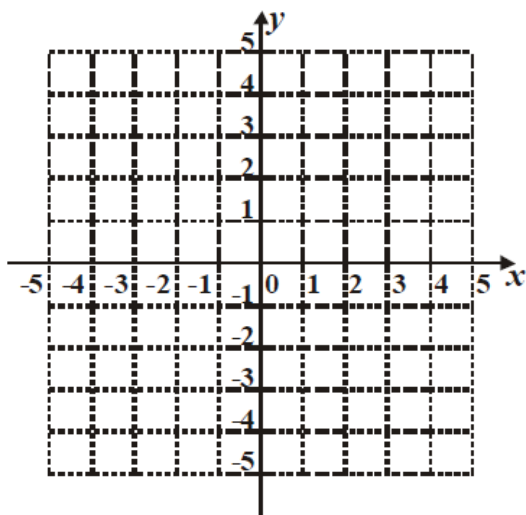
Denomina-se zero ou raiz da função $f(x) = ax + b$ o valor de x que anula a função, isto é, torna $f(x) = 0$.

Definição 18

Geometricamente, o zero da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, é a abscissa do ponto em que a reta corta o eixo x .

Exercício 43 Dada a lei de formação da função $y = -2x - 4$, construir o gráfico e determinar os valores reais de x para os quais: a) $y = 0$; b) $y > 0$ e c) $y < 0$.

Resolução:



Podemos notar que a função é decrescente, pois $a < 0$.

O zero da função é: $-2x - 4 = 0 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$.

Logo, a reta intercepta o eixo x no ponto de abscissa $x = -2$.

A solução do problema é:

- a) $f(x) = 0 \Rightarrow \{ \dots \}$;
- b) $f(x) > 0 \Rightarrow \{ \dots \}$;
- c) $f(x) < 0 \Rightarrow \{ \dots \}$.

3.1.5.2 Quadro de sinais da função polinomial do 1º grau

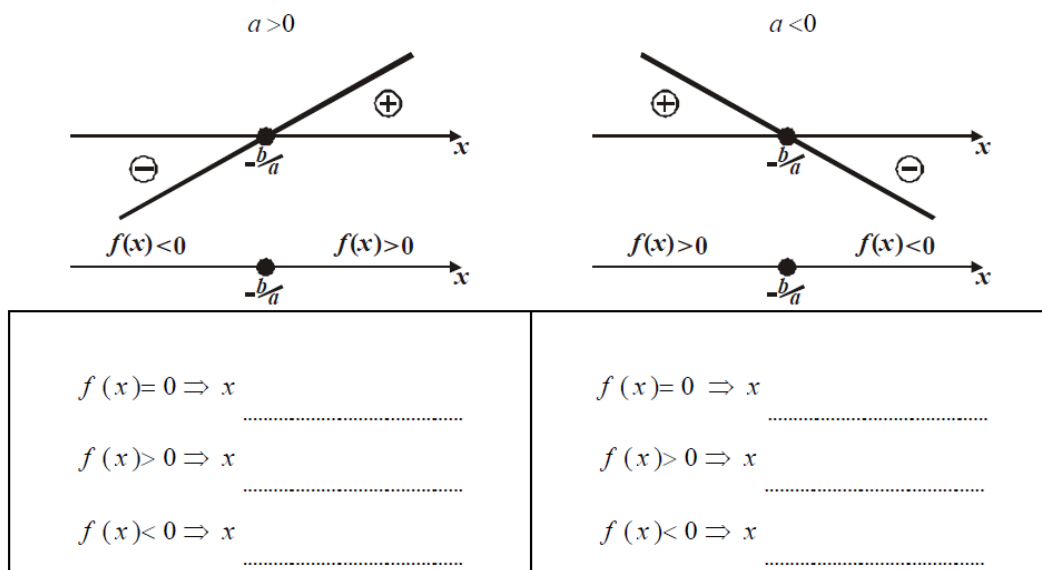
Exercício 44

Preencher o quadro abaixo:

Resolução:

$f(x) = ax + b$, $a \neq 0$

Zero da função: $ax + b = 0 \Rightarrow x =$



3.2 Inequações do 1o grau

Definição 19

Denomina-se inequação do 1o grau na variável x toda desigualdade que pode ser reduzida a uma das formas:

- $ax + b \geq 0$;
- $ax + b > 0$;
- $ax + b \leq 0$;
- $ax + b < 0$.

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exercício 45

Verificar se $4(x-1) - x^2 \geq 3x - x(x+1)$ é uma inequação do 1o grau.

Resolução:

Logo,.....

3.2.1 Resolução de inequações do 1o grau

Definição 20

Para se resolver uma inequação do 1o grau, são utilizadas as propriedades das desigualdades, apresentando-se o conjunto verdade da inequação (conjunto solução S).

Exercício 46

Resolver a inequação seguinte: $4(x-1) - x^2 \geq 3x - x(x+1)$. Represente a solução na reta real.

Resolução:

$S = \{ \dots \}$



Exercício 47 Resolver a inequação seguinte: $\frac{x-1}{3} + \frac{4(1-x)}{2} > \frac{x}{4} + \frac{2-x}{6}$. Represente a solução na reta real.

Resolução:

$S = \{ \dots \}$



3.2.2 Sistemas de inequações do 1º grau

Definição 21 O conjunto solução S de um sistema de inequações é determinado pela intersecção dos conjuntos soluções de cada inequação do sistema.

$S = \{ \dots \}$



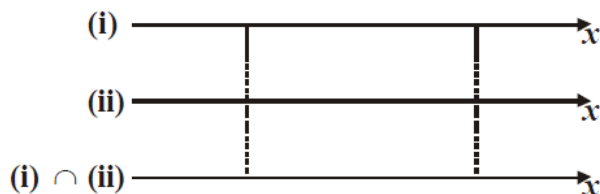
3.2.2 Sistemas de inequações do 1º grau

Definição 21 O conjunto solução S de um sistema de inequações é determinado pela intersecção dos conjuntos soluções de cada inequação do sistema.

Exercício 48 Resolver a inequação $-1 < 2x - 3 \leq x$. Apresente o conjunto solução S e represente na reta real.

Resolução:

Na verdade, resolver essa inequação simultânea é equivalente a resolver o sistema:



$$S = \{ \dots \}$$

3.2.3 Inequação-produto e inequação-quociente

Uma inequação do 2º grau do tipo $x^2 + 2x - 8 \geq 0$ pode ser expressa por um produto de inequações do 1º grau, fatorando o 1º membro da desigualdade:

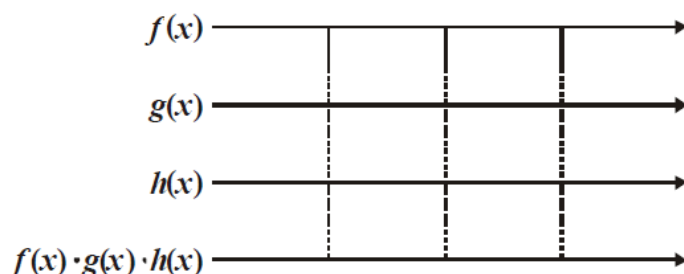
$$x^2 + 2x - 8 \geq 0 \Rightarrow (x - 2) \cdot (x + 4) \geq 0.$$

Definição 22 RESOLUÇÃO: Para resolver uma inequação-produto ou um inequação-quociente, fazemos o estudo dos sinais das funções polinomiais do 1º grau envolvidas. A seguir, determinamos o sinal do produto ou quociente dessas funções, lembrando as regras de sinais do produto e do quociente de números reais.

Exercício 49 Resolver a inequação $(x^2 + x - 2) \cdot (-x + 2) \leq 0$.

Resolução: $(x^2 + x - 2) \cdot (-x + 2) \leq 0 \Rightarrow \dots$

$f(x) = \dots \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>$x =$</td><td></td></tr></table>	$x =$		<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>a</td><td>0</td></tr></table>	a	0
$x =$						
a	0					
$g(x) = \dots \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>$x =$</td><td></td></tr></table>	$x =$		<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>a</td><td>0</td></tr></table>	a	0
$x =$						
a	0					
$h(x) = \dots \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>$x =$</td><td></td></tr></table>	$x =$		<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>a</td><td>0</td></tr></table>	a	0
$x =$						
a	0					

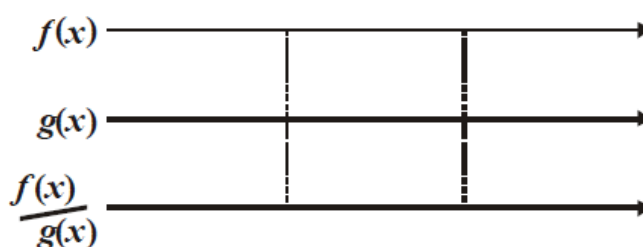


$$S = \{ \dots \}$$

Exercício 50 Resolver a inequação $\frac{-3x + 1}{x - 2} \geq 0$.

Resolução:

$f(x) = \dots \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>$x =$</td><td></td></tr></table>	$x =$		<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>a</td><td>0</td></tr></table>	a	0
$x =$						
a	0					
$g(x) = \dots \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>$x =$</td><td></td></tr></table>	$x =$		<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>a</td><td>0</td></tr></table>	a	0
$x =$						
a	0					

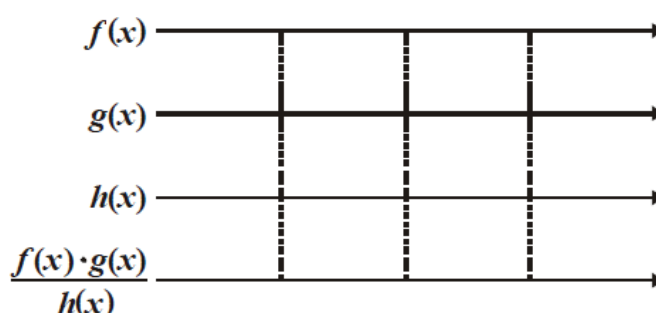


$S = \{ \dots \}$

Exercício 51 Resolver a inequação $\frac{x^2 - 9}{x - 2} \leq 0$.

Resolução: $\frac{x^2 - 9}{x - 2} \leq 0 \Rightarrow \dots$

$f(x) = \dots \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$	<table border="1"><tr><td>$x =$</td><td></td></tr></table>	$x =$		<table border="1"><tr><td>a</td><td>0</td></tr></table>	a	0
$x =$						
a	0					
$g(x) = \dots \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow$	<table border="1"><tr><td>$x =$</td><td></td></tr></table>	$x =$		<table border="1"><tr><td>a</td><td>0</td></tr></table>	a	0
$x =$						
a	0					
$h(x) = \dots \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow$	<table border="1"><tr><td>$x =$</td><td></td></tr></table>	$x =$		<table border="1"><tr><td>a</td><td>0</td></tr></table>	a	0
$x =$						
a	0					

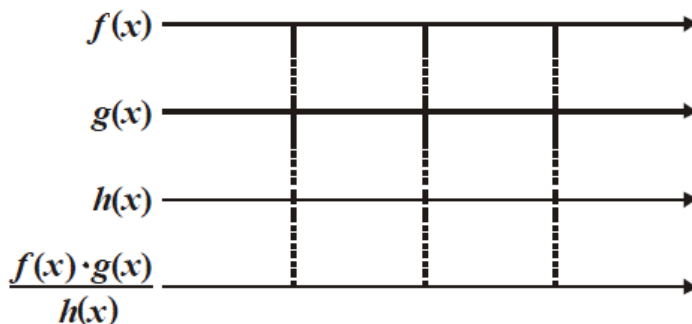


$S = \{ \dots \}$

Exercício 52 Determine o domínio da função $y = \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 5}}$.

Resolução: $\dots \Rightarrow \dots$

$f(x) = \dots \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$	<table border="1"><tr><td>$x =$</td><td></td></tr></table>	$x =$		<table border="1"><tr><td>a</td><td>0</td></tr></table>	a	0
$x =$						
a	0					
$g(x) = \dots \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow$	<table border="1"><tr><td>$x =$</td><td></td></tr></table>	$x =$		<table border="1"><tr><td>a</td><td>0</td></tr></table>	a	0
$x =$						
a	0					
$h(x) = \dots \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow$	<table border="1"><tr><td>$x =$</td><td></td></tr></table>	$x =$		<table border="1"><tr><td>a</td><td>0</td></tr></table>	a	0
$x =$						
a	0					



$D = \{ \dots \}$

3.3 Função polinomial do 2o grau

Definição 23

A função $f: R \rightarrow R$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, denomina-se função polinomial do 2o grau ou função quadrática. Os números representados por a, b e c são os coeficientes da função. Note que se $a = 0$ temos uma função do 1o grau ou uma função constante.

Exercício 53

Considere a função f do 2o grau, em que $f(0)=5$, $f(1)=3$ e $f(-1)=1$. Escreva a lei de formação dessa função e calcule $f(5)$.

Resolução: Tome $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

$$f(0) = 5 \Rightarrow$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow$$

$$f(-1) = 1 \Rightarrow$$

A lei de formação da função será $f(x) = \dots$

$$f(5) = \dots$$

3.3.1 Gráfico de uma função quadrática

O gráfico de uma função polinomial do 2o grau ou quadrática é uma curva aberta chamada parábola.

Para evitar a determinação de um número muito grande de pontos e obter uma boa representação gráfica, vamos destacar três importantes características do gráfico da função quadrática:

(i)

Concavidade

(ii)

Posição em relação ao eixo x

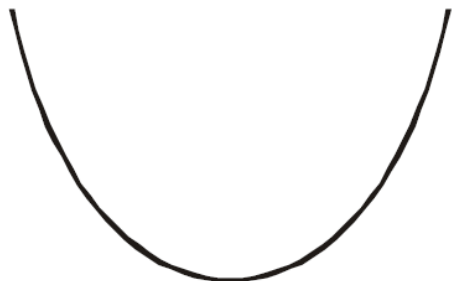
(iii)

Localização do seu vértice

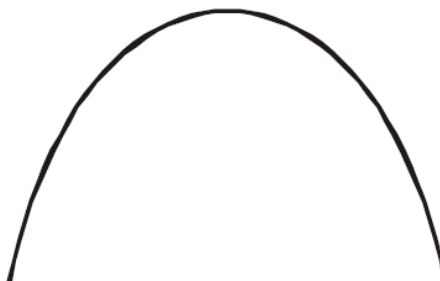
3.3.2 Concavidade

A concavidade de uma parábola que representa uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ do 2º grau depende do sinal do coeficiente a :

$a > 0$: concavidade para CIMA



$a < 0$: concavidade para BAIXO



[Fig. 9]: Concavidade de uma função quadrática.

3.3.3 Zeros de uma função quadrática

Definição 24 Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, ou seja:

$$\text{Raízes: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Considerando $\Delta = b^2 - 4ac$, pode-se ocorrer três situações:

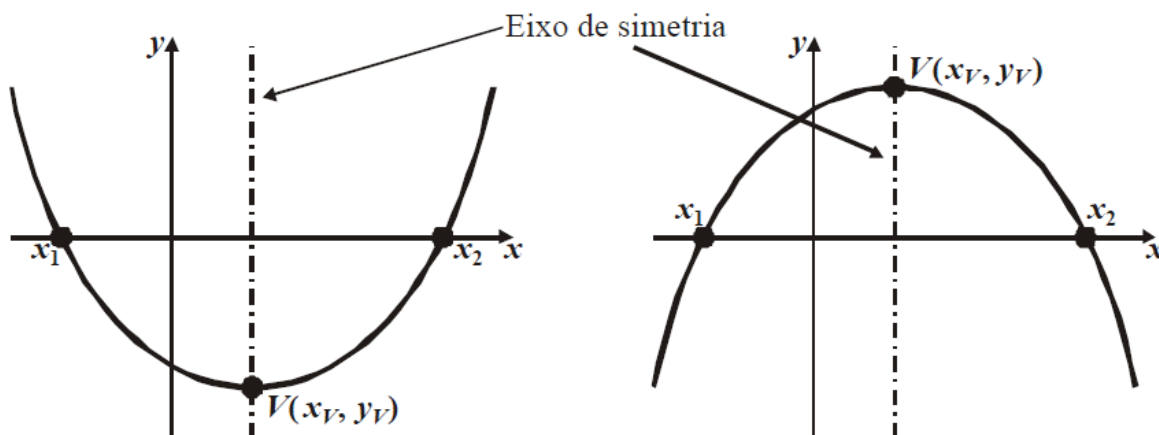
- i) $\Delta > 0 \Rightarrow$ as duas raízes são reais e diferentes: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- ii) $\Delta = 0 \Rightarrow$ as duas raízes são reais e iguais (raiz dupla): $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- iii) $\Delta < 0 \Rightarrow$ não há raízes reais.

OBS. 8: Em uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, a soma das raízes é S e o produto é P tal que: $S = \boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$ e $P = \boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$.

Definição 25 Geometricamente, os zeros ou raízes de uma função polinomial do 2º grau são as abscissa dos pontos em que a parábola intercepta o eixo x .

3.3.4 Vértice da parábola

Considere as parábolas abaixo e observe o vértice $V(x_V, y_V)$ em cada uma:



[Fig. 10]: Vértice de parábolas ($\Delta > 0$ para as duas).

Uma forma de se obter o vértice $V(x_V, y_V)$ é:

- $x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}$, já que o vértice encontra-se no eixo de simetria da parábola;
- $y_V = a x_V^2 + b x_V + c$, já que o x_V foi obtido acima.

Outra forma de se obter o vértice $V(x_V, y_V)$ é aplicando as fórmulas:

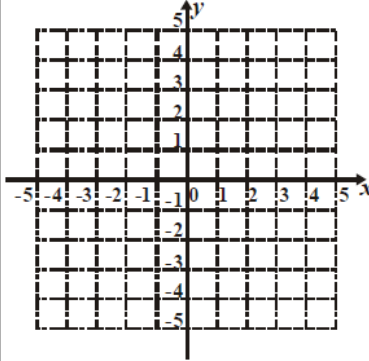
- $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$.

3.3.5 Gráfico de uma parábola

Com o conhecimento das principais características de uma parábola, podemos esboçar com mais facilidade o gráfico de uma função quadrática.

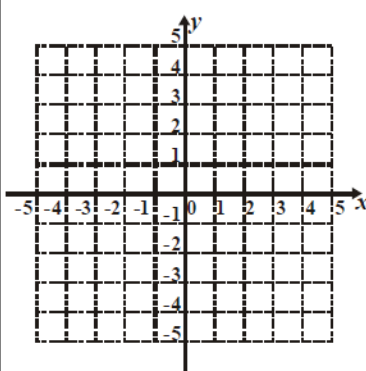
Exercício 54 Construir o gráfico da função $y = x^2 + 2x$, determinando sua imagem.

Resolução:

a $\Rightarrow$ concavidade voltada para	
Zeros da função:	
Ponto onde a parábola corta o eixo y : $\Rightarrow$ (.....,.....)	
Vértice da parábola: $x_V =$ $\Rightarrow V$ (.....,.....) $y_V =$	
Imagem: $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R}; \dots\dots\dots\}$	

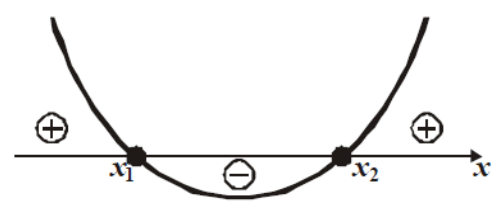
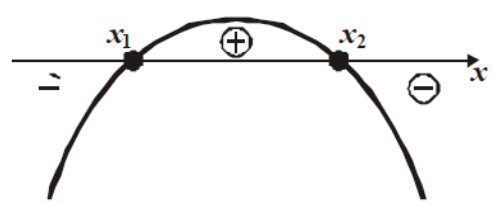
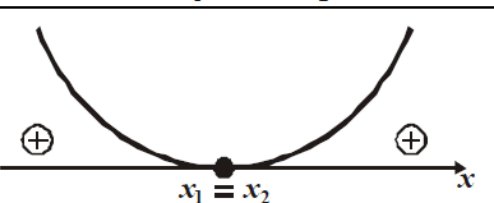
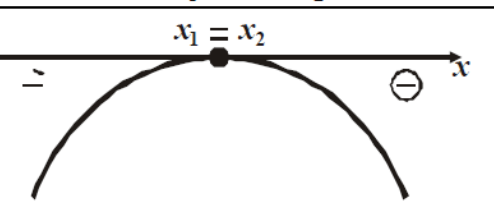
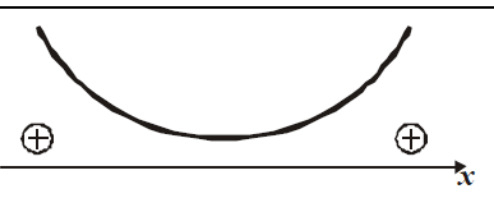
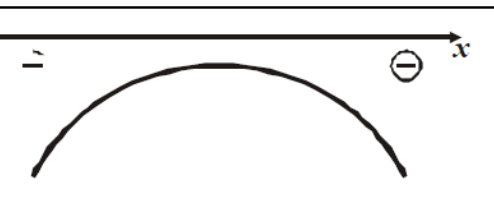
Exercício 55 Construir o gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 5$, determinando sua imagem.

Resolução:

$a \dots \Rightarrow$ concavidade voltada para $\dots$.	
Zeros da função:	
Ponto onde a parábola corta o eixo y : $\Rightarrow (\dots, \dots)$	
Vértice da parábola: $x_V = \dots$ $y_V = \dots \Rightarrow V(\dots, \dots)$	
Imagem: $\text{Im} = \{y \in R; \dots\}$	

3.3.6 Estudo do sinal da função quadrática

Os valores reais de x que tornam a função quadrática positiva, negativa ou nula, podem ser dados considerando-se os casos, relacionados na tabela abaixo.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ com $(a, b \text{ e } c \in R \text{ e } a \neq 0)$	
$a > 0$	$a < 0$
 $f(x) > 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$ $f(x) < 0$ para $x_1 < x < x_2$ $f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$	 $f(x) < 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$ $f(x) > 0$ para $x_1 < x < x_2$ $f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$
 $f(x) > 0$ para $x \neq x_1$ $f(x) < 0 \nexists x \text{ real}$ $f(x) = 0$ para $x = x_1 = x_2$	 $f(x) < 0$ para $x \neq x_1$ $f(x) > 0 \nexists x \text{ real}$ $f(x) = 0$ para $x = x_1 = x_2$
 $f(x) > 0 \forall x \text{ real}$ $f(x) < 0 \nexists x \text{ real}$ $f(x) = 0 \nexists x \text{ real}$	 $f(x) < 0 \forall x \text{ real}$ $f(x) > 0 \nexists x \text{ real}$ $f(x) = 0 \nexists x \text{ real}$

3.4 Inequações do 2º grau

Definição 26 Denomina-se inequação do 2º grau na variável x toda desigualdade que pode ser reduzida a uma das formas:

- $a x^2 + b x + c \geq 0$;
 - $a x^2 + b x + c > 0$;
 - $a x^2 + b x + c \leq 0$;
 - $a x^2 + b x + c < 0$.
- com $a, b, c \in R$ e $a \neq 0$.

3.4.1 Resolução de inequações do 2º grau

Definição 27 Para se resolver uma inequação do 2º grau, são utilizadas as propriedades das desigualdades, apresentando-se o conjunto verdade da inequação (conjunto solução S).

Exercício 56 Resolver a inequação $x^2 - 3x + 2 > 0$.

Resolução: Estudar a variação do sinal da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a $\Rightarrow$ Concavidade para

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Δ $\Rightarrow$

$x =$

S=

Exercício 57 Resolver a inequação $x^2 - 10x + 25 \geq 0$.

Resolução: Estudar a variação do sinal da função $f(x) = x^2 - 10x + 25$.

a $\Rightarrow$ Concavidade para

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

Δ $\Rightarrow$

$x =$

S=

Exercício 58 Resolver a inequação $-2x^2 + 5x - 6 > 0$.

Resolução: Estudar a variação do sinal da função $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$.

a $\Rightarrow$ Concavidade para

$$-2x^2 + 5x - 6 = 0$$

Δ $\Rightarrow$

$x =$

S=

3.4.2 Sistemas de inequações do 2º grau

Definição 28 O conjunto solução S de um sistema de inequações é determinado pela intersecção dos conjuntos soluções de cada inequação do sistema.

Exercício 59 Resolver o sistema de inequações $\begin{cases} 2x^2 + 8 \geq x^2 - 6x \\ x + 5 < 0 \end{cases}$.

Resolução:

(i) $\Rightarrow 2x^2 + 8 \geq x^2 - 6x$.

(ii) $\Rightarrow x + 5 < 0$.

Resolução de (i):

a $\Rightarrow$ Concavidade para

Δ $\Rightarrow$ 

$x =$

$S(i) =$ Reta real: 

Resolução de (ii):

$S(ii) =$ Reta real: 

Intersecção entre (i) e (ii) $\Rightarrow (i) \cap (ii)$:

(i) 

(ii) 

$(i) \cap (ii)$  S

Exercício 60 Resolver a inequação $x - 4 < x^2 - 4 \leq x + 2$.

Resolução:

(i) $\Rightarrow x - 4 < x^2 - 4$.

(ii) $\Rightarrow x^2 - 4 \leq x + 2$.

Resolução de (i):

a $\Rightarrow$ Concavidade para

Δ $\Rightarrow$ 

$x =$

$S(i) =$ Reta real: 

Resolução de (ii):

a $\Rightarrow$ Concavidade para

Δ $\Rightarrow$ 

$x =$

$S(ii) = \dots\dots\dots$. Reta real: $\xrightarrow{\hspace{10em}} x$
 Intersecção entre (i) e (ii) $\Rightarrow (i) \cap (ii)$:
 (i) $\xrightarrow{\hspace{10em}} x$
 (ii) $\xrightarrow{\hspace{10em}} x$
 (i) $\cap$ (ii) $\xrightarrow{\hspace{10em}} x$ S $\dots\dots\dots$.

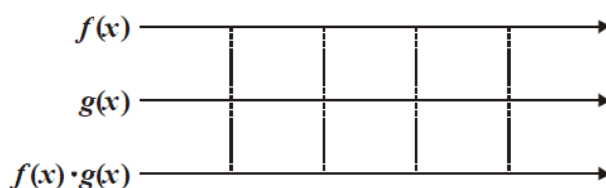
3.4.3 Inequação-produto e inequação-quociente

Definição 29 RESOLUÇÃO: Para resolver uma inequação-produto ou uma inequação-quociente, fazemos o estudo dos sinais das funções polinomiais envolvidas. A seguir, determinamos o sinal do produto ou quociente dessas funções, lembrando as regras de sinais do produto e do quociente de números reais.

Exercício 61 Resolver a inequação $(x^2 - 2x - 3) \cdot (-x^2 - 3x + 4) > 0$.

Resolução:

$$\begin{array}{lclclclcl} f(x) & = & x^2 - 2x - 3 & \Rightarrow & a & \dots\dots\dots & 0 & \Rightarrow & \Delta = & \dots\dots\dots & \Rightarrow & x_1 & \dots\dots\dots & \text{e} & x_2 & \dots\dots\dots \\ g(x) & = & -x^2 - 3x + 4 & \Rightarrow & a & \dots\dots\dots & 0 & \Rightarrow & \Delta = & \dots\dots\dots & \Rightarrow & x_1 & \dots\dots\dots & \text{e} & x_2 & \dots\dots\dots \\ & & f(x) & & & & & & & & & & & & g(x) & \end{array}$$



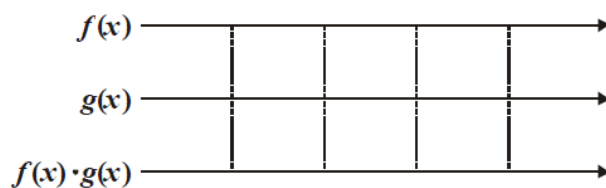
S = $\dots\dots\dots$.

Exercício 62 Resolver a inequação $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 16} \geq 0$.

Resolução:

$$\begin{array}{lclclclcl} f(x) & = & x^2 - 5x + 6 & \Rightarrow & a & \dots\dots\dots & 0 & \Rightarrow & \Delta = & \dots\dots\dots & \Rightarrow & x_1 & \dots\dots\dots & \text{e} & x_2 & \dots\dots\dots \\ g(x) & = & -x^2 - 16 & \Rightarrow & a & \dots\dots\dots & 0 & \Rightarrow & \Delta = & \dots\dots\dots & \Rightarrow & x_1 & \dots\dots\dots & \text{e} & x_2 & \dots\dots\dots \\ & & f(x) & & & & & & & & & & & & g(x) & \end{array}$$



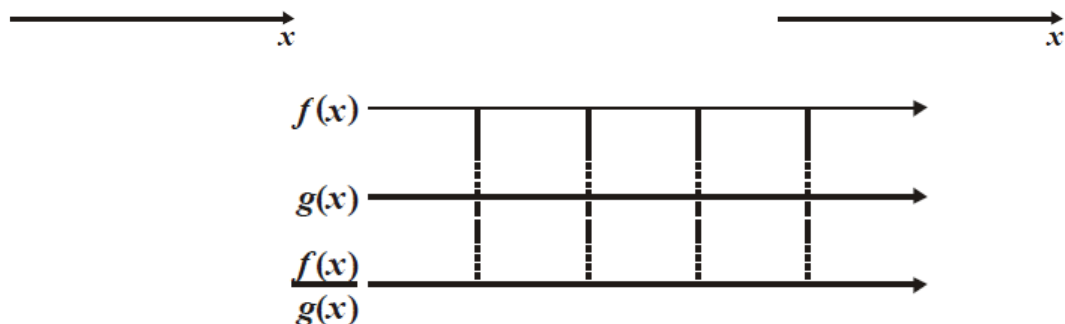


S=.....

Exercício 62 Resolver a inequação $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 16} \geq 0$.

Resolução:

$$\begin{array}{lcl} f(x) = x^2 - 5x + 6 & \Rightarrow & a \quad \quad 0 \Rightarrow \Delta = \quad \quad \Rightarrow x_1 \quad \quad \text{e} \quad x_2 \quad \quad \\ g(x) = -x^2 - 16 & \Rightarrow & a \quad \quad 0 \Rightarrow \Delta = \quad \quad \Rightarrow x_1 \quad \quad \text{e} \quad x_2 \quad \quad \\ f(x) & & g(x) \end{array}$$



S=.....

4 Função Exponencial

4.1 Revisão de potenciação

4.1.1 Potências com expoente natural

Sendo a um número real e n um número natural, com $n \geq 2$, definimos:

$$(Eq.4) \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}.$$

Para $n=1$ e $n=0$ são definidos:

$$(Eq.5) \quad a^1 = a.$$

$$(Eq.6) \quad a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

4.1.2 Potências com expoente inteiro

Se a é um número real não-nulo ($a \neq 0$) e n um número inteiro e positivo, definimos:

$$(Eq.7) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

4.1.3 Potências com expoente racional

Se a é um número real positivo e $\frac{m}{n}$ um número racional, com n inteiro positivo, definimos:

$$(Eq.8) \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

4.1.4 Potências com expoente real

Podemos considerar que as potências com expoente real têm significado no conjunto dos números reais. Temos, por exemplo: $10^{\sqrt{2}} = 25,954553519470080977981828375983$.

4.1.4.1 Propriedades

Para as potências com expoente real são válidas as seguintes propriedades operatórias:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$
- $a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0).$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0).$

Exercício 64 Dê o resultado mais simples de $(5^3 \cdot 5^6) : 5^{10}$.

Resolução: Usando as propriedades, temos:

$$(5^3 \cdot 5^6) : 5^{10} = \dots\dots\dots$$

Exercício 65 Calcule o valor da expressão $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6^0$.

Resolução:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6^0 = \dots\dots\dots$$

Exercício 66 Simplifique $\frac{2^{x+5} - 2^{x+2}}{2^x}$.

Resolução:

$$\frac{2^{x+5} - 2^{x+2}}{2^x} = \dots\dots\dots$$

Exercício 67 Calcule $8^{\frac{4}{3}}$.

Resolução:

Exercício 68 Determine o valor de $81^{0,7} : 81^{0,2}$.

Resolução:

$$81^{0,7} : 81^{0,2} = \dots\dots\dots$$

Exercício 69 Qual o valor de $(10^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} : (0,1)^5$?

Resolução:

$$(10^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} : (0,1)^5 = \dots\dots\dots$$

4.2 Equações exponenciais

Definição 30 Chama-se equação exponencial toda equação que contém incógnita no expoente.

Exemplo:

- $2^x = 16$.
- $3^{x+1} + 3^{x-2} = 9$.
- $3^{x-1} = 27$.
- $10 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^{2x} - 1 = 0$.

4.2.1 Resolução de equações exponenciais

Para resolver uma equação exponencial, devemos transformá-la de modo a obter potências de mesma base no primeiro e no segundo membros da equação utilizando as definições e propriedades da potenciação. Além disso, usaremos o seguinte fato:

Definição 31 Se $a > 0$, $a \neq 1$ e x é a incógnita, a solução da equação $a^x = a^p$ é $x = p$.

Exercício 70 Resolver a equação $4^x = 512$.

Resolução: Usando as propriedades das potências, vamos transformar o 1º e 2º membros da equação em potências de mesma base:

S=.....

Exercício 71 Uma empresa produziu, num certo ano, 8000 unidades de determinado produto. Projetando um aumento anual de produção de 50%, pergunta-se:

- a) Qual a produção P dessa empresa t anos depois?
- b) Após quantos anos a produção anual da empresa será de 40500 unidades?

Resolução:

- a) Obs: $50\% = \frac{50}{100} = 0,5$

- b) Fazendo $P=40500$, na fórmula anterior, obtemos a equação:

Desse modo, a produção anual da empresa será de 40500 unidades após anos.

Exercício 72

Determine o conjunto solução da equação $81^{x+2} = 1$ no universo dos números reais.

Resolução:

S=.....

4.2.2 *Resolução de equações exponenciais com o uso de artifícios*

Para se resolver determinadas equações exponenciais, são necessárias algumas transformações e artifícios.

Exercício 73 Resolver a equação $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Resolução: Usando as propriedades da potenciação, vamos fazer uma transformação na equação dada:

S=.....

Exercício 74 Determine o conjunto solução da equação $5^x - 5^{2-x} = 24$.

Resolução: Preparando a equação, temos:

S=.....

4.3 Função exponencial

Definição 32 A função $f: R \rightarrow R$ dada por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) é denominada função exponencial de base a .

4.3.1 Gráfico da função exponencial no plano cartesiano

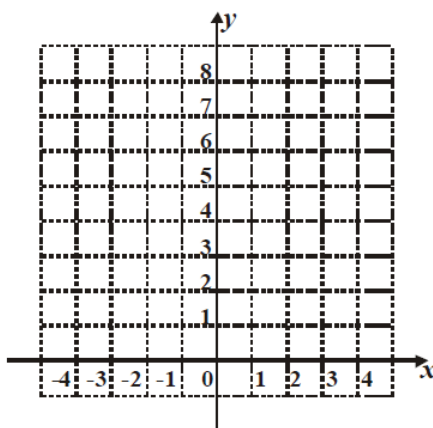
Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$), temos dois casos para traçar seu gráfico: (i) $a > 1$ e (ii) $0 < a < 1$.

- (i) $a > 1$.

Exercício 75 Traçar o gráfico de $f(x) = 2^x$.

Resolução:

x	$f(x) = 2^x$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



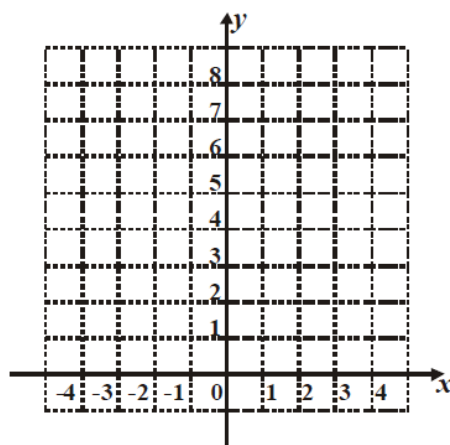
OBS. 9: Quanto maior o expoente x , maior é a potência a^x , ou seja, se $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é crescente.

- (ii) $0 < a < 1$.

Exercício 76 Traçar o gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Resolução:

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	



OBS. 10: Quanto maior o expoente x , menor é a potência a^x , ou seja, se $0 < a < 1$ a função $f(x) = a^x$ é decrescente.

Com base no gráfico, podem-se tirar algumas considerações:

4.3.2 Características da função exponencial

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$).

- Domínio da função f são todos os números reais $\Rightarrow D = \mathbb{R}$.
- Imagem da função f são os números reais positivos $\Rightarrow \text{Im} = \mathbb{R}_+^*$.
- A curva da função passa pelo ponto $(0,1)$.
- A função é crescente para a base $a > 1$.
- A função é decrescente para a base $0 < a < 1$.

4.4 Inequações exponenciais

Definição 33 São inequações exponenciais aquelas que aparecem incógnitas no expoente.

4.4.1 Resolução de inequações exponenciais

Para resolver inequações exponenciais, devemos observar dois passos importantes:

- 1) Redução dos dois membros da inequação a potências de mesma base;
- 2) Verificar a base da exponencial, $a > 1$ ou $0 < a < 1$, aplicando as propriedades abaixo.

Caso (i): $a > 1$

Caso (ii): $0 < a < 1$

$a^m > a^n \Rightarrow m > n$ As desigualdades têm mesmo sentido	$a^m > a^n \Rightarrow m < n$ As desigualdades têm sentidos diferentes
---	---

Exercício 77 Resolva a inequação $2^x > 32$.

Resolução:

S =

Exercício 78 Resolva a inequação $(\sqrt{3})^{3x^2+2x} \geq 1$.

Resolução:

S =

Exercício 79 Resolva a inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-7}$.

Resolução:

S=.....

5 Função Logarítmica

5.1 Definição de logaritmo

Definição 34 Dados dois números reais positivos, a e b , com $a \neq 1$, existe um único número real x de modo que $a^x = b$. Este número x é chamado de logaritmo de b na base a e indica-se $\log_a b$.

Podemos então, escrever:

$$(Eq.9) \quad a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad (1 \neq a > 0 \text{ e } b > 0).$$

Na igualdade $x = \log_a b$, temos:

- a é a base do logaritmo;
- b é o logaritmando ou antilogaritmo;
- x é o logaritmo.

Calcular o valor de x nos exercícios seguintes:

Exercício 80 $\log_2 32 = x$.

Resolução:

$$x = \dots\dots\dots$$

Exercício 81 $\log_4 16 = x$.

Resolução:

$$x = \dots\dots\dots$$

Exercício 82 $\log_8 x = 1$.

Resolução:

$$x = \dots\dots\dots$$

Exercício 83 $\log_3 81 = x$.

Resolução:

$$x = \dots\dots\dots$$

Exercício 84 $\log_5 1 = x$.

Resolução:

$$x = \dots\dots\dots$$

OBS. 11: $\log b \Rightarrow$ significa $\log_{10} b$. Quando não se indica a base, fica subentendido que a base é 10.

5.2 Conseqüências da definição

Tome $1 \neq a > 0$, $b > 0$ e m um número real qualquer. Da definição de logaritmos, pode-se verificar que:

- 1) O logaritmo de 1 em qualquer base é igual a zero.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1.$$

- 2) O logaritmo da própria base é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a.$$

- 3) O logaritmo de uma potência da base é igual ao expoente.

$$\log_a a^m = m, \text{ pois } a^m = a^m.$$

- 4) O logaritmo de b na base a é o expoente ao qual devemos elevar a para obter b .

$$a^{\log_a b} = b, \text{ pois } a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

5.3 Propriedades dos logaritmos

- 1) Logaritmo de produto

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (1 \neq a > 0, x > 0 \text{ e } y > 0).$$

- 2) Logaritmo de quociente

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \quad (1 \neq a > 0, x > 0 \text{ e } y > 0).$$

- 3) Logaritmo de potência

$$\log_a x^m = m \cdot \log_a x \quad (1 \neq a > 0, x > 0 \text{ e } m \in \mathbb{R}).$$

5.4 Cologaritmo

Cologaritmo de um número positivo b numa base a ($1 \neq a > 0$) é o logaritmo do inverso desse número b na base a .

$$(Eq.10) \quad co \log_a b = \log_a \left(\frac{1}{b} \right) \Rightarrow \boxed{co \log_a b = -\log_a b} \quad (1 \neq a > 0 \text{ e } b > 0).$$

Exercício 85 Sabendo que $\log 3 = a$ e $\log 5 = b$, calcule os logaritmos abaixo, em função de a e b .

- a) $\log 15$

Resolução:

- b) $\log 675$

Resolução:

- c) $\log 2$

Resolução:

5.5 Mudança de base

As propriedades logarítmicas são válidas para logaritmos numa mesma base, por isso, em muitos casos, é conveniente fazer a conversão de logaritmos de bases diferentes para uma única base.

A seguir, será apresentada a fórmula de mudança de base.

Seja:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b.$$

Aplicando o logaritmo na base c em ambos os membros, obtemos:

$$\log_c a^x = \log_c b \Rightarrow x \cdot \log_c a = \log_c b \Rightarrow x = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ mas } x = \log_a b.$$

Então:

$$(Eq.11) \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (1 \neq a > 0, 1 \neq c > 0 \text{ e } b > 0).$$

Exercício 86 Sendo $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,4$, calcule $\log_2 6$.

Resolução:

Exercício 87 Resolva a equação $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$.

Resolução:

A condição de existência é $x > 0$.

Logo, o conjunto solução é:

$$S = \{ \dots \}.$$

Exercício 88 Resolva a equação $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$.

Resolução:

Condições de existência são: $x+2 > 0$ e $x-2 > 0 \Rightarrow x > -2$ e $x > 2$. Então: $x > 2$.

Logo, o conjunto solução é:

$$S = \{ \dots \}.$$

5.6 Função logarítmica

A função exponencial $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$ (com $1 \neq a > 0$) é bijetora. Nesse caso, podemos determinar a sua função inversa. É a função logarítmica definida abaixo.

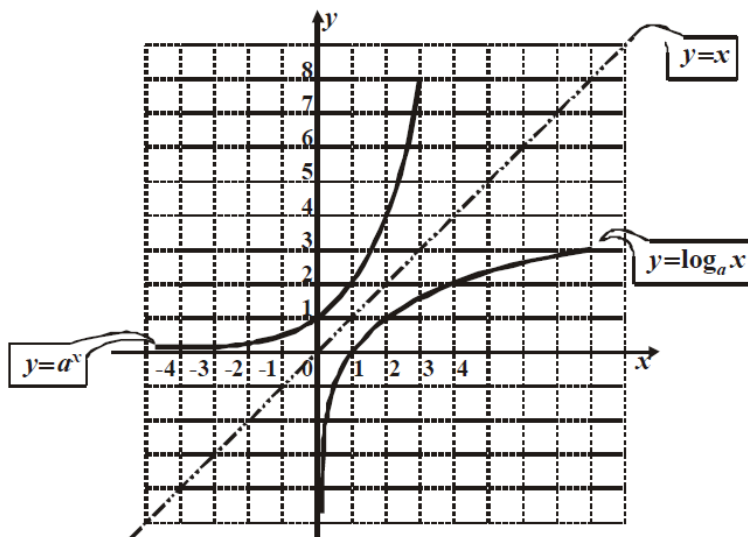
Definição 35 A função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ (com $1 \neq a > 0$) é chamada função logarítmica de base a .

5.6.1 Gráfico da função logarítmica no plano cartesiano

Como os gráficos de funções inversas são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, o gráfico da função logarítmica é de imediata construção, uma vez que já vimos o gráfico da função exponencial.

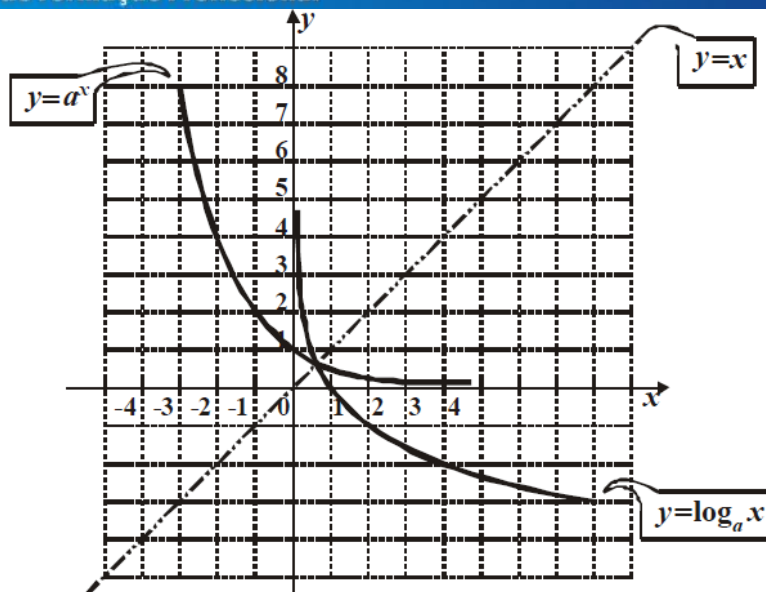
Seja $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $y = \log_a x$ e $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, tal que $y = a^x$. Os gráficos de f e f^{-1} serão plotados no mesmo plano cartesiano ortogonal.

- (i) $a > 1$.



[Fig. 11]: Gráfico da função logarítmica e exponencial ($a > 1$).

- (ii) $0 < a < 1$.



[Fig. 12]: Gráfico da função logarítmica e exponencial ($0 < a < 1$).

5.7 Inequações logarítmicas

Chamamos de inequação logarítmica toda inequação que envolve logaritmos com a incógnita aparecendo no logaritmando, na base ou em ambos.

Exercício 89 Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$.

Resolução:

Condição de existência:

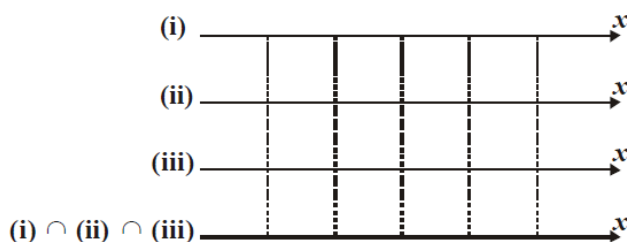
$$\begin{array}{l} \text{(i)} \quad \text{---} x \\ \text{(ii)} \quad \text{---} x \\ \text{(i)} \cap \text{(ii)} \quad \text{---} x \end{array}$$

$$S = \{ \dots \}.$$

Exercício 90 Resolva a inequação $\log_4(x^2 - x) \geq \log_4(2x + 10)$.

Resolução:

A solução da inequação deve satisfazer as três condições:



$$S = \{ \dots \}.$$

Exercício 91 Suponha que o preço de um carro sofra uma desvalorização de 20% ao ano. Depois de quanto tempo, aproximadamente, seu preço cairá para cerca da metade do preço de um carro novo? (Use $\log_{10} 2 = 0,3$)

Resolução:

$$p = p_0(1-0,2)^t$$

O preço do carro cairá para a metade do preço do carro novo depois de anos.

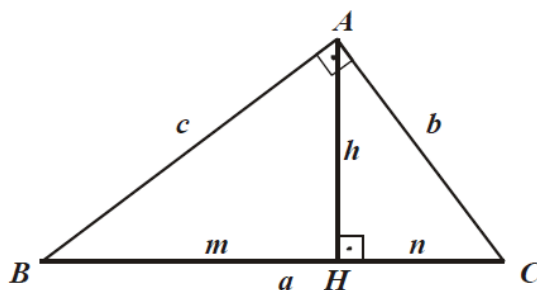
6 Trigonometria

Trigonometria é o ramo da Matemática que tem por objetivo a resolução completa dos triângulos, ou seja, a determinação da medida de seus lados e seus ângulos internos, enriquecendo o estudo da Geometria Plana.

Seu significado original: (tri) três, (gonos) ângulo, (metria) medida.

6.1 Triângulo retângulo

Triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo interno reto. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros dois lados são chamados de catetos.



[Fig. 13]: Elementos do triângulo retângulo

Na figura, temos que:

- $a = \overline{BC}$ é a hipotenusa;
- $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ são os catetos;
- $h = \overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa;
- $m = \overline{BH}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa;
- $n = \overline{CH}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa;
- $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos internos.

6.2 Relações métricas no triângulo retângulo

Com base na figura anterior, as seguintes relações métricas são válidas:

$a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras) $\rightarrow$ o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos;

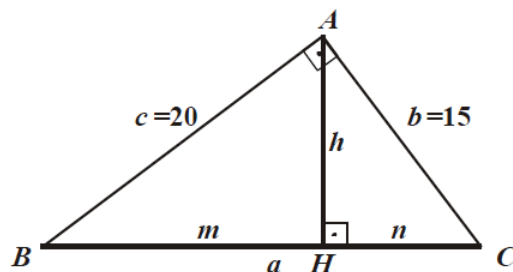
$h^2 = m \cdot n$ $\rightarrow$ o quadrado da altura é o produto das projeções dos catetos;

$c^2 = m \cdot a$ e $b^2 = n \cdot a$ $\rightarrow$ o quadrado do cateto é o produto de sua projeção pela hipotenusa;

$b \cdot c = a \cdot h$ $\rightarrow$ o produto dos catetos é o produto da hipotenusa pela altura.

Exercício 92

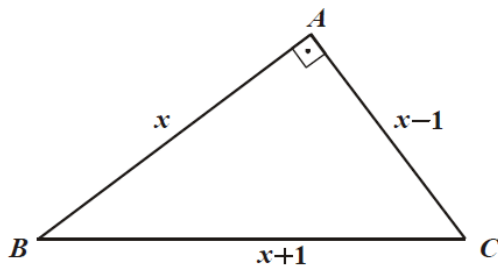
Observando a figura, calcule a , h , m e n .



Resolução:

Logo, $a = \dots\dots\dots$, $h = \dots\dots\dots$, $m = \dots\dots\dots$ e $n = \dots\dots\dots$.

Exercício 93. Num triângulo retângulo os lados têm medidas $x-1$, x e $x+1$. Determine essas medidas.



Resolução:

Num triângulo qualquer, a medida do maior lado é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois, portanto, devemos ter $x+1 < x+x-1$ para que exista o triângulo. Logo:

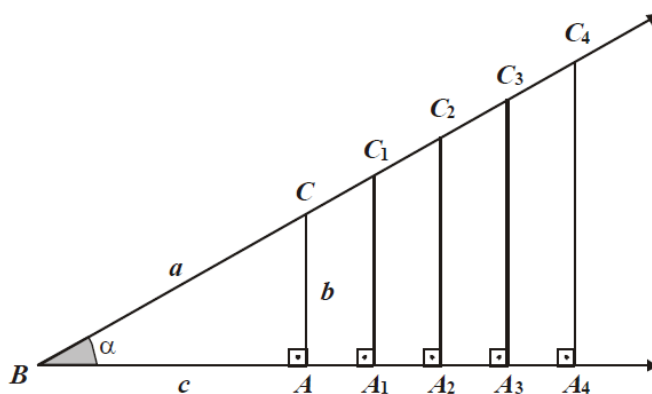
Aplicando o teorema de Pitágoras ao $\triangle ABC$, temos:

Então, $x = \dots\dots\dots$

As medidas dos lados são $\dots\dots\dots$, $\dots\dots\dots$ e $\dots\dots\dots$ unidades de comprimento.

6.3 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Consideremos o ângulo de medida α da figura seguinte, de vértice B e lados $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.



[Fig. 14]: Razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Os triângulos BAC , BA_1C_1 , BA_2C_2 , BA_3C_3 , BA_4C_4 , ... são todos semelhantes. Logo, existem razões entre estes triângulos. Iremos nomear estas razões por: k_1 , k_2 e k_3 .

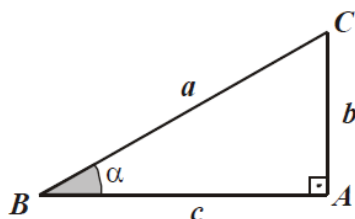
Desenvolvendo as razões, temos:

$$k_1 = \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \frac{A_4C_4}{BC_4} = \dots$$

$$k_2 = \frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \frac{BA_4}{BC_4} = \dots$$

$$k_3 = \frac{AC}{BA} = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \frac{A_4C_4}{BA_4} = \dots$$

As razões k_1 , k_2 e k_3 dependem somente da medida do ângulo considerado. Daí, pode-se simplificar a figura anterior a apenas um triângulo $A B C$ seguinte.



[Fig. 15]: Triângulo $A B C$ que define as razões.

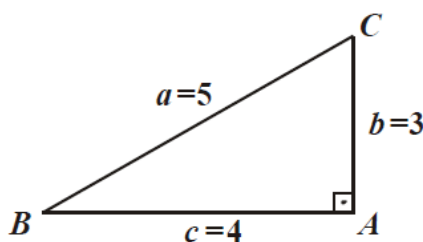
Estas razões podem ser escritas, considerando-se como base o ângulo α , através da hipotenusa a , o cateto oposto b e o cateto adjacente c :

$$(Eq.12) \quad \text{sen } \alpha = k_1 = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$(Eq.13) \quad \text{cos } \alpha = k_2 = \frac{BA}{BC} = \frac{c}{a} = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} \Rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$(Eq.14) \quad \text{tan } \alpha = k_3 = \frac{AC}{BA} = \frac{b}{c} = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} \Rightarrow \text{tan } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$$

Exercício 94 Determine $\text{sen } \hat{B}$, $\text{cos } \hat{B}$ e $\text{tan } \hat{B}$ no triângulo retângulo $A B C$.



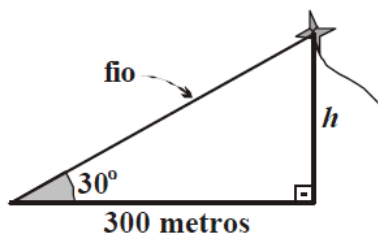
Resolução:

$$\text{sen } \hat{B} = \dots\dots\dots$$

$$\text{cos } \hat{B} = \dots\dots\dots$$

$$\text{tan } \hat{B} = \dots\dots\dots$$

Exercício 95 Um garoto está empinando pipa, e o fio forma com a horizontal um ângulo de 30° . Calcule a que altura do solo se achará a pipa quando estiver na vertical que passa por uma árvore situada a 300 metros do garoto. Sabe-se que $\tan 30^\circ = 0,57$.

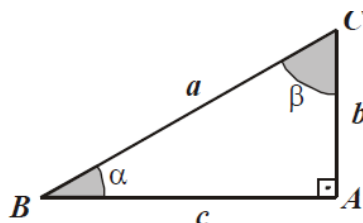


Resolução:

$h = \dots\dots\dots$ metros.

6.4 Conseqüências das definições

Dado o triângulo retângulo abaixo, podemos chegar a algumas conclusões, com base nas definições dadas.



[Fig. 16]: Triângulo ABC , conseqüências das definições.

6.4.1 Ângulos complementares

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

O seno de um ângulo agudo é igual ao co-seno de seu complemento.

$$(Eq.15) \quad \text{sen } \alpha = \frac{b}{a} \text{ e } \cos \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \cos \beta.$$

$$(Eq.16) \quad \text{sen } \beta = \frac{c}{a} \text{ e } \cos \alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow \text{sen } \beta = \cos \alpha.$$

A tangente de um ângulo agudo é igual ao inverso da tangente de seu complemento.

$$(Eq.17) \quad \tan \alpha = \frac{b}{c} \text{ e } \tan \beta = \frac{c}{b} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}.$$

6.4.2 Divisão

$$\frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha}.$$

6.4.3 Aplicando o teorema de Pitágoras

$$\text{sen}^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2} \text{ e } \cos^2 \alpha = \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC , temos que $a^2 = b^2 + c^2$. Logo:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Então:

(Eq.18) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

Exercício 96 Sendo $\text{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$, calcular $\cos 30^\circ$, $\tan 30^\circ$, $\text{sen} 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ e $\tan 60^\circ$.

Resolução:

Exercício 97 Sendo $\text{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calcular $\cos 45^\circ$ e $\tan 45^\circ$.

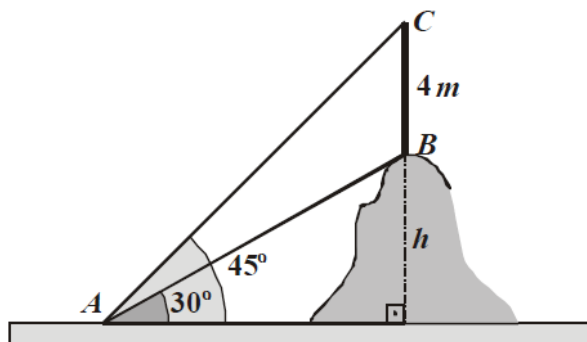
Resolução:

6.5 Ângulos notáveis

Os valores da tabela seguinte aparecem com frequência, por isso os ângulos nela contidos são chamados notáveis.

	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\notin$

Exercício 98 (PUC-RS) De um ponto A, no solo, visam-se a base B e o topo C de um bastão colocado verticalmente no alto de uma colina, sob ângulos de 30° e 45° , respectivamente. Se o bastão mede 4 metros de comprimento, a altura da colina, em metros, é igual a:

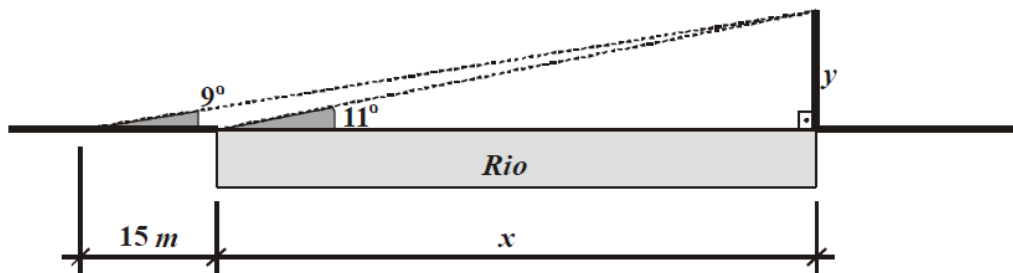


Resolução:

A altura da colina é de metros.

Exercício 99 (UFOP-MG) Um homem deseja determinar a largura de um rio. Então, de um ponto da margem, mede o ângulo de elevação do topo de um poste situado na margem oposta, obtendo 11° . Afastando-se 15 metros, ele obtém o novo ângulo de 9° . Calcule a largura do rio.

Tome como base os dados seguintes: $\tan 9^\circ = 0,158$ e $\tan 11^\circ = 0,194$.



Resolução:

A largura do rio é de metros.

6.6 Circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico

6.6.1 Arco de circunferência

Considerando dois pontos A e B de uma circunferência:



[Fig. 17]: Arco de circunferência.

Chamamos de arco AB a qualquer uma das partes dessa circunferência, compreendida entre os pontos A e B, o qual indicaremos por $\widehat{AB}$ ou $\widehat{BA}$. Os pontos A e B são as extremidades do arco AB e pertencem a ele.

Quando $A=B$, dizemos que uma das partes é o arco nulo e a outra é o arco de uma volta.

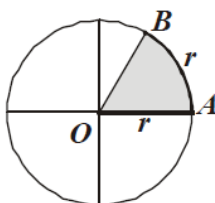
6.6.2 Medidas de arcos

Definição 36 Grau: um grau (1°) é o arco unitário que corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência.

Definição 37 Radiano: um radiano (1 rad) é o arco que tem o mesmo comprimento do raio da circunferência que o contém.

Conseqüentemente, radiano (1 rad) é o arco unitário que corresponde a $\frac{1}{2\pi}$ da circunferência.

Na circunferência abaixo, o raio r tem o mesmo comprimento do arco AB.



[Fig. 18]: Circunferência de raio r .

$$m(\widehat{AB}) = m(\overline{AO}) = 1 \text{ rad.}$$

Por outro lado, a medida do comprimento da circunferência se calcula através da fórmula:

$$C = 2\pi r.$$

Mas, pelo fato de termos considerado o raio r e o arco AB com a mesma medida (1 rad), então:

$$(Eq.19) \quad C = 2\pi \text{ rad.}$$

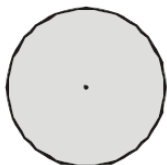
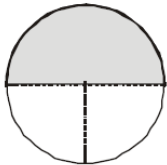
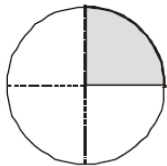
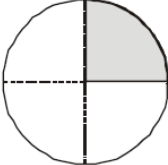
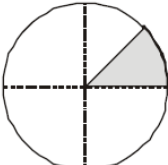
Daí pode-se tirar medidas parciais da circunferência em radianos.

$$\frac{C}{2} = \pi \text{ rad;}$$

$$\frac{C}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad;}$$

$$\frac{C}{8} = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Relações entre graus e radianos:

arco	grau	Radiano
	360°	$2\pi \text{ rad}$
	180°	$\pi \text{ rad}$
	90°	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$
	90°	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$
	45°	$\frac{\pi}{4} \text{ rad}$

Exercício 100 Converter em radianos a medida do arco de 30°.

Resolução: Como sabemos que $180^\circ = \pi \text{ rad}$, podemos fazer uma regra de três simples diretamente proporcional:

Logo, 30° correspondem a rad, ou $30^\circ = \dots\dots\dots$ rad.

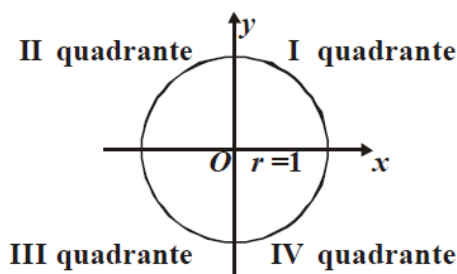
Exercício 101 Converter em graus a medida do arco de $\frac{3\pi}{2}$ rad.

Resolução: De forma semelhante ao exercício anterior, usa-se a relação $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.
Substitui-se no arco dado e efetuam-se as operações:

Logo, $\frac{3\pi}{2}$ rad correspondem a , ou $\frac{3\pi}{2} \text{ rad} = \dots\dots\dots$.

6.6.3 Ciclo trigonométrico

Considere a figura abaixo:

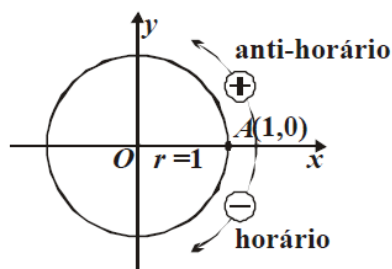


[Fig. 19]: Quadrantes no ciclo trigonométrico.

- O centro da circunferência coincide com a origem de um sistema de coordenadas cartesianas;
- O raio da circunferência corresponde a uma unidade de medida dos eixos perpendiculares.

Definição 38 Ciclo trigonométrico é uma circunferência à qual se associa um sistema de coordenadas ortogonais com origem no centro, tendo como raio a unidade de medida dos eixos.

A medida de um arco num ciclo trigonométrico é feita através das seguintes convenções:



[Fig. 20]: Medida de arcos no ciclo trigonométrico.

Os arcos trigonométricos têm:

- Origem no ponto $A(1,0)$;
- Medidas algébricas positivas, se marcados no sentido anti-horário, e negativas, se marcados no sentido horário.

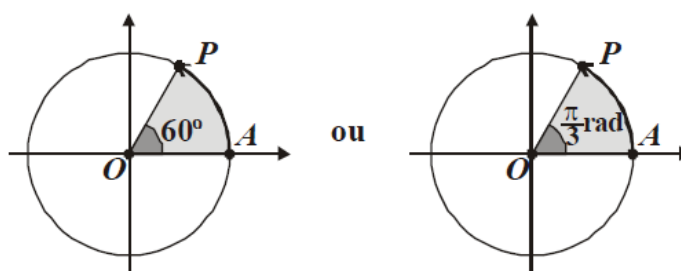
6.6.4 Arcos côngruos

Definição 39

Os arcos que têm mesma extremidade e diferem apenas pelo número de volta inteiras são chamados de arcos côngruos.

Exercício 102

Com base no arco da figura abaixo, preencher a tabela a seguir:



Resolução:

ARCOS CÔNGRUOS

GRAUS		RADIANOS	
$60^\circ = 60^\circ + 0 \cdot 360^\circ$	$60^\circ = 60^\circ + 0 \cdot 360^\circ$	$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 0 \cdot 2\pi$	$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 0 \cdot 2\pi$
$420^\circ = 60^\circ + 1 \cdot 360^\circ$	$-300^\circ = 60^\circ - 1 \cdot 360^\circ$	$\frac{7\pi}{3} = \dots\dots\dots$	$-\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 1 \cdot 2\pi$
$780^\circ = \dots\dots\dots$	$-1020^\circ = \dots\dots\dots$	$\frac{19\pi}{3} = \dots\dots\dots$	$-\frac{23\pi}{3} = \dots\dots\dots$
$1860^\circ = \dots\dots\dots$	$-2460^\circ = \dots\dots\dots$	$\frac{37\pi}{3} = \dots\dots\dots$	$-\frac{47\pi}{3} = \dots\dots\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Definição 40 Se um arco mede α graus, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é:

$\alpha + k \cdot 360^\circ$, com $k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ são os números inteiros).

Definição 41 Se um arco mede α radianos, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é:

$\alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

6.6.4.1 Regra para se obter arcos côngruos

Seja α um arco dado em graus ou radianos. (Obs: uma volta é 360o ou 2π rad)

- Dividir α por uma volta;
- Multiplicar o resultado por uma volta;
- Se α é negativo, somar e subtrair uma volta.

Exercício 103

Obter arcos côngruos a 750o.

Resolução:

- Dividir α por 360o:

- Dividir α por 360°:

$$750^\circ \times \frac{1}{360^\circ} = \frac{30^\circ}{360^\circ} + 2$$

- Multiplicar o resultado por 360o :

$$30o + 2 \times 360o.$$

$$\text{Arcos c\u00f4ngruos a } 750o = 30o + k \cdot 360o.$$

Exerc\u00edcio 104

Obter arcos c\u00f4ngruos a $-1050o$.

Resolu\u00e7\u00e3o:

- Dividir α por 360o:

- Dividir α por 360°:

$$-1050^\circ \times \frac{1}{360^\circ} = -\frac{330^\circ}{360^\circ} - 2$$

- Multiplicar o resultado por 360o :

$$-330o - 2 \times 360o.$$

- Somar e subtrair 360o :

$$-330o - 2 \times 360o + 360o - 360o.$$

$$30o - 3 \times 360o.$$

$$\text{Arcos c\u00f4ngruos a } -1050o = 30o + k \cdot 360o.$$

Exerc\u00edcio 105 Obter arcos c\u00f4ngruos a $\frac{37\pi}{6}$.

Resolu\u00e7\u00e3o:

- Dividir α por 2π :

$$\frac{37\pi}{6} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{37}{12} = \frac{1}{12} + 3$$

- Multiplicar o resultado por 2π :

$$\frac{\pi}{6} + 3 \cdot 2\pi.$$

$$\text{Arcos c\u00f4ngruos a } \frac{37\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Exercício 106 Obter arcos côngruos a $-\frac{47\pi}{6}$.

Resolução:

- Dividir α por 2π :

$$-\frac{47\pi}{6} \times \frac{1}{2\pi} = -\frac{47}{12} = -\frac{11}{12} - 3$$

- Multiplicar o resultado por 2π :

$$-\frac{11\pi}{6} - 3 \cdot 2\pi.$$

- Somar e subtrair 2π :

$$-\frac{11\pi}{6} - 3 \cdot 2\pi + 2\pi - 2\pi.$$

$$\frac{\pi}{6} - 4 \cdot 2\pi.$$

$$\text{Arcos côngruos a } -\frac{47\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Exercício 107 Um móvel, partindo do ponto A (figura acima), percorreu um arco de 1690° na circunferência trigonométrica. O móvel deu quantas voltas completas e em que quadrante parou?

Resolução:

$$1690 \quad | \quad 360$$

Expressão geral $\Rightarrow 1690^\circ = \dots\dots\dots$

Número de voltas $\Rightarrow \dots\dots\dots$

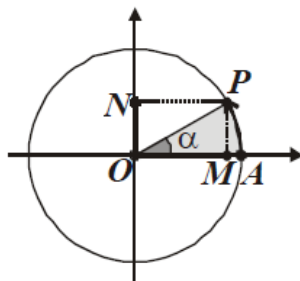
O arco de 1690° tem a mesma extremidade que o arco de $\dots\dots\dots$.

O móvel deu $\dots\dots\dots$ voltas completas no sentido anti-horário.

Como $\dots\dots\dots^\circ < \dots\dots\dots^\circ < \dots\dots\dots^\circ$, o móvel parou no $\dots\dots\dots$ quadrante.

6.7 Seno e cosseno de um arco

Tome o arco α dado na figura abaixo:



[Fig. 21]: Arco α para o conceito de seno e cosseno.

Seno de um arco é a ordenada do ponto P.

$$(Eq.20) \quad \text{sen } \alpha = \overline{ON} = \overline{MP}.$$

Cosseno de um arco é a abscissa do ponto P.

$$(Eq.21) \quad \text{cos } \alpha = \overline{OM} = \overline{NP}.$$

6.7.1 Conseqüências

Para qualquer ponto da circunferência, a ordenada e a abscissa nunca são menores que -1 nem maiores que $+1$. Por isso dizemos que seno e cosseno são números compreendidos entre -1 e $+1$, o que nos permite concluir:

$$(Eq.22) \quad -1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \text{ e } -1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1$$

6.7.2 Função seno e função cosseno

Função seno é a função que associa a cada arco $x \in R$ o número $\text{sen } x \in R$, ou $y = \text{sen } x$.

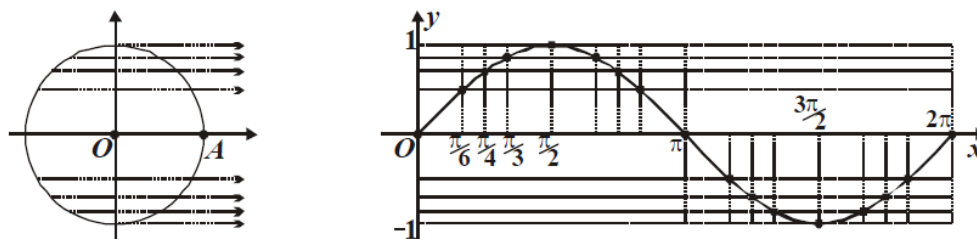
Função cosseno é a função que associa a cada arco $x \in R$ o número $\text{cos } x \in R$, ou $y = \text{cos } x$.

6.7.3 Gráfico das funções seno e cosseno

Para estudar a função seno ($y = \text{sen } x$) e a função cosseno ($y = \text{cos } x$) vamos variar no intervalo $[0, 2\pi]$.

6.7.3.1 Função seno

$$y = \text{sen } x$$



[Fig. 22]: Gráfico da função seno.

6.7.3.2 Conclusões

- O domínio da função $y = \text{sen } x$ é o conjunto dos números reais, isto é, $D = \mathbb{R}$.
- A imagem da função $y = \text{sen } x$ é o intervalo $[-1, +1]$, isto é, $-1 \leq \text{sen } x \leq +1$.
- Toda vez que somamos 2π a um determinado valor de x , a função seno assume o mesmo valor.

Como 2π é o menor número positivo para o qual isso acontece, o período da função $y = \text{sen } x$ é $p = 2\pi$.

Essa conclusão pode ser obtida, também, a partir do ciclo trigonométrico onde marcamos o arco x .

Quando adicionamos $2k\pi$ ao arco x , obtemos sempre o mesmo valor para o seno, pois a função seno é periódica de período 2π .

(Eq.23) $\text{sen } x = \text{sen}(x + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ (Inteiros).

6.7.3.3 Seno é função ímpar

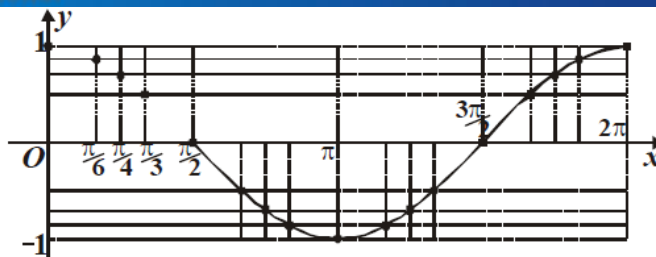
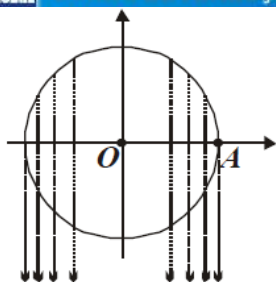
No ciclo trigonométrico, os pontos correspondentes aos números x e $-x$ têm imagens simétricas em relação ao eixo das abscissas. Daí resulta que as ordenadas desses pontos têm o mesmo valor absoluto, porém, sinais opostos. Então, $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$.

Quando uma função f é tal que $f(-x) = -f(x)$, para todo x do seu domínio, dizemos que f é uma função ímpar.

Como $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$, para todo x real, podemos afirmar que a função seno é ímpar.

6.7.3.4 Função cosseno

$$y = \text{cos } x$$



[Fig. 23]: Gráfico da função cosseno.

6.7.3.5 Conclusões

- O domínio da função $y = \cos x$ é o conjunto dos números reais, isto é, $D = \mathbb{R}$.
- A imagem da função $y = \cos x$ é o intervalo $[-1, +1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq +1$.
- O período da função $y = \cos x$ é $p = 2\pi$.

Essa conclusão pode ser obtida, também, a partir do ciclo trigonométrico onde marcamos o arco x .

Quando adicionamos $2k\pi$ ao arco x , obtemos sempre o mesmo valor para o cosseno, pois a função cosseno é periódica de período 2π .

(Eq.24) $\cos x = \cos (x + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ (Inteiros).

6.7.3.6 Cosseno é função par

No ciclo trigonométrico, os pontos correspondentes aos números x e $-x$ têm imagens simétricas em relação ao eixo das abscissas. Daí resulta que esses pontos têm a mesma abscissa. Então, $\cos(-x) = \cos x$.

Quando uma função f é tal que $f(-x) = f(x)$, para todo x do seu domínio, dizemos que f é uma função par.

Como $\cos(-x) = \cos x$, para todo x real, podemos afirmar que a função cosseno é par.

Exercício 108

Construa o gráfico da função $y = 2\sin x$, dando o domínio, a imagem e o período.

Resolução:

x	$\sin x$	$2\sin x$	y
0			
$\frac{\pi}{2}$			
π			
$\frac{3\pi}{2}$			
2π			

Observando o gráfico, temos:

$D = \dots\dots\dots$, $\text{Im} = [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$, e $p = \dots\dots\dots$.

Exercício 109 Construa o gráfico da função $y = \cos \frac{x}{2}$, dando o domínio, a imagem e o período.

Resolução:

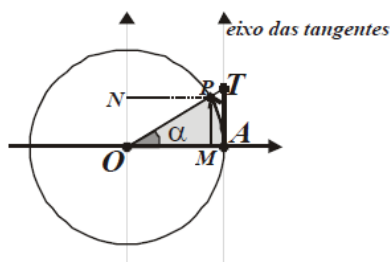
$\frac{x}{2}$	x	$\cos \frac{x}{2}$	y
0			
$\frac{\pi}{2}$			
π			
$\frac{3\pi}{2}$			
2π			

Observando o gráfico, temos:

$D = \dots\dots\dots$, $\text{Im} = [\dots\dots\dots]$, e $p = \dots\dots\dots$.

6.8 Tangente de um arco

Tome o arco α dado na figura abaixo:



[Fig. 24]: Arco α para o conceito de tangente.

Tangente de um arco é a ordenada do ponto T (segmento AT).

(Eq.25) $\tan \alpha = \overline{AT}$.

6.8.1 Conseqüências

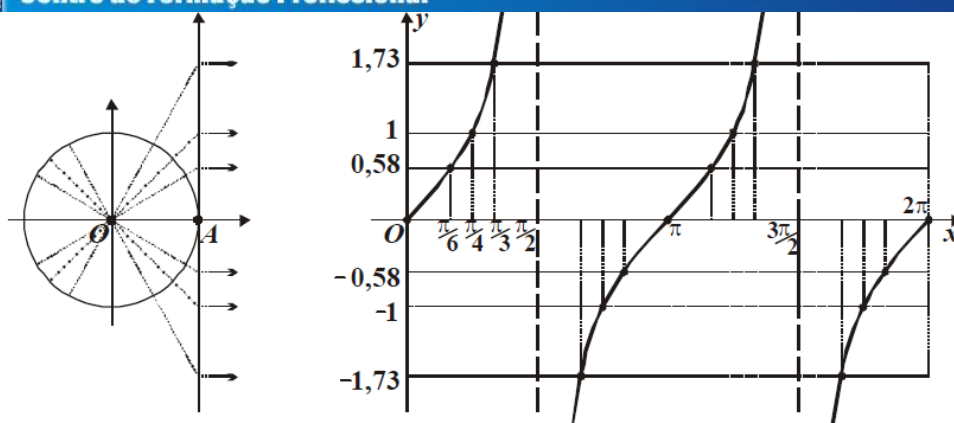
- O eixo vertical, suporte de $\overline{AT}$, é chamado eixo das tangentes.
- Podemos dizer que $\tan \alpha$ só é definida se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

6.8.2 Função tangente

Função tangente é a função que associa a cada arco $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 2\pi + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), o número $\tan x \in \mathbb{R}$, ou $y = \tan x$.

6.8.3 Gráfico da função tangente

Para estudar a função tangente ($y = \tan x$) vamos variar x no intervalo $[0, 2\pi]$.



[Fig. 25]: Gráfico da função tangente.

6.8.3.1 Conclusões

- O domínio da função $y = \tan x$ é o conjunto dos números reais $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

($k \in \mathbb{Z}$), isto é, $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

- A imagem da função $y = \tan x$ é o conjunto dos números reais.
- Toda vez que somamos $k\pi$ a um determinado valor de x , a função tangente assume o mesmo valor.

Como π é o menor número positivo para o qual isso acontece, o período da função $y = \tan x$ é $p = \pi$.

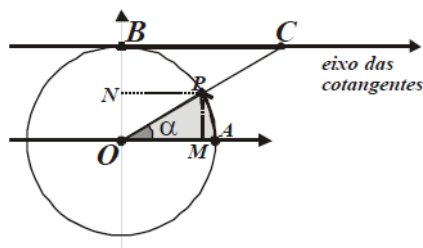
(Eq.26) $\tan(x + k\pi) = \tan x, k \in \mathbb{Z}$.

6.8.3.2 Tangente é uma função ímpar

Como $\tan(-x) = -\tan x$, para todo x real, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), podemos afirmar que a função tangente é ímpar.

6.9 Cotangente de um arco

Tome o arco α dado na figura abaixo:



[Fig. 26]: Arco α para o conceito de cotangente.

Cotangente de um arco é a abscissa do ponto C (segmento BC).

(Eq.27) $\cot \alpha = \overline{BC}$.

6.9.1 Conseqüências

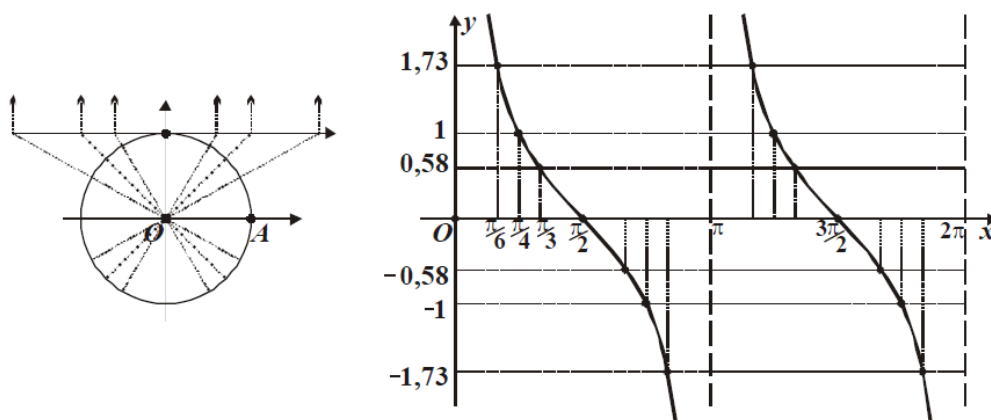
- O eixo horizontal, suporte de $\overline{BC}$, é chamado eixo das cotangentes.
- Podemos dizer que $\cot \alpha$ só é definida se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

6.9.2 Função cotangente

Função cotangente é a função que associa a cada arco $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), o número $\cot x \in \mathbb{R}$, ou $y = \cot x$.

6.9.3 Gráfico da função cotangente

Para estudar a função cotangente ($y = \cot x$) vamos variar x no intervalo $[0, 2\pi]$.



[Fig. 27]: Gráfico da função cotangente.

6.9.3.1 Conclusões

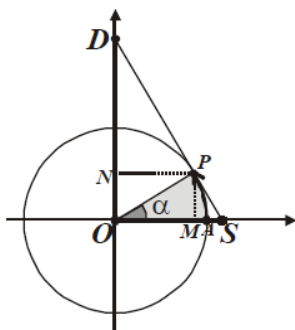
- O domínio da função $y = \cot x$ é o conjunto dos números reais $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), isto é, $D = \{ x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.
 - A imagem da função $y = \cot x$ é o conjunto dos números reais.
 - Toda vez que somamos $k\pi$ a um determinado valor de x , a função cotangente assume o mesmo valor. Como π é o menor número positivo para o qual isso acontece, o período da função $y = \cot x$ é $p = \pi$.
- (Eq.28) $\cot(x + k\pi) = \cot x, k \in \mathbb{Z}$.

6.9.3.2 Cotangente é uma função ímpar

Como $\cot(-x) = -\cot x$, para todo x real, com $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), podemos afirmar que a função cotangente é ímpar.

6.10 Secante e cossecante de um arco

Tome o arco α dado na figura abaixo:



Traçando uma reta tangente à circunferência pelo ponto P, interceptamos o eixo das abscissas no ponto S e o eixo das ordenadas no ponto D.

(Eq.29) $\sec \alpha = \overline{OS}$.

(Eq.30) $\operatorname{cosec} \alpha = \overline{OD}$.

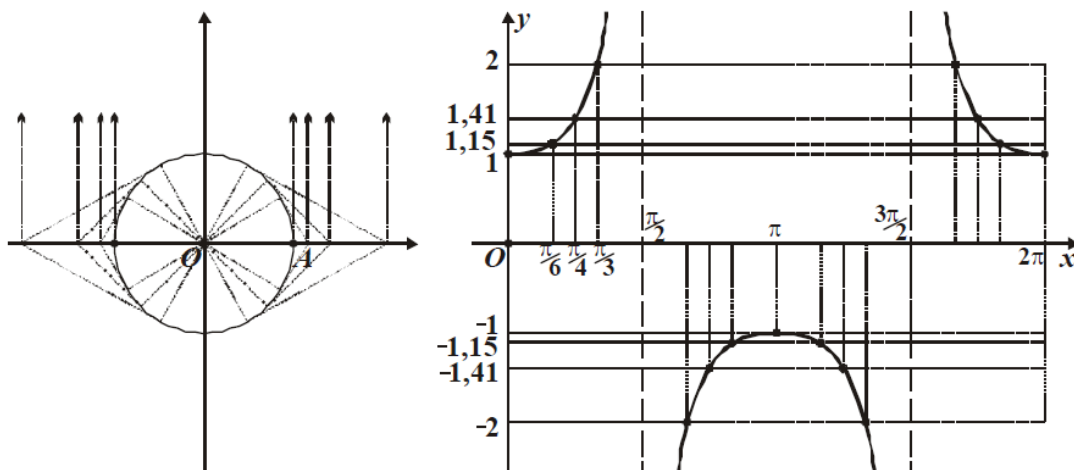
6.10.1 Função secante e cossecante

Função secante é a função que associa a cada arco $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), o número $\sec x \in \mathbb{R}$, ou $y = \sec x$

Função cossecante é a função que associa a cada arco $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), o número $\operatorname{cosec} x \in \mathbb{R}$, ou $y = \operatorname{cosec} x$.

6.10.2 Gráfico da função secante

Para estudar a função secante ($y = \sec x$) vamos variar x no intervalo $[0, 2\pi]$.



[Fig. 29]: Gráfico da função secante.

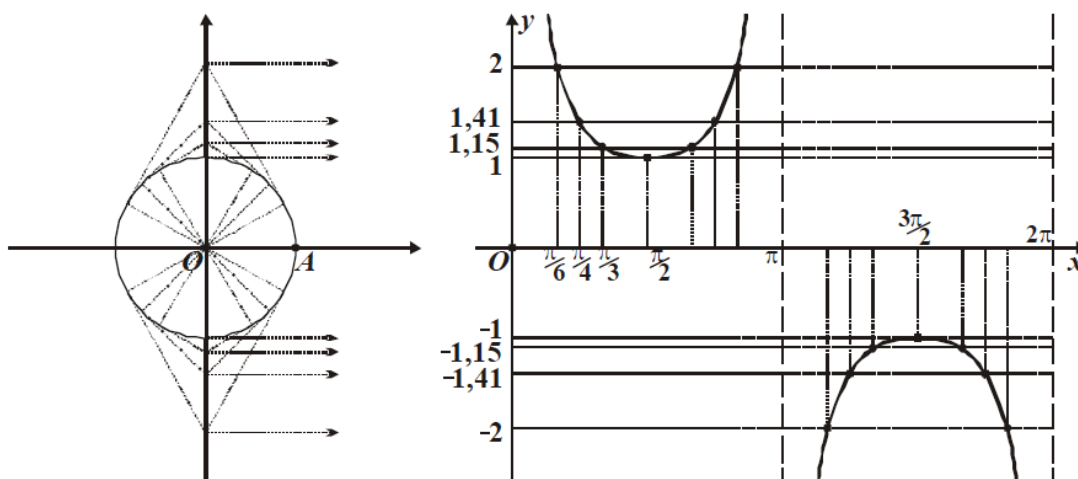
6.10.2.1 Conclusões

- O domínio da função $y = \sec x$ é o conjunto dos números reais $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), isto é, $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- A imagem da função $y = \sec x$ é o conjunto dos números reais maiores ou iguais a 1 ou menores ou iguais a -1, isto é, $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 1 \text{ ou } y \leq -1\}$.
- Toda vez que somamos $2k\pi$ a um determinado valor de x , a função secante assume o mesmo valor. Como 2π é o menor número positivo para o qual isso acontece, o período da função $y = \sec x$ é $p = 2\pi$.

$$(Eq.31) \quad \sec(x + 2k\pi) = \sec x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6.10.3 Gráfico da função cossecante

Para estudar a função cossecante ($y = \text{cossec } x$) vamos variar x no intervalo $[0, 2\pi]$.



[Fig. 30]: Gráfico da função cossecante.

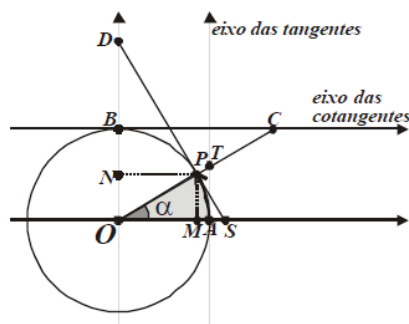
6.10.3.1 Conclusões

- O domínio da função $y = \cos \sec x$ é o conjunto dos números reais $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), isto é, $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- A imagem da função $y = \cos \sec x$ é o conjunto dos números reais maiores ou iguais a 1 ou menores ou iguais a -1, isto é, $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 1 \text{ ou } y \leq -1\}$.
- Toda vez que somamos $2k\pi$ a um determinado valor de x , a função cossecante assume o mesmo valor. Como π é o menor número positivo para o qual isso acontece, o período da função $y = \cos \sec x$ é $p = 2\pi$.

(Eq.32) $\cos \sec(x + 2k\pi) = \cos \sec x, k \in \mathbb{Z}$.

6.11 Relações trigonométricas

Será feito o estudo das relações que existem entre as funções trigonométricas, pois elas têm muitas aplicações na trigonometria e fora dela. Para as deduções das relações, tomaremos como base o ciclo trigonométrico e um ângulo α dado.

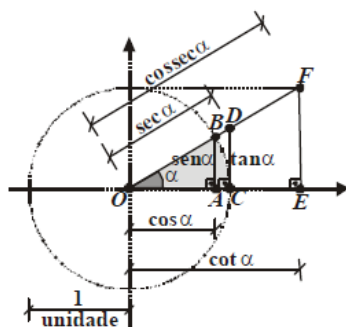


[Fig. 31]: Funções trigonométricas no ciclo.

Podemos identificar as funções trigonométricas no ciclo, em relação ao ângulo α :

$$\sin \alpha = \overline{ON}; \cos \alpha = \overline{OM}; \tan \alpha = \overline{AT}; \cot \alpha = \overline{BC}; \sec \alpha = \overline{OS} \text{ e } \cos \sec \alpha = \overline{OD}.$$

Analisando as funções no ciclo e fixando inicialmente o ângulo α , podemos fazer as seguintes mudanças, para facilitar o entendimento das relações trigonométricas:



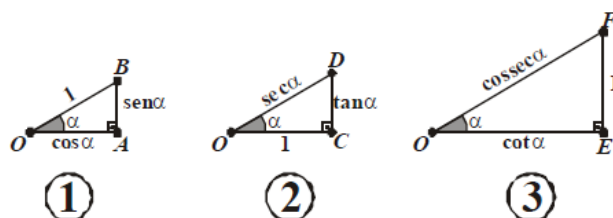
[Fig. 32]: Funções adaptadas no ciclo.

Com as novas adaptações, temos as seguintes funções:

$$\text{sen } \alpha = \overline{AB}; \cos \alpha = \overline{OA}; \tan \alpha = \overline{CD}; \cot \alpha = \overline{OE}; \sec \alpha = \overline{OD} \text{ e } \text{cosec } \alpha = \overline{OF}.$$

Daí tiram-se três triângulos semelhantes:

$$\triangle OAB \equiv \triangle OCD \equiv \triangle OEF.$$



[Fig. 33]: Triângulos semelhantes.

6.11.1 Usando o teorema de Pitágoras

- $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;
- $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$;
- $\cot^2 \alpha + 1 = \text{cosec}^2 \alpha$.

6.11.2 Usando semelhança entre triângulos

Com base na figura acima, tome as seguintes proporções, dadas as razões entre os triângulos:

Razões do triângulo ② para ①:

$$\frac{\sec \alpha}{1} = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{\tan \alpha}{1} = \frac{\sec \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha};$$

$$\tan \alpha = \frac{\sec \alpha}{\cos \alpha}.$$

Razões do triângulo ③ para ①:

$$\frac{\cos \sec \alpha}{1} = \frac{1}{\sec \alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{\cot \alpha}{1} = \frac{\cos \alpha}{\sec \alpha} \Rightarrow$$

$$\cos \sec \alpha = \frac{1}{\sec \alpha};$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sec \alpha}.$$

Razões do triângulo ③ para ②:

$$\frac{\cos \sec \alpha}{1} = \frac{\sec \alpha}{\tan \alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{\cot \alpha}{1} = \frac{1}{\tan \alpha} \Rightarrow$$

$$\cos \sec \alpha = \frac{\sec \alpha}{\tan \alpha};$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Com base nos três triângulos semelhantes da figura anterior, resolva os exercícios que seguem abaixo:

Exercício 110 Determine as razões que se pede abaixo, do triângulo ① para ②.

Resolução:

$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{1}{\cos \alpha};$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{1}{\cot \alpha}.$$

Exercício 111 Determine as razões que se pede abaixo, do triângulo ① para ③.

Resolução:

$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{1}{\cos \alpha};$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{1}{\cot \alpha}.$$

Exercício 112 Determine as razões que se pede abaixo, do triângulo ② para ③.

Resolução:

$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{1}{\cos \alpha};$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{1}{\cot \alpha}.$$

6.12 Identidades trigonométricas

A igualdade $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$ é verdadeira para qualquer α pertencente aos domínios das funções seno e cosseno. Logo, ela é uma identidade trigonométrica.

Quando temos uma igualdade, só podemos aceitá-la como identidade após uma prova, ou seja, após uma demonstração.

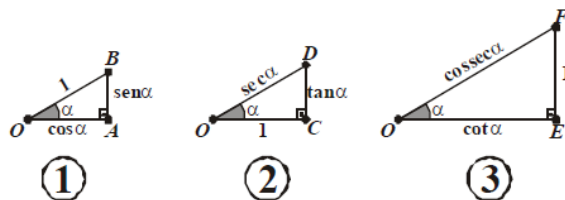
Para fazer uma demonstração desse tipo, podemos nos valer de qualquer das relações dadas acima, que são identidades.

6.12.1 Processo para demonstrar identidades

Considerando a igualdade, levaremos todas as funções envolvidas para uma razão equivalente em um dos três triângulos. Depois é só operar ambos os membros e chegar a uma mesma expressão.

Nos exercícios seguintes, demonstre que as igualdades são identidades:

Exercício 113 $\tan^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha = \tan^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$



Resolução: Levar do triângulo ② para ①:

$$\tan^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha = \tan^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

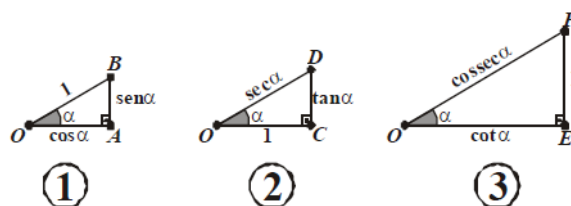
$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{cos}^2\alpha} \cdot \text{sen}^2\alpha = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{cos}^2\alpha} - \text{sen}^2\alpha$$

$$\frac{\text{sen}^4\alpha}{\text{cos}^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \text{cos}^2\alpha}{\text{cos}^2\alpha}$$

$$\frac{\text{sen}^4\alpha}{\text{cos}^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha(\text{sen}^2\alpha)}{\text{cos}^2\alpha}$$

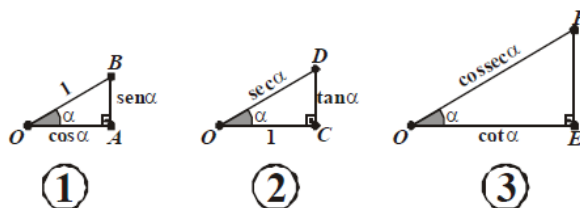
$$\frac{\text{sen}^4\alpha}{\text{cos}^2\alpha} = \frac{\text{sen}^4\alpha}{\text{cos}^2\alpha} \Rightarrow \text{C.Q.D. (como queríamos demonstrar)}.$$

Exercício 114 $(1 + \cot\alpha)^2 + (1 - \cot\alpha)^2 = 2 \cdot \text{cossec}^2\alpha$



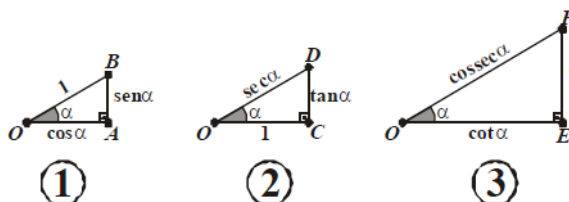
Resolução: Todas as funções já se encontram no triângulo ③, basta desenvolver:

Exercício 115 $\sec^2 \alpha + \cos \sec^2 \alpha = \sec^2 \alpha \cdot \cos \sec^2 \alpha$



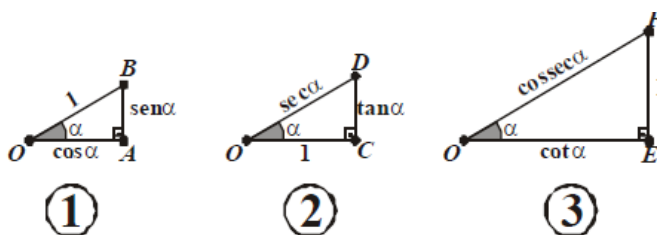
Resolução: Levar do triângulo ③ para ②:

Exercício 116 $\frac{\sen \alpha}{\cos \sec \alpha} = 1 - \frac{\cos \alpha}{\sec \alpha}$



Resolução: Levar dos triângulos ③ e ② para ①:

Exercício 117 $\frac{\cos \sec \alpha - \sen \alpha}{\sec \alpha - \cos \alpha} = \cot^3 \alpha$



Resolução: Levar dos triângulos ① e ② para ③:

7 Matrizes

A tabela a seguir mostra o conceito obtido por sete alunos de matemática aplicada, durante o primeiro semestre. Estes conceitos equivalem a três notas parciais (P-1, P-2 e P-3) mais uma substitutiva (SUB). A média é obtida através da soma dos três mais altos conceitos divididos por três. O aluno será considerado aprovado se a média for maior ou igual a sete.

Matemática Aplicada	P-1	P-2	P-3	SUB.
A.A.S.	4,3	8,6	6,5	5,9
A.J.T.	8,0	7,4	8,7	
A.M.O.	3,9	5,1	9,0	7,2
A.F.L.	4,9	8,3	5,4	7,3
C.M.B.	5,7	8,3	4,1	7,6
D.P.S.	9,4	10,0	10,0	9,9
D.G.D.	4,0	8,6	8,4	

OBS:
Os nomes estão representados pelas iniciais, para se preservar o anonimato dos alunos.

[Fig. 34]: Tabela de notas.

Para saber, por exemplo, que nota o aluno A.M.O. tirou na segunda parcial (P-2), procuramos o valor na 3ª linha e na 2ª coluna da tabela, que corresponde a 5,1.

Pode-se representar esta tabela através de uma matriz, que fica da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 4,3 & 8,6 & 6,5 & 5,9 \\ 8,0 & 7,4 & 8,7 & 0,0 \\ 3,9 & 5,1 & 9,0 & 7,2 \\ 4,9 & 8,3 & 5,4 & 7,3 \\ 5,7 & 8,3 & 4,1 & 7,6 \\ 9,4 & 10,0 & 10,0 & 9,9 \\ 4,0 & 8,6 & 8,4 & 0,0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 4,3 & 8,6 & 6,5 & 5,9 \\ 8,0 & 7,4 & 8,7 & 0,0 \\ 3,9 & 5,1 & 9,0 & 7,2 \\ 4,9 & 8,3 & 5,4 & 7,3 \\ 5,7 & 8,3 & 4,1 & 7,6 \\ 9,4 & 10,0 & 10,0 & 9,9 \\ 4,0 & 8,6 & 8,4 & 0,0 \end{bmatrix}.$$

7.1 Conceito de matriz

Matrizes são tabelas retangulares utilizadas para organizar dados numéricos. Cada número é chamado de elemento da matriz, as filas horizontais são chamadas linhas e as verticais são chamadas colunas.

No exemplo dado, a matriz tem 7 linhas e 4 colunas. Dizemos que essa é uma matriz do tipo 7×4 (lê-se: sete por quatro).

De um modo geral, uma matriz A do tipo $m \times n$ (m linhas e n colunas, $m, n \in \mathbb{N}^*$) é representada por:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz A também pode ser indicada por $A=(a_{ij})_{m \times n}$ ou $A=(a_{ij})$ com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exercício 118 Escreva a matriz $A=(a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij}=2i+j$.

Resolução:

Logo, $A=$

7.1.1 Algumas matrizes especiais

$$B=(3 \ 2 \ 1), C=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

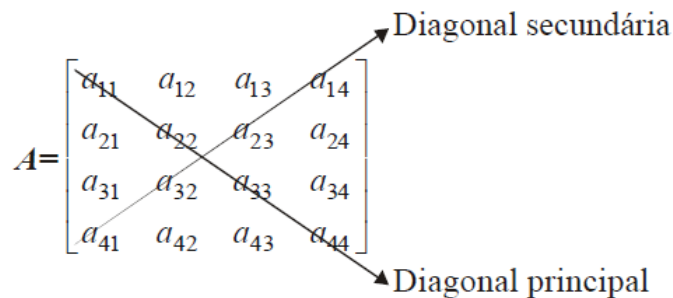
- B é uma matriz linha 1×3 ;
- C é uma matriz coluna 4×1 ;
- D é uma matriz nula 3×4 e pode ser representada por: $D=0_{3 \times 4}$.

7.2 Matriz quadrada

Uma matriz é quadrada quando o número de linhas é igual ao número de colunas. Assim, uma matriz quadrada $n \times n$ é chamada de: matriz quadrada de ordem n .

Exemplo: $E=\begin{bmatrix} -8 & -9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$. E é matriz quadrada de ordem 2.

Numa matriz quadrada, os elementos a_{ij} tais que $i=j$, formam a diagonal principal. A outra diagonal é chamada de diagonal secundária.



[Fig. 35]: Diagonais de uma matriz.

7.2.1 Matriz identidade

Matriz identidade ou matriz unidade é toda matriz quadrada de ordem n (indicada por I_n) onde os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais, iguais a zero.

Exemplo: $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é matriz identidade de ordem 3.

7.2.2 Matriz diagonal

Matriz diagonal é toda matriz quadrada de ordem n onde os elementos fora da diagonal principal são nulos.

Exemplo: As matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ são diagonais.

7.2.3 Matriz oposta

Dada uma matriz A , chamamos de matriz oposta de A (indicamos por $-A$) a matriz que é obtida invertendo-se o sinal de cada um de seus elementos.

7.3 Igualdade de matrizes

Duas matrizes de mesma ordem são iguais, se, e somente se, os elementos que ocupam a mesma posição são iguais.

Exercício 120 Sabendo-se que A e B são matrizes iguais, determine os valores de x e y :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3x - 2y & -8 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & x + y \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$x = \dots\dots\dots \text{ e } y = \dots\dots\dots$$

7.3.1 Matriz transposta

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, denominamos transposta de A (indicamos por A^t) a matriz de ordem $n \times m$ obtida trocando-se ordenadamente as linhas de A pelas colunas de A .

Exemplo: Seja $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. A sua transposta é: $A^t_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Diz-se que uma matriz A de ordem n é matriz simétrica, se ela é igual a sua transposta A^t (A é simétrica, então $A = A^t$).

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = A^t$.

7.4 Operações com matrizes

7.4.1 Adição de matrizes

Dadas duas matrizes A e B , ambas de ordem $m \times n$, dizemos que a soma da matriz A com a matriz B é a matriz S também de ordem $m \times n$, tal que:

$$(Eq.33) \quad S = A + B \Leftrightarrow s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Exercício 121 Efetuar a soma de A por B , sendo $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

Resolução:

$$A + B = \dots\dots\dots$$

7.4.2 Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes A e B , ambas de ordem $m \times n$, dizemos que a diferença entre a matriz A e a matriz B é a soma da matriz A com a oposta de B .

$$A - B = A + (-B).$$

Exercício 122 Efetuar a subtração $(A - B)$, sendo $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

Resolução:

7.4.3 Produto de um número real por uma matriz

Dada a matriz A de ordem $m \times n$ e um número real k , dizemos que o produto de k por A é a matriz B também de ordem $m \times n$, tal que:

$$(Eq.34) \quad B = k \cdot A \Leftrightarrow b_{ij} = k \cdot a_{ij}, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, determine o que se pede nos exercícios a seguir.

Exercício 123 Determine o valor de $5 \cdot A$.

Resolução:

$$5 \cdot A = \dots\dots\dots$$

Exercício 124 Determine $2 \cdot A - 3 \cdot B$.

Resolução:

$$2 \cdot A - 3 \cdot B = \dots\dots\dots$$

Exercício 125 Determine o valor da matriz X , tal que $2X - 4A + 8B = 0$.

Resolução:

$$X = \dots\dots\dots$$

7.4.4 Produto de matrizes

Dadas as matrizes A de ordem $m \times p$ e B de ordem $p \times n$, dizemos que o produto de A por B é a matriz C de ordem $m \times n$.

OBS. 12: $A = (a_{ik})_{m \times p}$, $B = (b_{kj})_{p \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$.

Os elementos c_{ij} da matriz C são obtidos da soma dos produtos dos elementos da i -ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j -ésima coluna de B .

(Eq.35) $C = A B \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^p (a_{ik} \cdot b_{kj})$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

7.4.4.1 Conclusões

- Só podemos multiplicar A por B se o número de colunas de A for igual ao número de linha de B ;
- A matriz C , resultante da multiplicação de A por B , tem o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B ;
- Então: $C_{m \times n} = A_{m \times p} B_{p \times n}$.

Exercício 126 Determine o produto de A por B , sendo $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -7 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$.

Resolução: $C = A B \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^p (a_{ik} \cdot b_{kj})$.

$$A_{4 \times 3} B_{3 \times 2} \Rightarrow C_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}$$

$c_{11} = \dots\dots\dots$
 $c_{12} = \dots\dots\dots$
 $c_{21} = \dots\dots\dots$
 $c_{22} = \dots\dots\dots$
 $c_{31} = \dots\dots\dots$
 $c_{32} = \dots\dots\dots$
 $c_{41} = \dots\dots\dots$
 $c_{42} = \dots\dots\dots$

Logo,

$C = \dots\dots\dots$

7.4.5 Matriz inversa

Uma matriz quadrada A de ordem n é inversível se existir uma matriz B de ordem n tal que:

(Eq.36) $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, sendo I_n a matriz unidade (identidade).

A matriz B denomina-se inversa da matriz A e indicamos por A^{-1} . Então:

(Eq.37) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Exercício 127 Determinar a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução: Tome $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Daí, desenvolvendo $A^{-1} \cdot A = I_2$, temos:

Logo, temos que:

$$A^{-1} = \dots\dots\dots$$

Exercício 128 Sendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{bmatrix}$, resolva a equação matricial

$$A \cdot X = B.$$

Resolução: Não conhecemos a matriz A mas, sabemos que $A^{-1} \cdot A = I_3$ e $I_3 \cdot X = X$.

Então: $A \cdot X = B \Rightarrow$ multiplicando A^{-1} a esquerda aos dois membros da equação:

$$X = \dots\dots\dots$$

Exercício 129 (FURRN) Sejam as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Determine as matrizes

X e Y , tais que:

$$\begin{cases} X + Y = A - 2B \\ 2X + Y = 2A + B \end{cases}$$

Resolução:

Logo:

$X = \dots\dots\dots$ e $Y = \dots\dots\dots$

8 Determinantes

Sendo A uma matriz de ordem n , pertencente ao conjunto das matrizes quadradas de elementos reais, chama-se determinante de A , representado por **det** A , ao número que se pode obter, operando com os elementos, de acordo com regras específicas. Na sequência serão dadas algumas regras para cálculo de determinantes.

8.1 Determinante de 1ª ordem

Se $n = 1$, então $A = [a_{11}]$.

(Eq.38) **det** $A = |a_{11}| = a_{11}$.

a_{11} é o determinante da matriz de primeira ordem.

Exercício 130 Calcular o determinante da matriz $A = [-5]$.

Resolução:

det $A = \dots\dots\dots$

8.2 Determinante de 2ª ordem

Se $n=2$, então $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. O determinante pode ser obtido pela diferença entre o produto da diagonal principal pela diagonal secundária.

(Eq.39) $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Exercício 131 Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução:

$\det A = \dots\dots\dots$.

Exercício 132 Resolver a equação $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ x & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix}$.

Resolução:

$S = \{ \dots\dots\dots, \dots\dots\dots \}$.

8.3 Determinante de 3ª ordem

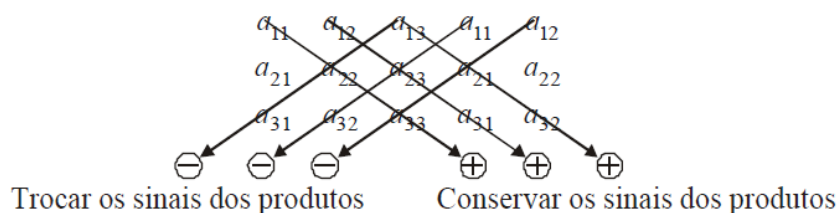
8.3.1 Regra de Sarrus

SARRUS, cujo nome completo é Pierre Frederic SARRUS (1798 - 1861), foi professor na universidade francesa de Strasbourg. A regra de SARRUS, foi provavelmente escrita no ano de 1833.

Para se obter o determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem, utilizando a regra de Sarrus, pode-se proceder da seguinte forma:

Tome a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

- Reescrever a direita da 3ª coluna, a 1ª e a 2ª colunas do determinante;
- Efetuar os produtos em diagonal, atribuindo sinais positivos aos resultados à direita e sinais negativos para os resultados à esquerda;
- Efetuar a soma algébrica. O resultado encontrado será o determinante associado à matriz dada.



[Fig. 36]: Determinante pela regra de Sarrus.

$$(Eq.40) \quad \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Exercício 133 Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Resolução:

$\det A = \dots\dots\dots$

Exercício 134

Resolver a equação

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & x & 6 \\ 4 & 0 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Resolução:

$$S = \{ \dots, \dots \}.$$

8.4 Determinante de ordem maior que 3

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

8.4.1 Menor complementar

O menor complementar do elemento a_{ij} da matriz A é o determinante da matriz quadrada que se obtém de A , suprimindo a linha i e a coluna j .

Indica-se por D_{ij} .

Exercício 135 Considerando a matriz A acima, determinar o menor complementar dos elementos a_{21} e a_{22} .

Resolução:

Menor complementar de a_{21} :

$$D_{21} =$$

Menor complementar de a_{22} :

$$D_{22} =$$

8.4.2 Cofator ou complemento algébrico

O cofator de um elemento a_{ij} da matriz A é o produto $(-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$.

Indica-se por A_{ij} .

$$(Eq.41) \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Exercício 136 Considerando a matriz A acima, determinar o cofator dos elementos a_{21} e a_{22} .

Resolução:

Cofator a_{21} :

$$A_{21} = \dots\dots\dots$$

Cofator a_{22} :

$$A_{22} = \dots\dots\dots$$

8.4.3 Conclusões

Considere um elemento de posição a_{ij} da matriz A :

- Quando $i+j$ é IMPAR, o cofator de a_{ij} é o OPOSTO do menor complementar;
- Quando $i+j$ é PAR, o cofator de a_{ij} é IGUAL ao menor complementar.

Nos exercícios a seguir, determinar o que se pede em relação à matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 8 & -5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 137 Encontre o menor complementar do elemento (-5) .

Resolução:

(-5) encontra-se na posição onde $i = \dots\dots\dots$ e $j = \dots\dots\dots$, logo, procura-se $D_{\dots\dots\dots}$.

Logo:

O menor complementar do elemento (-5) é

Exercício 138 Encontre o cofator do elemento (-5) .

Resolução:

(-5) encontra-se na posição onde $i = \dots$ e $j = \dots$, logo, procura-se $A_{\dots}$.

O cofator do elemento (-5) é $\dots$.

Exercício 139 Encontre o menor complementar do elemento (8) .

Resolução:

(8) encontra-se na posição onde $i = \dots$ e $j = \dots$, logo, procura-se $D_{\dots}$.

Logo:

O menor complementar do elemento (8) é $\dots$.

Exercício 140 Encontre o cofator do elemento (8) .

Resolução:

(8) encontra-se na posição onde $i = \dots$ e $j = \dots$, logo, procura-se $A_{\dots}$.

O cofator do elemento (8) é $\dots$.

8.4.4 Teorema de Laplace

Tome uma matriz A de ordem n com $n \geq 2$.

O determinante da matriz A é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz pelos respectivos cofatores.

Exercício 141 Calcular o determinante da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução: Observando a matriz, verificamos que na 2ª coluna e na 3ª linha aparecem 2 elementos nulos. Para o cálculo do **det A** iremos tomar como base a 2ª coluna.

$$\det A = 0 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + 2 \cdot A_{42}$$

$$\det A = A_{22} + 2 \cdot A_{42}$$

det A =

Exercício 142 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule **det A**.

Resolução: Observando a matriz A , verificamos que na 1ª linha e na 4ª coluna aparecem 2 elementos nulos. Para o cálculo do **det A** iremos tomar como base a 1ª linha. Se for considerada a 4ª coluna, o trabalho será equivalente.

$$\det A =$$

det A =

Exercício 143 Resolva a equação

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ x & x^2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Resolução:

$x = \dots\dots\dots$

8.4.5 Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então:

(Eq.42) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

8.4.6 Determinante da matriz inversa

Sendo A uma matriz quadrada inversível de ordem n ($n \geq 2$), temos:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det I$$

Como $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$ e $\det I = 1$, temos que:

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

(Eq.43) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, tal que $\det A \neq 0$.

Exercício 144 Sendo $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, calcule o determinante da matriz inversa de A .

Resolução: $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

$\det A^{-1} = \dots\dots\dots$.

Exercício 145 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x & 0 & 1 \\ \sin x & \cos x & 0 & 0 \\ \sin x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e sendo $0 \leq x \leq 2\pi$, calcule x para que

A seja inversível. Ache também $\det A^{-1}$.

Resolução: Para que A seja inversível, devemos ter $\det A \neq 0$.

Então, para que A seja inversível devemos ter: $\dots\dots\dots$.

Cálculo do $\det A^{-1}$:

$\det A^{-1} = \dots\dots\dots$.

9 Sistemas lineares

9.1 Equação linear

Entenderemos por equação linear nas variáveis (incógnitas) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, como sendo a equação da forma $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$ onde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ e b são números reais ou complexos. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são denominados coeficientes e b , termo independente.

OBS. 13: Quando o termo independente b for igual a zero, a equação linear denomina-se: EQUAÇÃO LINEAR HOMOGÊNEA.

Exercício 146 Determinar o que se pede, em relação a equação linear $-3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$.

Resolução:

Coeficientes: $\dots\dots\dots$;

Incógnitas: $\dots\dots\dots$;

Termo independente: $\dots\dots\dots$.

9.1.1 Solução de uma equação linear

9.1.1.1 Equação linear com 1 variável

Já estamos acostumados a resolver equações lineares de uma incógnita (variável), que são as equações de primeiro grau. Exemplo:

- $2x + 5 = 11$
- Solução: $x = 3$ ou $S = \{3\}$.

A solução é única.

9.1.1.2 Equação linear com 2 variáveis

Se tivermos uma equação com duas incógnitas (variáveis), a solução não é única, já que podemos ter um número infinito de pares ordenados que satisfazem a equação.

Exemplo:

- $x + y = 20$
- Solução: $x = 1$ e $y = 19$, par ordenado $(1, 19)$; $x = 2$ e $y = 18$, par ordenado $(2, 18)$; $x = 32$ e $y = -12$, par ordenado $(32, -12)$; e assim por diante. Podemos colocar como solução os termos ordenados: $(1, 19)$, $(2, 18)$, $(32, -12)$, ..., ou seja:
Existem infinitas soluções.

9.1.1.3 Equação linear com 3 variáveis

Como na anterior, podemos ter como exemplo:

- $2x + 3y - z = 15$
- Solução: $(1, 2, -7)$, $(3, 4, 3)$, ...
Existem infinitas soluções.

9.1.1.4 Equação linear com 4 variáveis

Exercício 147 Sabendo que S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) pertence ao conjunto solução S da equação linear $x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -4$, determinar o que se pede nas soluções S_i abaixo:

Resolução:

- $S_1: (\dots, 1, 2, 3);$
- $S_2: (-4, 7, -8, \dots);$
- $S_3: (-2, \dots, 5, -1);$
- $S_4: (1, 2, \dots, 4).$

Com o intuito de treinar, faça os três exercícios seguintes baseados no enunciado do exercício anterior. Apenas serão consideradas equações diferentes.

Exercício 148 $-2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 13.$

Resolução:

- $S_1: (\dots, 1, 2, 3);$
- $S_2: (-4, 7, -8, \dots);$
- $S_3: (-2, \dots, 5, -1);$
- $S_4: (1, 2, \dots, 4).$

Resolução:

$$\begin{aligned} S_1: & (\dots, 1, 2, 3); \\ S_2: & (-4, 7, -8, \dots); \\ S_3: & (-2, \dots, 5, -1); \\ S_4: & (1, 2, \dots, 4). \end{aligned}$$

Resolução:

$$\begin{aligned} S_1: & (\dots, 1, 2, 3); \\ S_2: & (-4, 7, -8, \dots); \\ S_3: & (-2, \dots, 5, -1); \\ S_4: & (1, 2, \dots, 4). \end{aligned}$$

Consideramos sistema linear um conjunto de m equações lineares com n incógnitas $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ que pode ser representado da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n = b_3 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{array} \right.$$

- Os termos a_{ij} ($i=1,2,\dots,m$ e $j=1,2,\dots,n$) são denominados coeficientes;
- Os termos b_i ($i=1,2,\dots,m$) são os termos independentes.
- O conjunto ordenado $S=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ será considerado solução do sistema linear se, e somente se, satisfizer simultaneamente todas as m equações lineares.
- Se todos os termos independentes das equações são nulos, o sistema linear será dito HOMOGÊNEO. Uma solução para o sistema linear homogêneo é o conjunto ordenado $(0,0,0,\dots,0)$, chamada solução trivial. Se o sistema homogêneo admitir outra solução em que as incógnitas não são todas nulas, a solução será chamada solução não trivial.

Exemplo de sistema linear homogêneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Solução trivial: } (0,0,0) \\ \text{Solução não-trivial: } (1,-2,-1) \end{array}$$

9.2.1 Sistemas lineares equivalentes

Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes se têm o mesmo conjunto solução S .

Exercício 151 Calcular a e b , de modo que os sistemas sejam equivalentes:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} ax - by = -1 \\ bx + ay = 2 \end{cases}$$

Resolução:

Resolvendo o primeiro sistema, temos:

O conjunto solução é $S = \{(.....,.....)\}$.

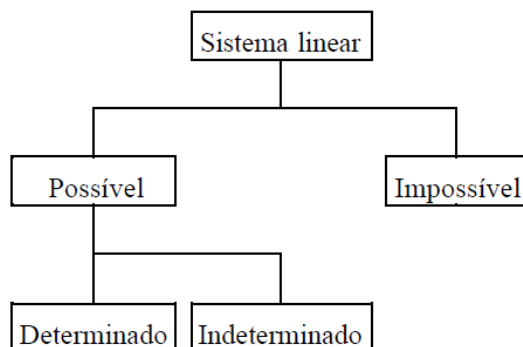
Substituindo o conjunto solução S no segundo sistema, temos:

Logo:

$a = e b =$

9.3 Classificação de um sistema linear

Os sistemas lineares são classificados quanto ao número de soluções da seguinte forma:



- Sistema linear POSSÍVEL e determinado (SPD): é o sistema que admite uma ÚNICA solução.
- Sistema linear POSSÍVEL e indeterminado (SPI): é o sistema que admite INFINITAS soluções.
- Sistema linear IMPOSSÍVEL (SI): é o sistema que NÃO ADMITE SOLUÇÃO.

9.4 Matrizes associadas a um sistema linear

Considere um sistema linear de m equações com n incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n = b_3 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{array} \right.$$

Podemos associar a ele as seguintes matrizes:

Matriz completa do sistema:

Matriz incompleta do sistema ou matriz dos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} = \mathbf{e} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

9.4.1 Forma matricial do sistema linear

O sistema também pode ser escrito em sua forma matricial $A \cdot X = B$, onde A é a matriz dos coeficientes, X o vetor coluna das incógnitas e B o vetor coluna dos termos independentes.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Notação simplificada: $A \cdot X = B$.

Se a matriz incompleta do sistema (matriz dos coeficientes) for uma matriz quadrada, o seu determinante **det** A é dito determinante do sistema.

Se $\det A \neq 0$, então a matriz A é inversível, isto é, existe A^{-1} , inversa de A .

Daí, podemos multiplicar a equação matricial, à esquerda, por A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Portanto, se $\det A \neq 0$, o sistema admite solução única e é possível e determinado (SPD).

9.5 Regra de Cramer

Gabriel Cramer, matemático e astrônomo suíço (1704 a 1752).

A regra de Cramer é empregada para resolver um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Considere um sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Consideramos o determinante da matriz dos coeficientes por D_A :

$$D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Os determinantes D_x , D_y e D_z que se obtêm de D_A substituindo, respectivamente, a 1ª coluna (dos coeficientes de x), a 2ª coluna (dos coeficientes de y) e a 3ª coluna (dos coeficientes de z) pela coluna dos termos independentes.

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Se $D_A \neq 0$, então o sistema é possível e determinado. Os valores das incógnitas são dados por:

- $x = \frac{D_x}{D_A}$
- $y = \frac{D_y}{D_A}$
- $z = \frac{D_z}{D_A}$

Portanto, o conjunto solução S é dado por $S = \{(x, y, z)\}$, que é:

Portanto, o conjunto solução S é dado por $S = \{(x, y, z)\}$, que é:

$$S = \left\{ \left(\frac{D_x}{D_A}, \frac{D_y}{D_A}, \frac{D_z}{D_A} \right) \right\}.$$

De uma forma geral, um sistema linear de n equações com n incógnitas $X=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, cujo determinante D_A da matriz das incógnitas é diferente de zero, é possível e determinado.

O conjunto solução desse sistema é $S = \left\{ \left(\frac{D_1}{D_A}, \frac{D_2}{D_A}, \frac{D_3}{D_A}, \dots, \frac{D_n}{D_A} \right) \right\}$, em que D_i é o

determinante que se obtém de D_A substituindo a i -ésima coluna (dos coeficientes de x_i) pela coluna dos termos independentes.

Exercício 152 Utilizando a regra de Gramer, determinar o conjunto solução S do sistema a seguir.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

Resolução:

Portanto, o conjunto solução S é dado por $S = \{(x, y, z)\}$, que é:
 $S = \{(\dots\dots\dots, \dots\dots\dots, \dots\dots\dots)\}$.

9.6 Resolução de um sistema linear por escalonamento

Considere novamente o sistema linear de m equações com n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sua forma matricial é dada por $A \cdot X = B$.

Sua forma matricial é dada por $A \cdot X = B$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Considere a matriz completa do sistema ou matriz aumentada do sistema, representada por C :

$$C = [A : B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Solução do sistema linear é dada por:

$$X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Caso $m > n$, bastam n equações linearmente independentes para se resolver o sistema.

Caso $m < n$, o sistema é indeterminado com $n - m$ variáveis livres.

Para o escalonamento, vamos considerar um sistema com n equações e n incógnitas.

O processo apresentado pode ser desenvolvido de forma análoga para os outros casos.

Então, tome um sistema linear $A \cdot X = B$ de ordem n . Com $(n - 1)$ passos, o sistema linear $A \cdot X = B$ é transformado num sistema triangular superior equivalente. Tome $\det A \neq 0$ como hipótese.

$A \cdot X = B \approx U \cdot X = D$, o que se resolve por substituição.

$$[A:B] \approx [U:D]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & d_1 \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} & d_n \end{array} \right]$$

Seja $C_0 = [A:B]$ e $C_k = [U:D]$ após k conjuntos de operações elementares aplicadas sobre C_0 .

$$C_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & \cdots & a_{3n}^{(0)} & b_3^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & a_{n3}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array} \right]$$

- Etapa 1: em C_0 , tome $L_i^{(0)}$, com $i=1,2,3,\dots,n$ como as linhas de C_0 e $a_{11}^{(0)}$ ($a_{11}^{(0)} \neq 0$) como pivô e calculam-se os multiplicadores $m_{i1}^{(0)}$ ($i=2,3,\dots,n$).
- Etapa 1: em C_0 , tome $L_i^{(0)}$, com $i=1,2,3,\dots,n$ como as linhas de C_0 e $a_{11}^{(0)}$ ($a_{11}^{(0)} \neq 0$) como pivô e calculam-se os multiplicadores $m_{i1}^{(0)}$ ($i=2,3,\dots,n$).

$$i=2 \Rightarrow m_{21}^{(0)} = -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}};$$

$$i=3 \Rightarrow m_{31}^{(0)} = -\frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}};$$

$\vdots$

$$i=n \Rightarrow m_{n1}^{(0)} = -\frac{a_{n1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}.$$

Operações elementares nas linhas $L_i^{(0+1)}$ ($i=1,2,3,\dots,n$).

$$i=1 \Rightarrow L_1^{(1)} \leftarrow L_1^{(0)};$$

$$i=2 \Rightarrow L_2^{(1)} \leftarrow m_{21}^{(0)} * L_1^{(0)} + L_2^{(0)};$$

$$i=3 \Rightarrow L_3^{(1)} \leftarrow m_{31}^{(0)} * L_1^{(0)} + L_3^{(0)};$$

$\vdots$

$$i=n \Rightarrow L_n^{(1)} \leftarrow m_{n1}^{(0)} * L_1^{(0)} + L_n^{(0)}.$$

Sendo $L_i^{(1)}$ ($i=1,2,3,\dots,n$) as linhas da matriz B_1 .

$\Rightarrow$ Anulam-se todos os valores abaixo do pivô $a_{11}^{(0)}$. Assim, obtém-se C_1 , que é dada por:

$$C_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right]$$

- Etapa 2: Repete-se o processo para o próximo pivô $a_{22}^{(1)}$ ($a_{22}^{(1)} \neq 0$), situado na diagonal da matriz C_1 e calculam-se os multiplicadores $m_{i2}^{(1)}$ ($i=3,\dots,n$). Sendo $a_{22}^{(1)}$ o pivô em C_1 , tome $L_i^{(1)}$, com $i=1,2,3,\dots,n$.

$$i=3 \Rightarrow m_{32}^{(1)} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}};$$

$$i=4 \Rightarrow m_{42}^{(1)} = -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}};$$

$\vdots$

$$i=n \Rightarrow m_{n2}^{(1)} = -\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Operações elementares nas linhas $L_i^{(1+1)}$ ($i=1,2,3,\dots,n$).

$$i=1 \Rightarrow L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)};$$

$$i=2 \Rightarrow L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)};$$

$$i=3 \Rightarrow L_3^{(2)} \leftarrow m_{32}^{(1)} * L_2^{(1)} + L_3^{(1)};$$

$\vdots$

$$i=n \Rightarrow L_n^{(2)} \leftarrow m_{n2}^{(1)} * L_2^{(1)} + L_n^{(1)}.$$

$\Rightarrow$ Anulam-se todos os valores abaixo do pivô $a_{22}^{(1)}$. Assim, obtém-se C_2 , que é dada por:

$$C_2 = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right]$$

- Etapa 3, etapa 4, ..., etapa $k=(n-1)$: Repete-se o processo para os próximos pivôs $a_{ii}^{(i-1)}$ ($a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$), situado na diagonal da matriz C_i com $i=3,4,\dots,(n-1)$.

Assim, na etapa k , obtém-se a matriz $C_k=[U:D]$ que é equivalente à matriz $C_0=[A:B]$.

$$C_k = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} & b_1^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} & b_2^{(k)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(k)} & \dots & a_{3n}^{(k)} & b_3^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{array} \right]$$

Resolvendo $U \cdot X = D$ por substituição retroativa, tem-se X que também é solução para o sistema $A \cdot X = B$.

Exercício 153 Utilizando o escalonamento, determinar o conjunto solução S do sistema a seguir.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 6x - 3y + z = -8 \\ 4x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

Resolução:

Portanto, o conjunto solução S é dado por $S = \{(x, y, z)\}$, que é:
 $S = \{(.....,.....,.....)\}$.

10 Geometria

10.1 Polígonos

Definição 42 Diz-se que um polígono é convexo se, quaisquer que sejam os pontos x e y do seu interior, o segmento de reta xy está inteiramente contido em seu interior.



[Fig. 37]: Polígono convexo e polígono côncavo.

OBS. 14: Fica subentendido que toda referência de polígono de agora em diante, será de polígono convexo, salvo menção contrária.

Teorema 1 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados é dada por $S_i = 180^\circ(n - 2)$.

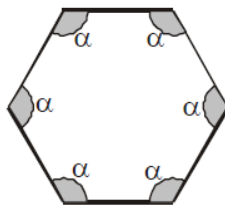
Exercício 154 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é igual a 2340° . Quantos lados têm esse polígono?

Resolução:

Esse polígono tem lados.

10.1.1 Polígonos regulares

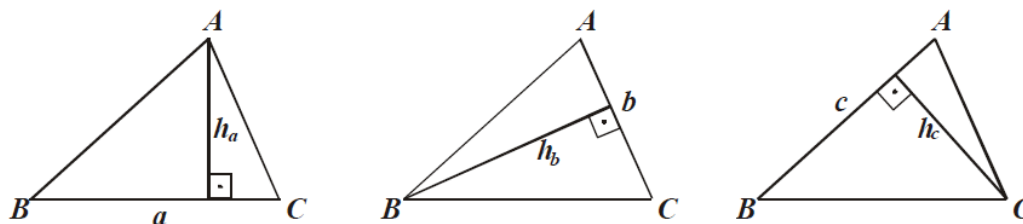
Definição 43 Um polígono é regular se, e somente se: i) todos os seus lados são congruentes; ii) todos os seus ângulos internos são congruentes.



[Fig. 38]: Hexágono regular: 6 lados congruentes e 6 ângulos congruentes.

10.1.2 Área do triângulo

10.1.2.1 Área de um triângulo em função de um lado e da altura relativa a ele



[Fig. 39]: Área 1 do triângulo.

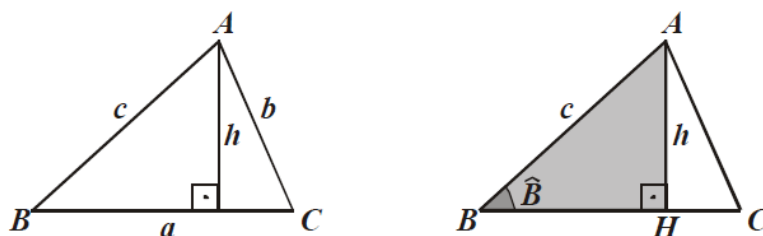
$$(Eq.44) \quad S_{\Delta} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

10.1.2.2 Área de um triângulo em função de dois lados e do ângulo compreendido



[Fig. 40]: Área 2 do triângulo.

No triângulo retângulo ABH , temos:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen } \hat{B}.$$

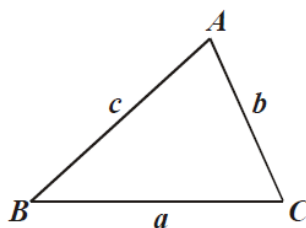
Substituindo h por $c \cdot \text{sen } \hat{B}$ na fórmula da área do triângulo ABC , obtemos:

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}}{2}.$$

Logo, a área do triângulo ABC em função de dois lados e do ângulo compreendido entre esses dois lados pode ser dada da seguinte forma:

$$(Eq.45) \quad S_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C}}{2}, \quad S_{\Delta} = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}}{2} \quad \text{ou} \quad S_{\Delta} = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}}{2}$$

10.1.2.3 Área de um triângulo em função dos três lados (Fórmula de Herão)

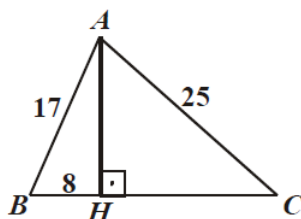


(Eq.46) $S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

onde p é o semi-perímetro do triângulo $A B C$. Então: $p = \frac{a+b+c}{2}$.

OBS. 15: A dedução desta e outras fórmulas dadas a seguir podem ser encontradas em BEZERRA, Matemática de 2º grau (Volume único), editora scipione.

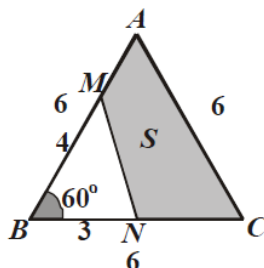
Exercício 155 Calcule a área do triângulo $A B C$ da figura.



Resolução:

$S_{\Delta} = \dots\dots\dots$ u.a.

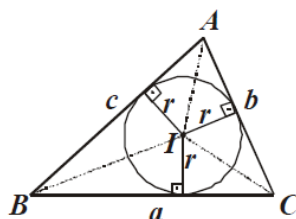
Exercício 156 Sabendo-se que o triângulo $A B C$ abaixo é equilátero de lado $l = 6$, calcular a área do quadrilátero $A M N C$. Dados: $A M = 2$ e $B N = 3$.



Resolução:

$S = \dots\dots\dots$ u.a.

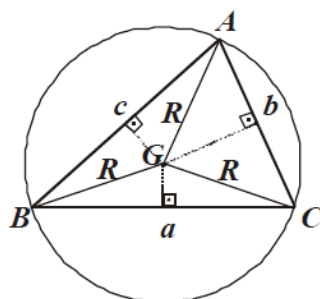
10.1.2.4 Cálculo dos raios das circunferências inscrita e circunscrita num triângulo



[Fig. 42]: Raio da circunferência inscrita.

OBS. 16: O ponto I é o incentro do triângulo ABC , encontro das bissetrizes.

(Eq.47) $S_{\Delta} = p \cdot r$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$

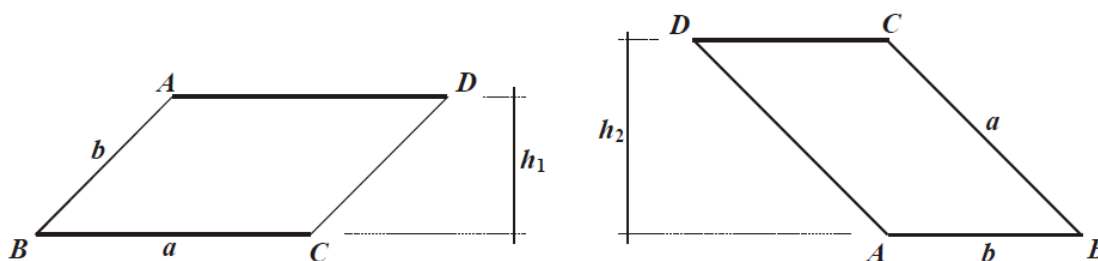


[Fig. 43]: Raio da circunferência circunscrita.

OBS. 17: O ponto G é o circuncentro do triângulo ABC , encontro das mediatrizes.

(Eq.48) $S_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

10.1.3 Área do paralelogramo

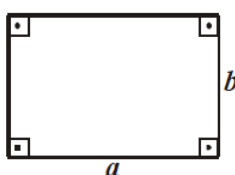


[Fig. 44]: Área do paralelogramo.

(Eq.49) $S_p = a \cdot h_1$ ou $S_p = b \cdot h_2$

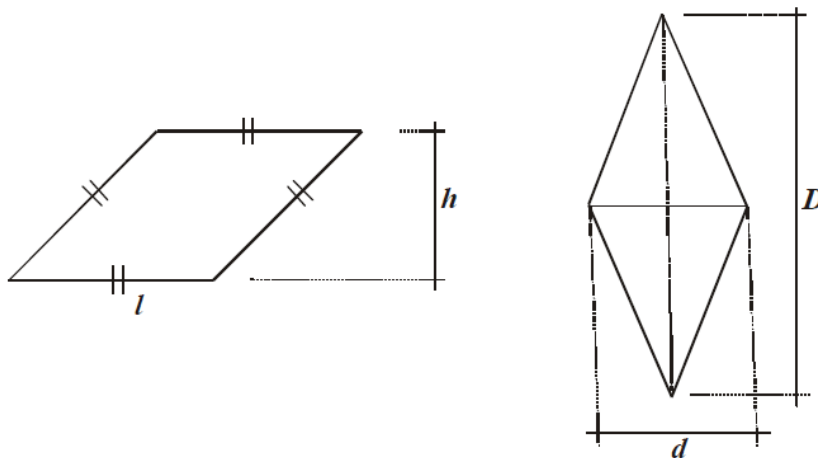
10.1.4 Área dos paralelogramos notáveis

- Área do retângulo:



(Eq.50) $S_R = a \cdot b$

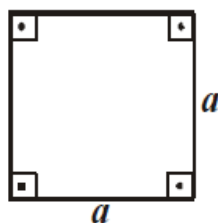
- Área do losango:



[Fig. 46]: Losango.

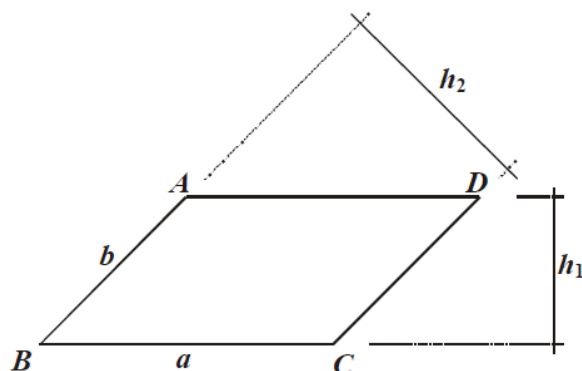
(Eq.51) $S_L = l \cdot h$ ou $S_L = \frac{D \cdot d}{2}$

- Área do quadrado:



(Eq.52) $S_Q = a \cdot a = a^2$

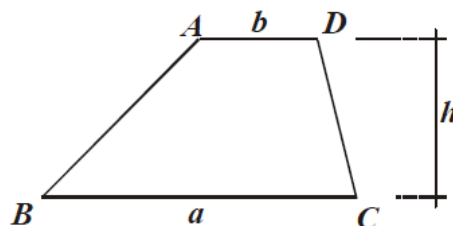
Exercício 157 Calcule as medidas dos lados de um paralelogramo sabendo que suas alturas medem 2 e 3 metros respectivamente e que seu perímetro é igual a 20 metros.



Resolução:

Os lados do paralelogramo são: e metros.

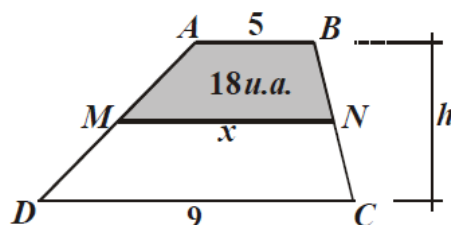
10.1.5 Área do trapézio



[Fig. 48]: Trapézio.

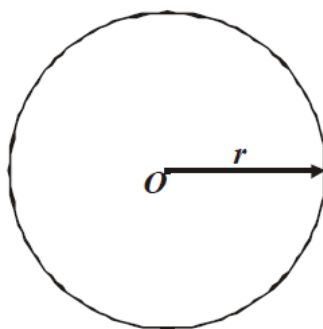
$$(Eq.53) \quad S_T = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

Exercício 158 Na figura abaixo, M e N são os pontos médios dos lados AD e BC do trapézio $ABCD$. Calcule a área desse trapézio, sabendo que a área do trapézio $ABNM$ é igual a 18.



$S_{ABCD} = \dots \dots \dots$ u.a.

10.1.6 Área e comprimento de um círculo



[Fig. 49]: Círculo.

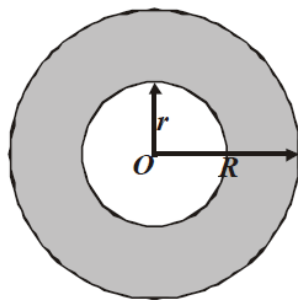
- A área de um círculo é dada por S_C :

$$(Eq.54) \quad S_C = \pi r^2$$

- O comprimento de um círculo é dado por C :

$$(Eq.55) \quad C = 2\pi r$$

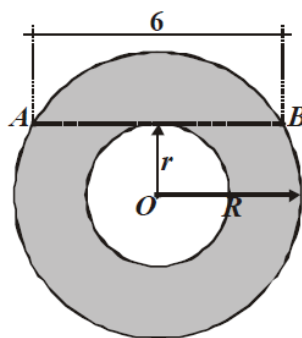
10.1.7 Área da coroa circular



[Fig. 50]: Coroa circular.

(Eq.56) $S_{coroa} = \pi(R^2 - r^2)$

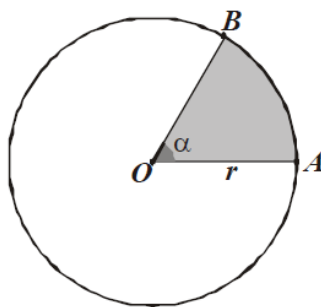
Exercício 159 Na figura abaixo, AB é uma corda da circunferência maior tangente à circunferência menor. Calcular a área da coroa circular, sabendo-se que $AB = 6$ cm.



Resolução:

$S_{coroa} = \dots\dots\dots$ u.a.

10.1.8 Área do setor circular



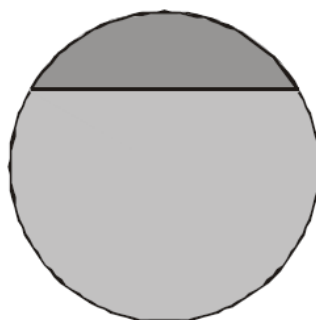
[Fig. 51]: Setor circular.

Setor circular é a intersecção de um círculo qualquer com um ângulo também qualquer que tenha seu vértice no centro do círculo.

(Eq.57) $S_{\text{setor}} = \frac{\alpha r^2}{2}$, sendo α considerado em radianos.

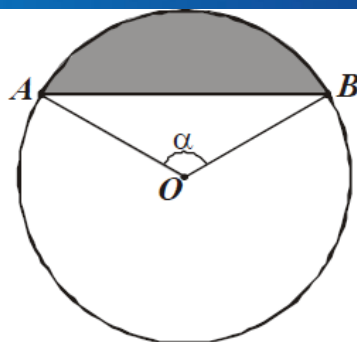
10.1.9 Área do segmento circular

Segmento circular é qualquer uma das duas partes em que um círculo fica dividido por uma corda qualquer.



[Fig. 52]: Segmento circular.

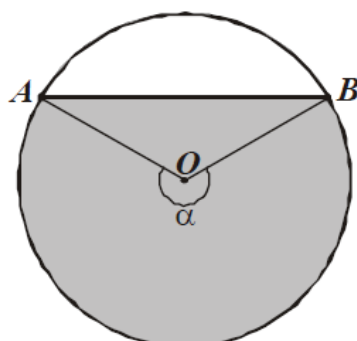
- 1o Caso: O segmento circular não contém o centro do círculo.



[Fig. 53]: Área do segmento circular que não contém o centro.

(Eq.58) $S_{seg} = S_{setor} - S_{\triangle AOB}$

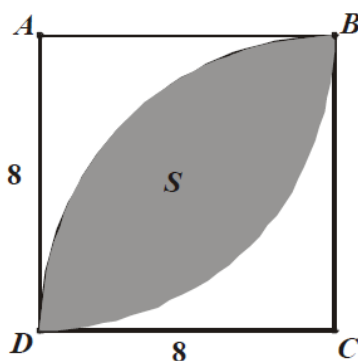
- 2o Caso: O segmento circular contém o centro do círculo.



[Fig. 54]: Área do segmento circular que contém o centro.

(Eq.59) $S_{seg} = S_{setor} + S_{\triangle AOB}$

Exercício 160 $A B C D$ é um quadrado de lado 8 metros. Os arcos de circunferência têm centros em A e C . Calcular a área da região indicada no desenho abaixo.



Resolução:

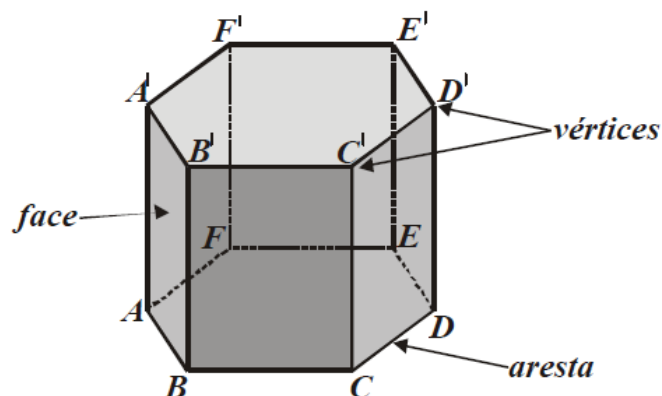
$S = \dots\dots\dots$ u.a.

10.2 Geometria espacial

10.2.1 Poliedros

Poliedro é um sólido limitado por polígonos planos, de modo que:

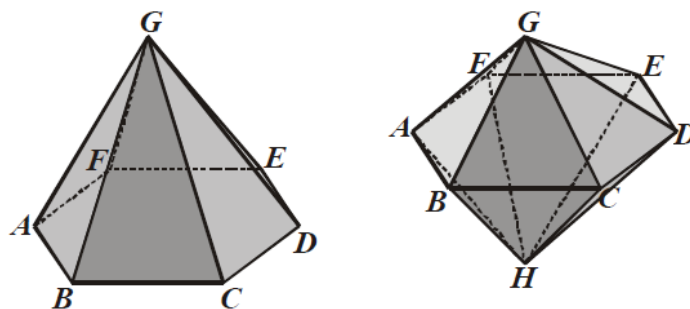
- Dois desses polígonos não estão num mesmo plano;
- Cada lado de um polígono é comum a dois e somente dois polígonos.



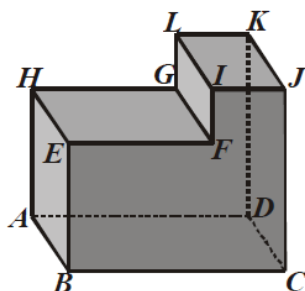
[Fig. 55]: Poliedro.

- Os polígonos são as faces do poliedro.
- Os lados e os vértices dos polígonos são, respectivamente, arestas e vértices do poliedro.

Um poliedro se diz convexo se, em relação a qualquer de suas faces, está todo situado num mesmo semi-espço determinado pelo plano que contém esta face. Caso contrário, o poliedro é dito não-convexo.



[Fig. 56]: Poliedros convexos.



[Fig. 57]: Poliedro não-convexo.

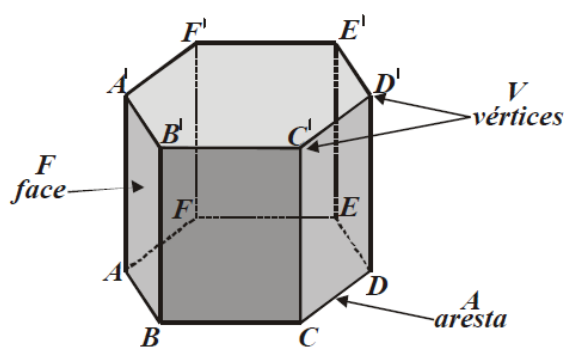
Nesta última figura, o plano que contém a face $FGLI$ não deixa as demais faces num mesmo semi-espço.

De acordo com o número de faces, os poliedros convexos possuem nomes especiais. A tabela a seguir mostra alguns deles.

Nº de faces	Nome do poliedro
4	tetraedro
5	pentaedro
6	hexaedro
7	heptaedro
8	octaedro
12	dodecaedro
20	icosaedro

- Lema de Euler: em toda superfície poliédrica aberta simples, sendo V o número de vértices, A o de arestas e F o de faces, verifica-se a relação:

(Eq.60) $V - A + F = 1$



[Fig. 58]: Teorema de Euler.

Teorema 2 Teorema de Euler: Em todo poliedro convexo, o número de arestas mais dois é igual à soma do número de faces com o número de vértices.

(Eq.61) $A + 2 = F + V$

OBS. 18: Aresta: ($A \geq 6$), face: ($F \geq 4$) e vértice: ($V \geq 4$).

Exercício 161 Quantas arestas tem um poliedro com 7 faces e 9 vértices?

Resolução:

São arestas.

Exercício 162 Num poliedro existem 8 vértices a menos do que arestas. Qual é o número de faces?

Resolução:

São faces.

Exercício 163 Um poliedro tem 40 arestas e o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces têm esse poliedro?

Resolução:

São faces.

Exercício 164 Um poliedro tem 6 faces triangulares, 4 faces pentagonais e 5 faces quadrangulares. Qual é o número de vértices, arestas e faces?

Resolução:

São vértices, arestas e faces.

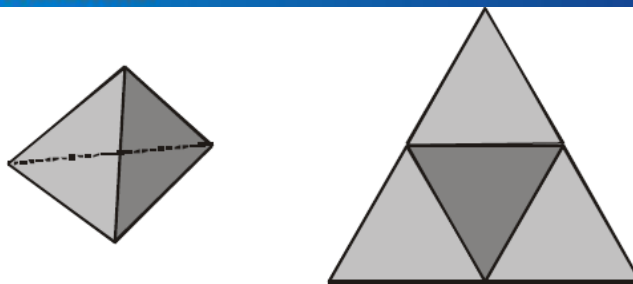
10.2.2 Poliedros regulares

Existem polígonos regulares planos com um número qualquer de lados. Porém, o número de poliedros regulares é limitado em 5.

Um poliedro convexo se diz regular quando suas faces são polígonos regulares congruentes entre si, e seus ângulos poliédricos também são congruentes.

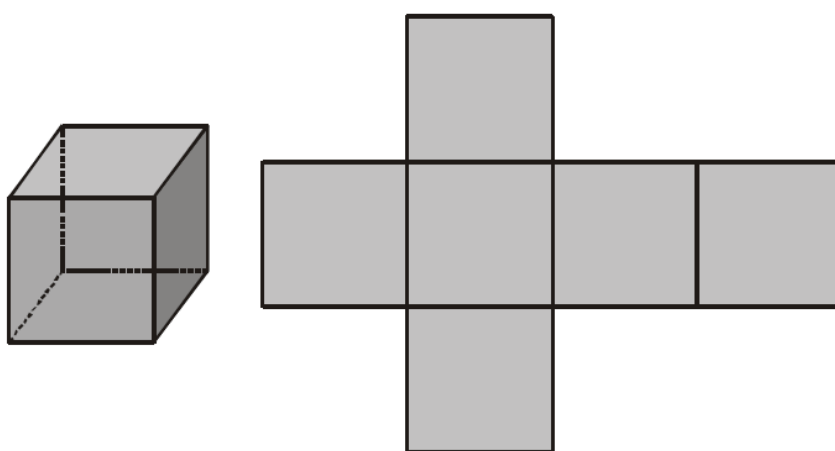
Os cinco poliedros regulares e suas respectivas planificações:

- Tetraedro regular:
4 faces triangulares
4 vértices
6 arestas



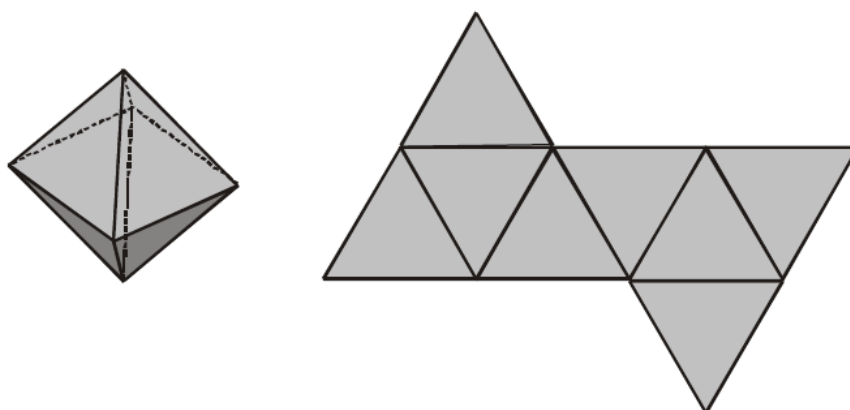
[Fig. 59]: Tetraedro regular.

- Hexaedro regular ou cubo:
6 faces quadrangulares
8 vértices
12 arestas



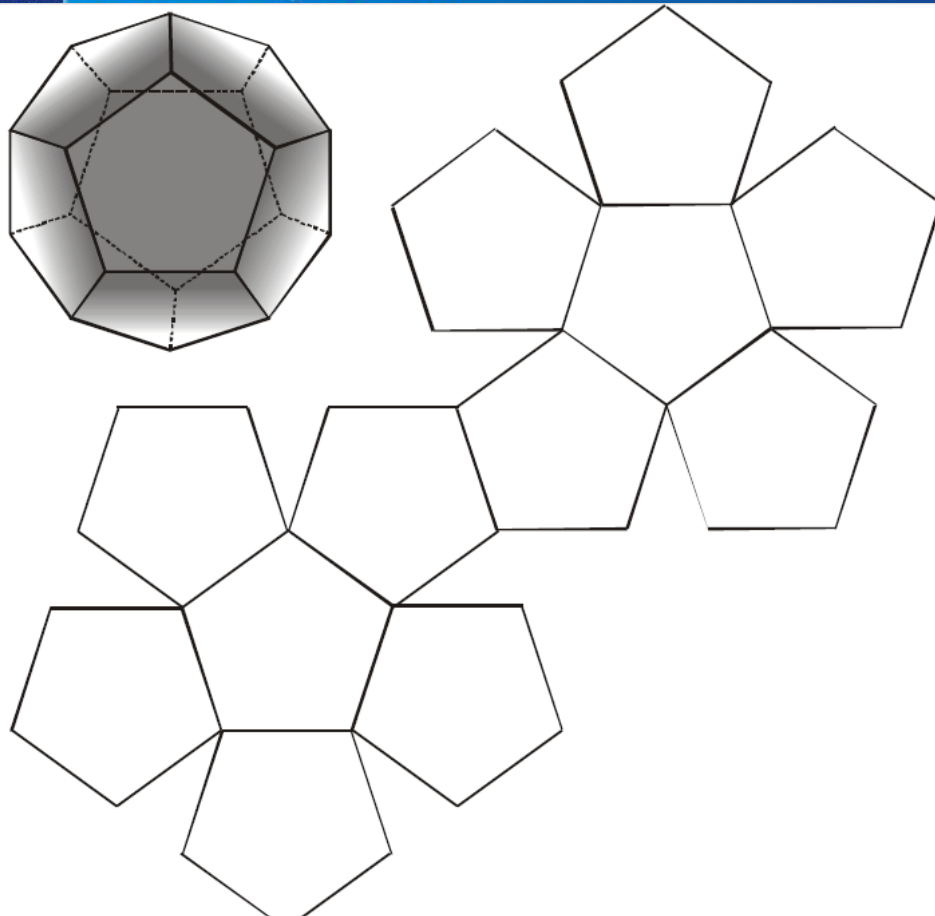
[Fig. 60]: Hexaedro regular.

- Octaedro regular:
8 faces triangulares
6 vértices
12 arestas

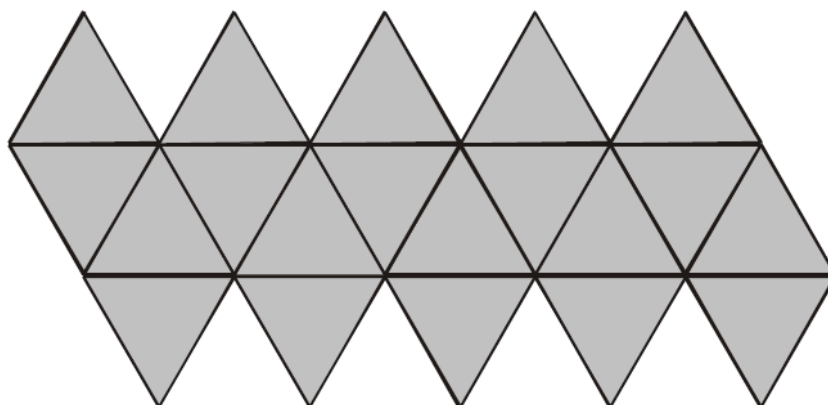


[Fig. 61]: Octaedro regular.

- Dodecaedro regular:
12 faces pentagonais
20 vértices
30 arestas

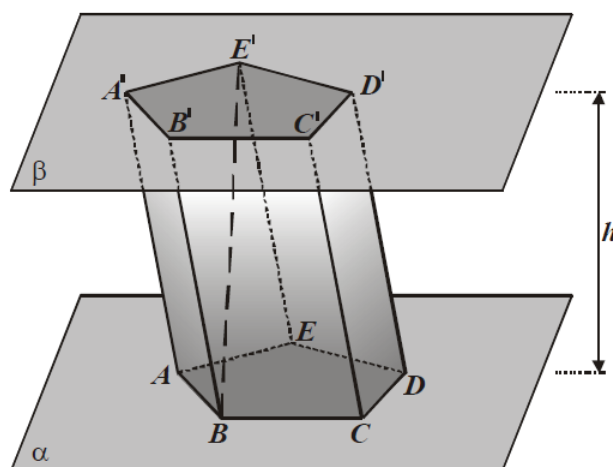


- Icosaedro regular:
20 faces triangulares
12 vértices
30 arestas



10.2.3 Prismas

Considere a figura abaixo, contendo os dois planos α e β , paralelos entre si.



[Fig. 64]: Prismas.

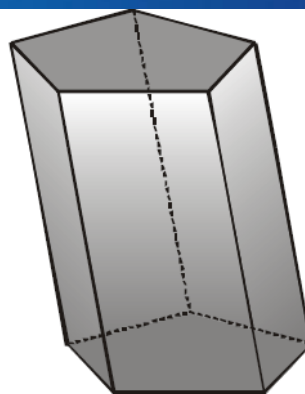
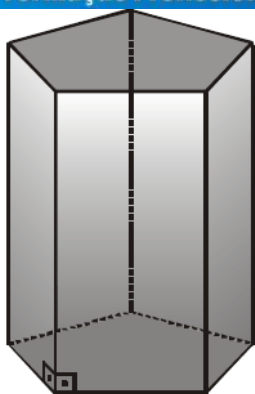
- Denomina-se prisma a reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta $\overline{DD'}$, com uma extremidade num ponto do polígono $ABCDE$ e a outra no plano β .

10.2.3.1 Elementos de um prisma

- Vértices: são os pontos $A, B, C, \dots, D'$ e E' .
- Bases: são os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ que estão contidas nos planos paralelos α e β .
- Altura: é a distância h dos planos que contêm as bases do prisma.
- Arestas das bases: são os lados das bases ($\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \dots, \overline{D'E'}$ e $\overline{E'A'}$).
- Arestas laterais: são os segmentos que unem os vértices correspondentes das bases ($\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$).
- Faces laterais: são os paralelogramos $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$ e $EAA'E'$. As bases do prisma também são consideradas faces.
- Diagonal: é o segmento $\overline{BE'}$ ou qualquer outro que une dois vértices não pertencentes a uma mesma face.

10.2.3.2 Prisma regular

Um prisma é considerado reto se as arestas laterais forem perpendiculares aos planos das bases. Caso contrário, o prisma é oblíquo.

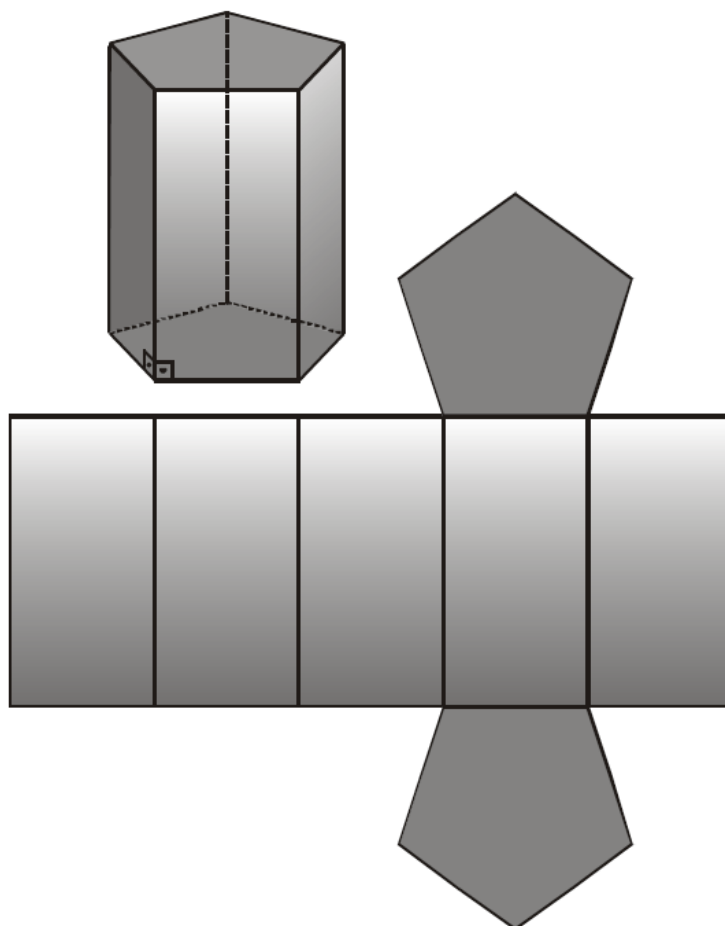


[Fig. 65]: Prisma reto e prisma oblíquo.

- Um prisma reto cuja base é um polígono regular é denominado prisma regular.

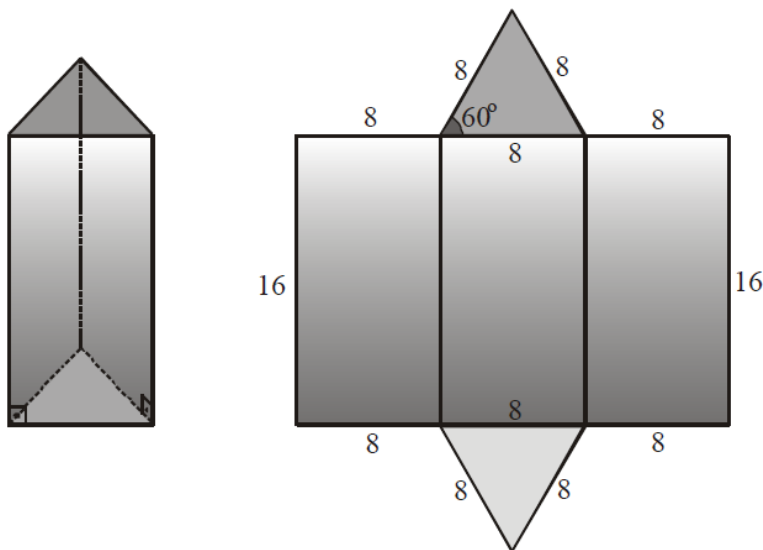
10.2.3.3 *Área da superfície de um prisma*

Considere o prisma reto pentagonal a seguir com sua representação planificada.



- Área da base (S_b): é a área de um dos polígonos das bases. Ex: área do pentágono.
- Área lateral (S_l): é a soma das áreas de todas as faces laterais. Ex: 5 vezes $S_{\text{retângulo}}$.
- Área total (S_t): é a soma da área lateral e das áreas das bases. $S_t = S_l + 2S_b$.

Exercício 165 Calcular a área total de um prisma triangular regular, cuja aresta da base mede 8 metros e cuja altura é igual a 16 metros.



Resolução:

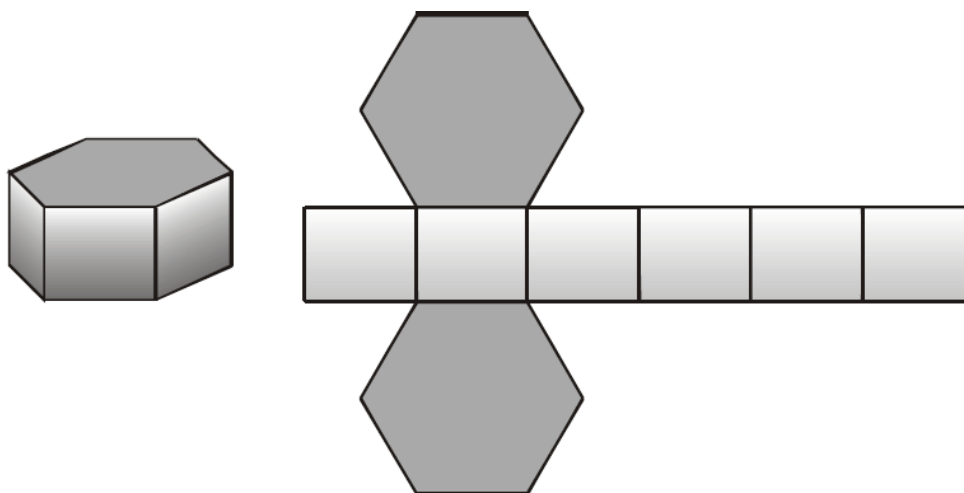
$$S_t = \dots\dots\dots \text{ m}^2.$$

Exercício 166

Uma fábrica de chocolates, também fabrica a embalagem para um de seus produtos. Esta embalagem é uma caixa de bombons em forma de prisma hexagonal regular.

Sabendo que a altura da caixa é de 10 cm e que o lado do polígono da base mede 12 cm, calcule a área de papelão necessária para se construir essa embalagem. Calcule a área total sem considerar o material utilizado para a colagem.

Resolução: Planificação da caixa:



$$S_t = \dots\dots\dots \text{ cm}^2.$$

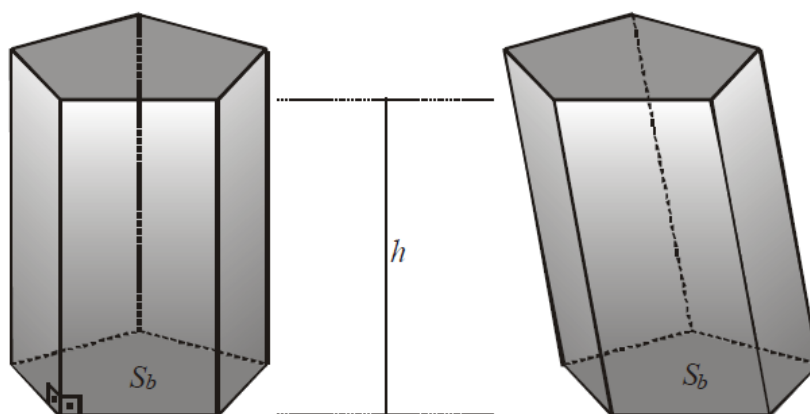
Exercício 167 O governo dos Estados Unidos resolveu pintar um dos prédios conhecido como pentágono. Supondo que o prédio tenha as medidas de acordo com a figura a seguir, calcular a área externa para que se possa fazer a pintura. Considere $\tan 54^\circ = 1,376$.



Resolução:

10.2.3.4 Volume de um prisma

O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura.



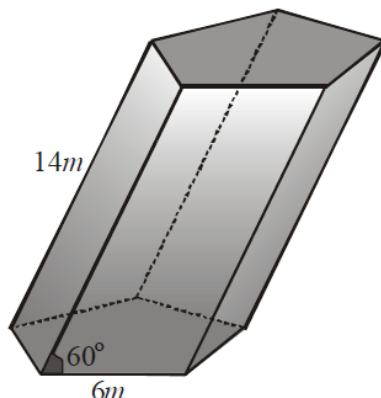
[Fig. 67]: Volume de um prisma.

$$(Eq.62) \quad V_p = S_b \cdot h$$

Exercício 168 A aresta da base de um prisma triangular regular mede 6 metros e a altura mede $12\sqrt{3}$ metros. Calcular o volume deste prisma.

Resolução:

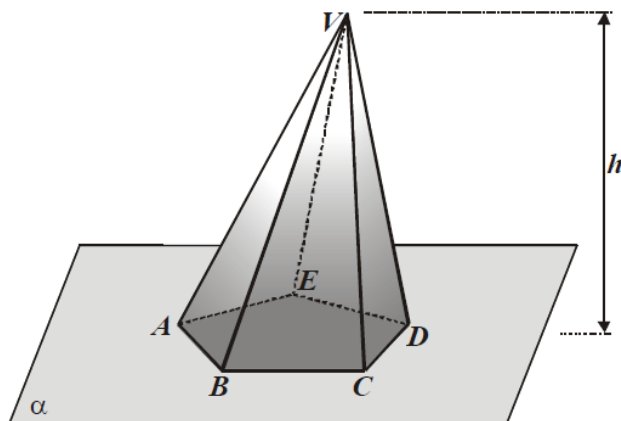
Exercício 169 Determine o volume do prisma oblíquo da figura a seguir, sabendo que sua base é um pentágono regular. Caso necessite, considere $\tan 54^\circ = 1,376$ e $\sqrt{3} = 1,732$.



Resolução:

10.2.4 Pirâmides

Considere a figura abaixo, contendo o plano α , um polígono em α e um ponto V que não pertence a α .



[Fig. 68]: Pirâmide.

- Denomina-se pirâmide a reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade em V e a outra num ponto qualquer do polígono.

10.2.4.1 Elementos de uma pirâmide

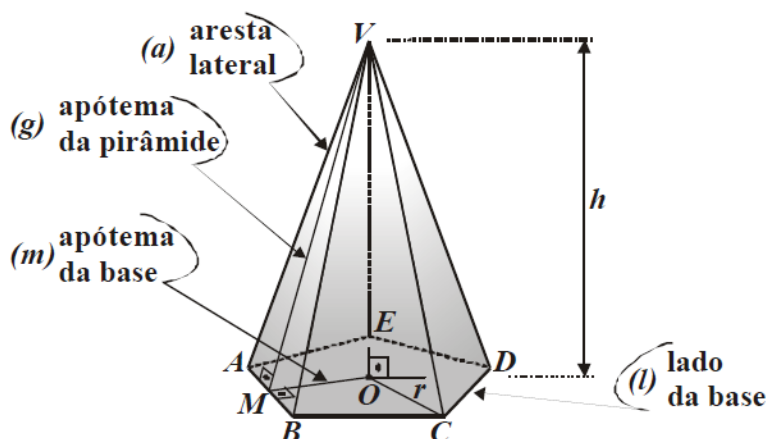
- Vértice: é o ponto V .
- Base: é o polígono $ABCDE$ que está contido no plano α .
- Altura: é a distância h do plano α ao vértice V .
- Arestas da base: são os lados do polígono $ABCDE$.
- Arestas laterais: são os segmentos que unem o vértice V a cada vértice da base.
- Faces laterais: são os triângulos VAB , VBC , VCD , VDE , VEA .

10.2.4.2 Pirâmide regular

Uma pirâmide é regular se, e somente se, sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.

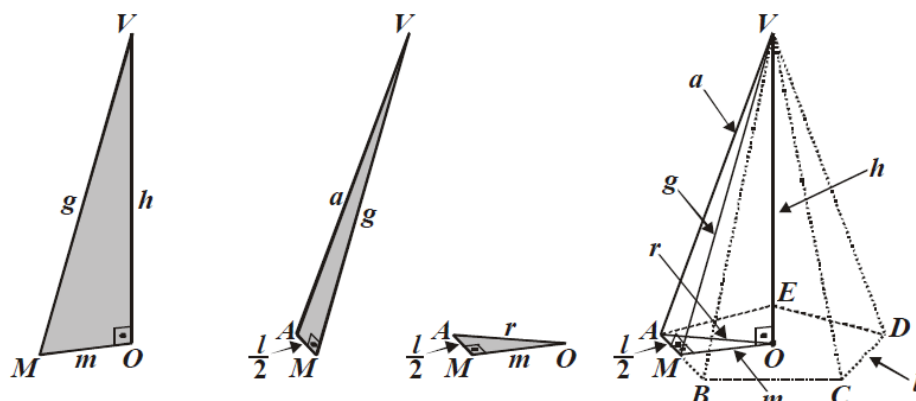
10.2.4.2 Pirâmide regular

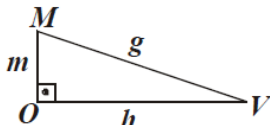
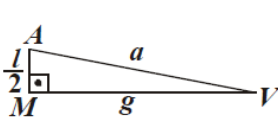
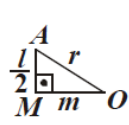
Uma pirâmide é regular se, e somente se, sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.



- O polígono da base é inscritível numa circunferência de raio $\overline{OC} = r$, chamado raio da base.
- O apótema da base é o segmento $\overline{OM} = m$, que forma um ângulo reto com $\overline{AB}$.
- As arestas laterais são congruentes ao segmento $\overline{AV} = a$.
- As faces laterais são triângulos isósceles congruentes: $\triangle ABV \sim \triangle BCV \sim \dots \sim \triangle EAV$.
- O apótema da pirâmide é a altura de uma face (triângulos isósceles) é o segmento $\overline{MV} = g$.

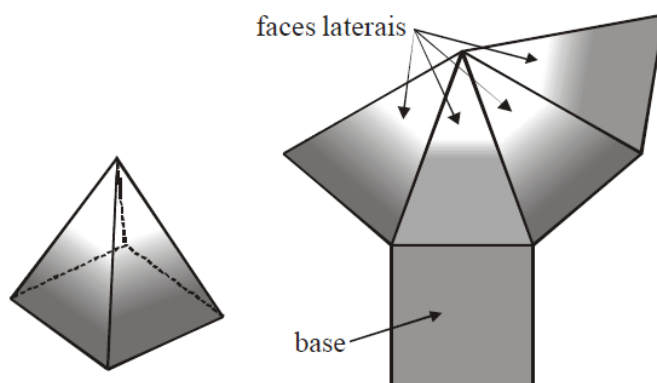
Com isso, considerando os triângulos retângulos $\triangle VOM$, $\triangle VMA$ e $\triangle OMA$, podemos usar o teorema de Pitágoras para obter as seguintes relações:



		
(Eq.63) $g^2 = h^2 + m^2$	(Eq.64) $a^2 = g^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$	(Eq.65) $r^2 = m^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$

10.2.4.3 Área da superfície de uma pirâmide

Considere a pirâmide quadrangular regular a seguir com sua representação planificada.



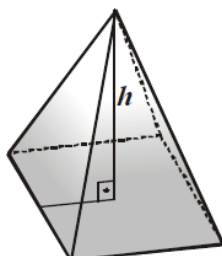
[Fig. 70]: Pirâmide regular quadrangular e sua planificação.

- Área da base (S_b): é a área do polígono da base. Ex: área do quadrado.

- Área lateral (S_l): é a soma das áreas de todas as faces laterais. Ex: 4 vezes $S_{\Delta \text{isósceles}}$.
- Área total (S_t): é a soma da área lateral e da área da base. $S_t = S_l + S_b$.

10.2.4.4 Volume de uma pirâmide

O volume de uma pirâmide é igual ao produto da área da base por um terço da altura.

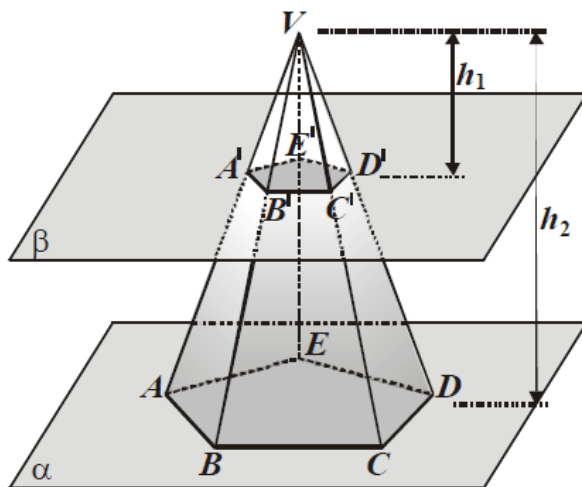


[Fig. 71]: Volume da pirâmide.

$$(Eq.66) \quad V_{pi} = \frac{S_b \cdot h}{3}$$

10.2.5 Tronco de pirâmide

O plano β , paralelo ao plano α , corta a pirâmide em dois sólidos. A parte de cima é uma pirâmide $VA'B'C'D'E'$ e a parte entre os dois planos é um tronco de pirâmide.



[Fig. 72]: Secção transversal de uma pirâmide.

10.2.5.1 Razões no tronco de pirâmide

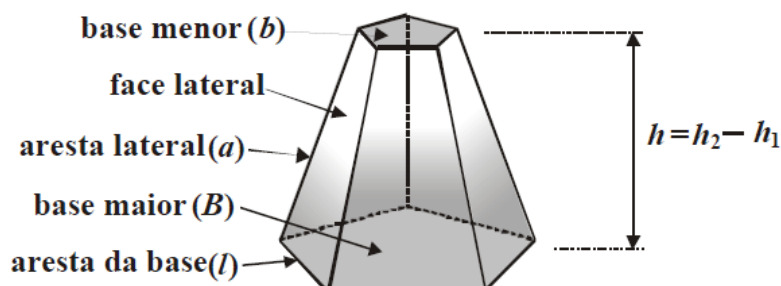
- A razão $\frac{h_1}{h_2}$ é chamada razão de semelhança em relação à secção transversal.

$$\boxed{\frac{h_1}{h_2} = \frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{VD'}{VD} = \frac{VE'}{VE}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{h_1}{h_2} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA}}$$

- Razão entre as áreas: $\frac{S_b}{S_B} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{S_b}{S_B} = \frac{h_1^2}{h_2^2}}$
- Razão entre os volumes: $\frac{V_{pi}}{V_{PI}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h_1}{\frac{1}{3} \cdot S_B \cdot h_2} = \frac{S_b \cdot h_1}{S_B \cdot h_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2} \cdot \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \boxed{\frac{V_{pi}}{V_{PI}} = \frac{h_1^3}{h_2^3}}$

10.2.5.2 Elementos do tronco de pirâmide

Como já estudamos a parte de cima em separado, vamos estudar agora o tronco de pirâmide.



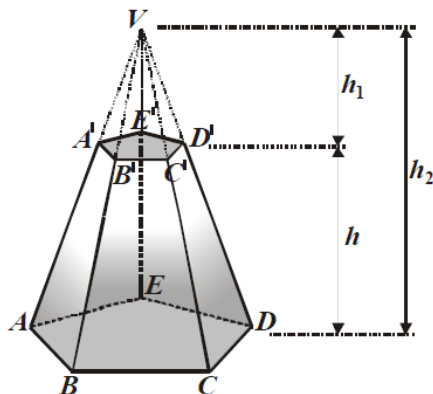
[Fig. 73]: Tronco de pirâmide.

- São 2 bases: base maior B e base menor b .
- Faces laterais: trapézios.
- Altura do tronco: $h = h_2 - h_1$ (distância entre as bases).

Tronco regular: caso em que a pirâmide geradora do tronco é regular.

- As bases são semelhantes.
- As faces laterais são trapézios isósceles congruentes. A altura do trapézio é o apótema do tronco.

10.2.5.3 Volume do tronco de pirâmide



[Fig. 74]: Volume do tronco de pirâmide.

$$(Eq.67) \quad V = \frac{h}{3} \cdot [S_B + \sqrt{S_B S_b} + S_b]$$

Demonstração:

Volume do tronco = (volume da pirâmide $VABCDE$) – (volume da pirâmide $VA'B'C'D'E'$).

$$V = \frac{S_B \cdot h_2}{3} - \frac{S_b \cdot h_1}{3}. \text{ Para simplificar a notação, tome } S_B = B \text{ e } S_b = b :$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot [B \cdot h_2 - b \cdot h_1]. \text{ Sendo } h_2 = h_1 + h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot [B \cdot (h_1 + h) - b \cdot h_1]$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot [B \cdot h + (B - b) \cdot h_1] \quad (i)$$

Cálculo de h_1 em função de h , B e b :

$$\text{Sendo } \frac{b}{B} = \frac{h_1^2}{h_2^2} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \Rightarrow \frac{h_1}{h_1 + h} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \Rightarrow h_1 \sqrt{B} = h_1 \sqrt{b} + h \sqrt{b}$$

$$h_1 = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \quad (ii)$$

Substituindo (ii) em (i):

$$V = \frac{1}{3} \cdot [B \cdot h + (B - b) \cdot h_1]$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot [B \cdot h + (B - b) \cdot \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}]$$

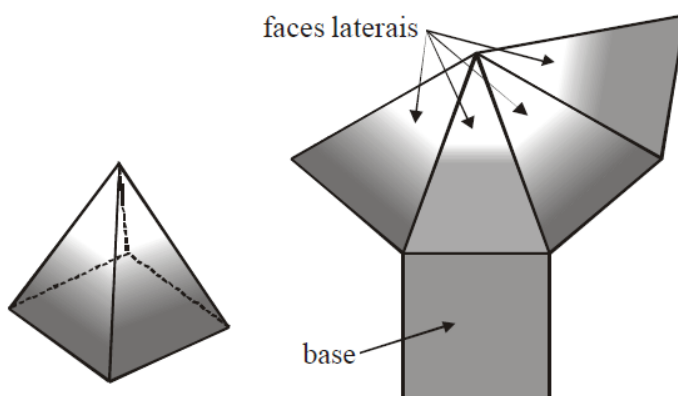
$$V = \frac{h}{3} \cdot [B + (B - b) \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}], \text{ mas, } (B - b) = (\sqrt{B} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{B} - \sqrt{b})$$

$$V = \frac{h}{3} \cdot [B + (\sqrt{B} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{B} - \sqrt{b}) \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}]$$

$$V = \frac{h}{3} \cdot [B + (\sqrt{B} + \sqrt{b}) \cdot \sqrt{b}]$$

$$V = \frac{h}{3} \cdot [B + \sqrt{Bb} + b], \text{ c.q.d.}$$

Exercício 170 Calcular a área total e o volume da pirâmide quadrangular regular, sabendo-se que a aresta lateral mede 6cm e o lado da base 4cm.



- Cálculo de h :

$$V_{pi} = \dots \text{cm}^3$$

Exercício 171 Em um tronco de pirâmide regular, as bases são quadrados de lado 2cm e 8cm. A aresta lateral do tronco mede 5cm. Calcule a área total e o volume do tronco.

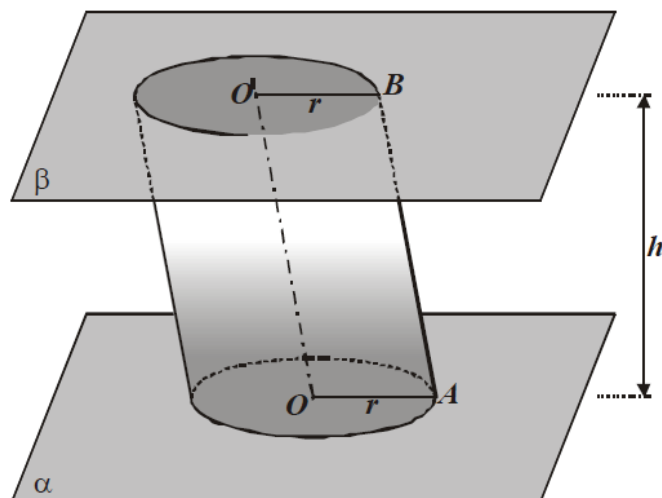
Resolução:

$$S_t = \dots \text{cm}^2$$

$$V = \dots \text{cm}^3$$

10.2.6 Cilindros

Considere a figura abaixo, contendo os dois planos α e β , paralelos entre si.



[Fig. 75]: Cilindros.

- Denomina-se cilindro a reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta $\overline{AB}$, com uma extremidade num ponto do círculo com centro O do plano α e a outra no plano β .

10.2.6.1 Elementos de um cilindro

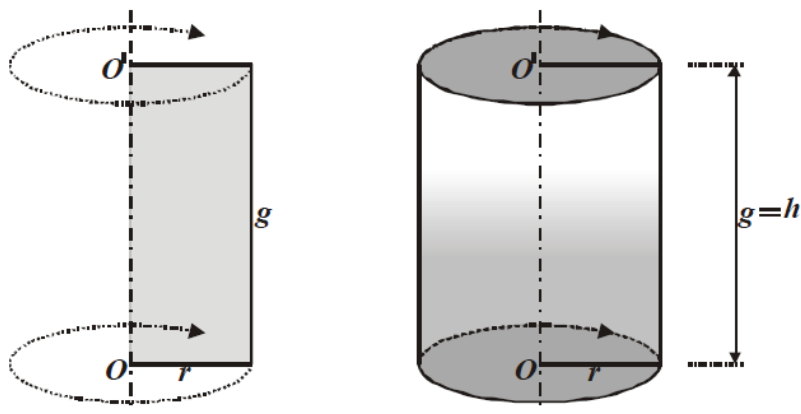
- Bases: são os dois círculos congruentes de raio r .
- Altura: é a distância h dos planos que contêm as bases do cilindro.
- Eixo: é o segmento $\overline{OO'}$ que tem por extremidades os centros das bases.
- Geratriz: são os segmentos paralelos ao eixo cujas extremidades pertencem às circunferências das bases.

10.2.6.2 Cilindro circular reto

Um cilindro se diz reto ou de revolução, quando a geratriz é perpendicular aos planos das bases.

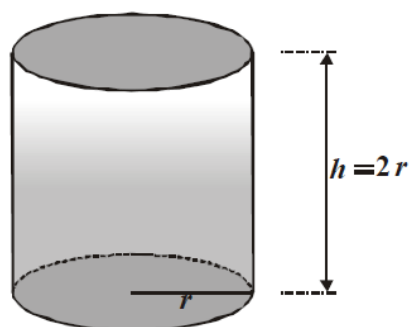
10.2.6.2 Cilindro circular reto

Um cilindro se diz reto ou de revolução, quando a geratriz é perpendicular aos planos das bases.



10.2.6.3 Cilindro eqüilátero

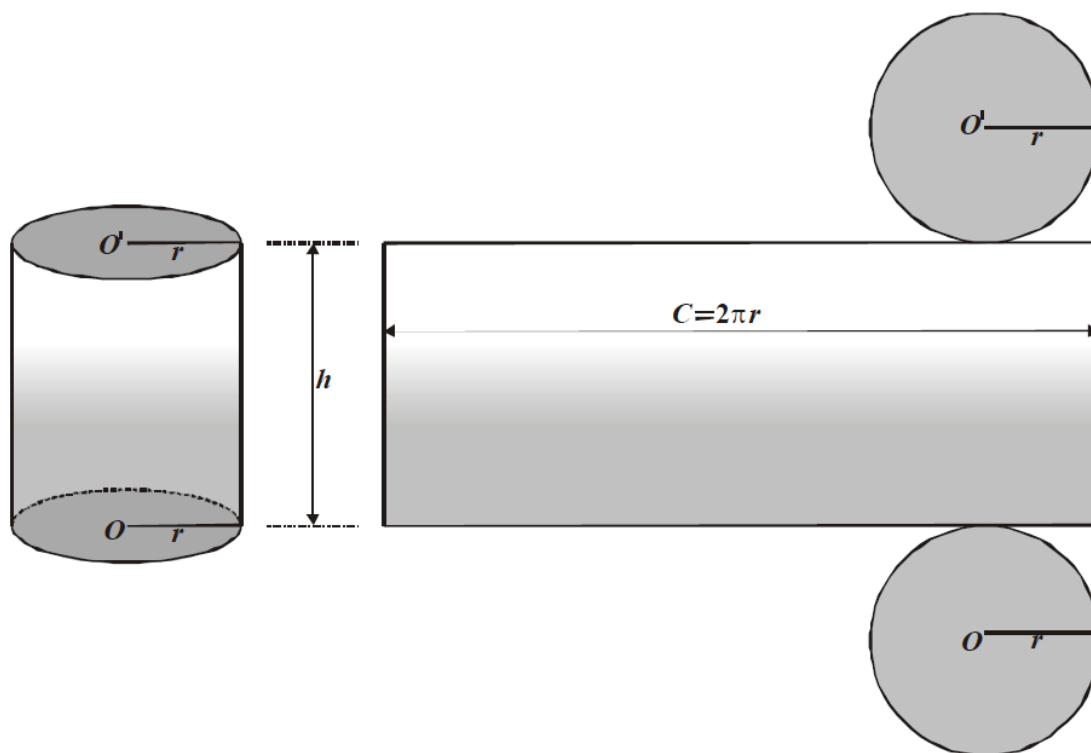
Diz-se que um cilindro reto é eqüilátero quando a altura (geratriz) é duas vezes o raio da base.



[Fig. 77]: Cilindro eqüilátero.

10.2.6.4 Área da superfície de um cilindro

Considere o cilindro reto a seguir com sua representação planificada.



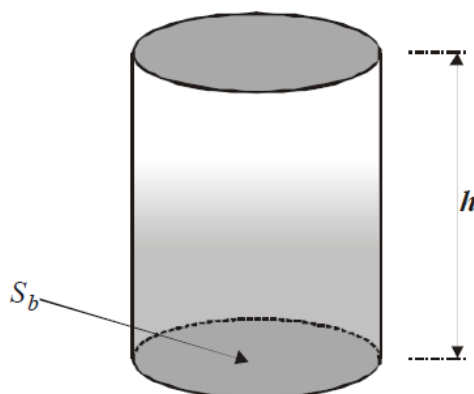
- Área da base (S_b): é a área do círculo de raio r : $S_b = \pi r^2$.
- Área lateral (S_l): é a área do retângulo de dimensões $2\pi r$ e h : $S_l = 2\pi r h$
- Área total (S_t): é a soma da área lateral e das áreas das bases.

$$S_t = S_l + 2 S_b \Rightarrow S_t = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

(Eq.68) $S_t = 2\pi r (h + r)$

10.2.6.5 *Volume do cilindro*

O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.



[Fig. 79]: Volume do cilindro.

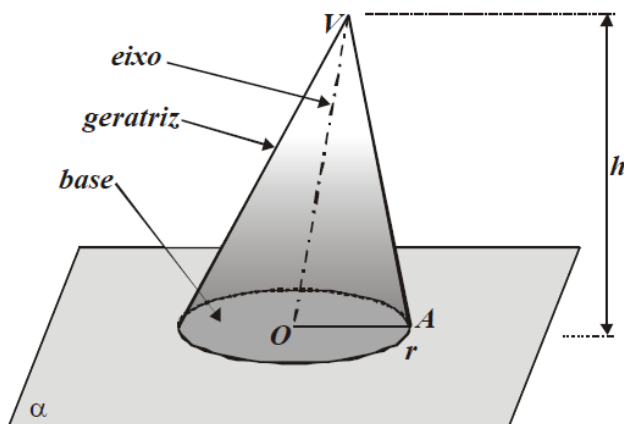
(Eq.69) $V_{ci} = S_b \cdot h \Rightarrow V_{ci} = \pi r^2 h$

Exercício 172 Em um prédio foi construída uma caixa de água em formato de cilindro equilátero de raio 0,8 metros. Foram colocadas três bóias nesta caixa, para diferentes níveis na reserva de água. A 1ª bóia encontra-se a um quarto da altura, a 2ª encontra-se na metade da altura e a última é para a reserva máxima de água na caixa. Calcule a área total externa sabendo-se que a tampa tem um encaixe perfeito. Qual o volume em cada um dos três níveis da caixa?

- Área total: $S_t = \dots\dots\dots \text{m}^2$
- Volumes total: $V_{ci} = \dots\dots\dots \text{m}^3$
- $\frac{1}{4}$ do volume: $V = \dots\dots\dots \text{m}^3$
- $\frac{1}{2}$ do volume: $V = \dots\dots\dots \text{m}^3$

10.2.7 Cones

Considere a figura abaixo, contendo o plano α , um círculo de raio r em α e um ponto V que não pertence a α .



[Fig. 80]: Cone.

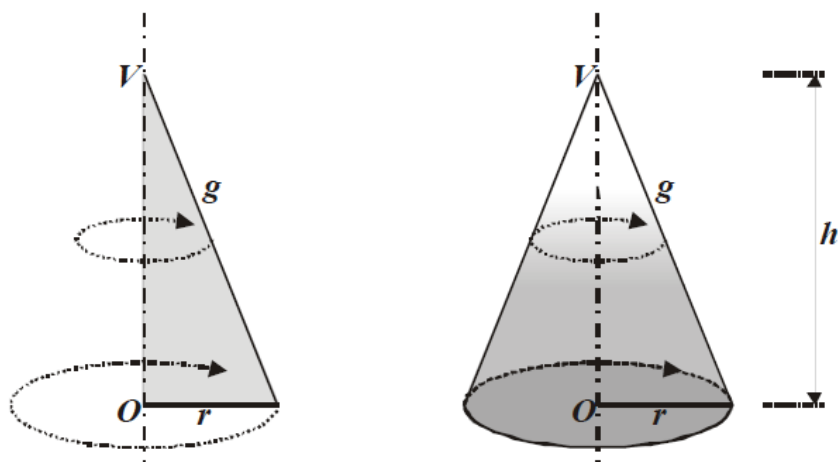
- Denomina-se cone a reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade em V e a outra num ponto qualquer do círculo.

10.2.7.1 Elementos de um cone

- Vértice: é o ponto V .
- Base: é o círculo que está contido no plano α .
- Altura: é a distância h do plano α ao vértice V .
- Eixo: é a reta que passa pelo vértice e pelo centro da base.
- Geratriz: é qualquer segmento com uma extremidade no vértice e outra num ponto qualquer da circunferência da base.

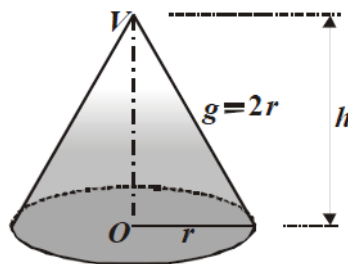
10.2.7.2 Cone regular ou de revolução

Um cone se diz reto ou de revolução, quando o eixo é perpendicular ao plano da base.



10.2.7.3 Cone equilátero

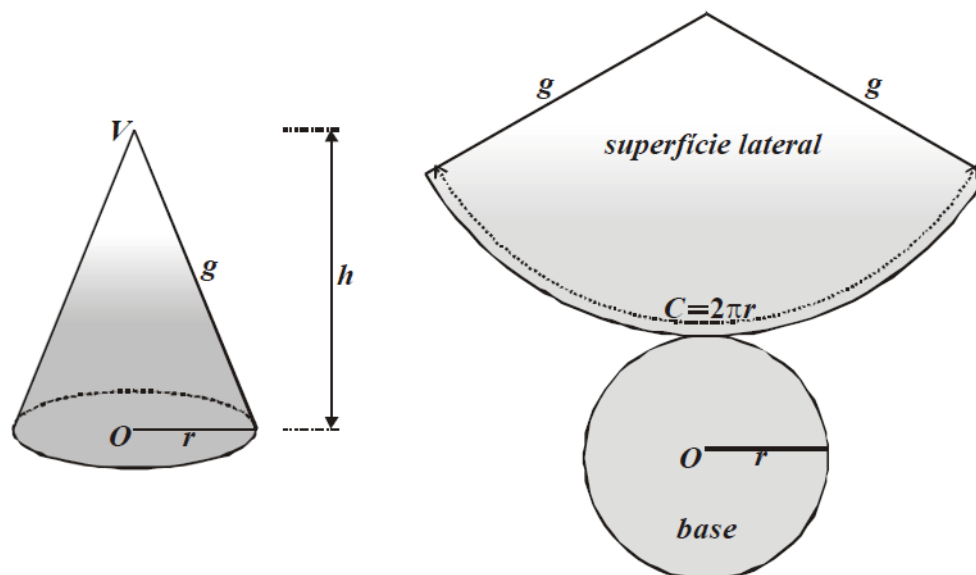
Um cone se diz equilátero quando a geratriz g é duas vezes o raio r da base.



[Fig. 82]: Cone regular.

10.2.7.4 Área da superfície de um cone

Considere o cone regular a seguir com sua representação planificada.

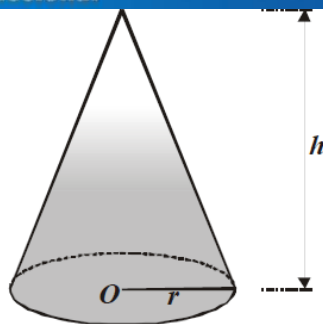


[Fig. 83]: Cone regular e sua planificação.

- Área da base (S_b): é a área do círculo de raio r : $S_b = \pi r^2$.
 - Área lateral (S_l): é a área do setor circular de raio g : $S_l = \frac{2\pi r \cdot g}{2} \Rightarrow S_l = \pi r g$
 - Área total (S_t): é a soma da área lateral e da área da base: $S_t = S_l + S_b \Rightarrow S_t = \pi r g + \pi r^2$.
- (Eq.70) $S_t = \pi r (g + r)$

10.2.7.5 Volume de um cone

O volume de um cone é igual ao produto da área da base por um terço da altura.

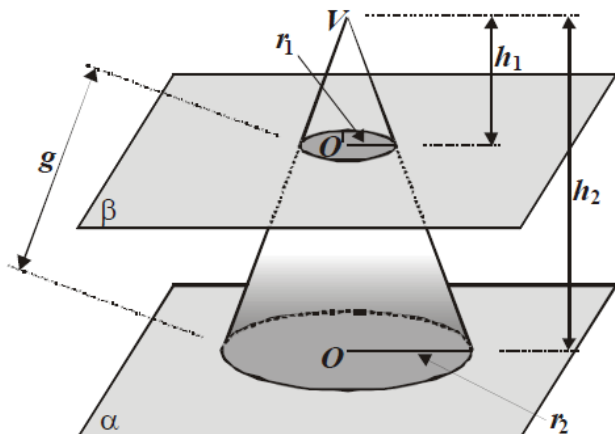


[Fig. 84]: Volume do cone.

$$(Eq.71) \quad V_{co} = \frac{S_b \cdot h}{3} \Rightarrow V_{co} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

10.2.8 Tronco de cone

O plano β , paralelo ao plano α , corta o cone e o divide em dois sólidos. A parte de cima é um cone com raio r_1 e a parte entre os dois planos é um tronco de cone.



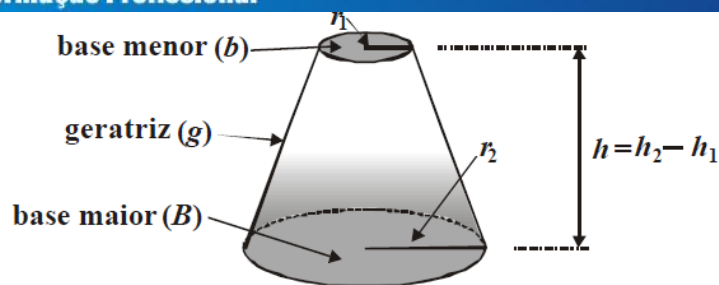
10.2.8.1 Razões no tronco de cone

São razões equivalentes às do tronco de pirâmide.

- A razão $\frac{h_1}{h_2}$ é chamada razão de semelhança em relação à secção transversal: $\boxed{\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2}}$
- Razão entre as áreas: $\frac{S_b}{S_B} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{S_b}{S_B} = \frac{h_1^2}{h_2^2}}$
- Razão entre os volumes: $\frac{V_{co}}{V_{CO}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h_1}{\frac{1}{3} \cdot S_B \cdot h_2} = \frac{S_b \cdot h_1}{S_B \cdot h_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2} \cdot \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \boxed{\frac{V_{co}}{V_{CO}} = \frac{h_1^3}{h_2^3}}$

10.2.8.2 Elementos do tronco de cone

Como já estudamos a parte de cima em separado, vamos estudar agora o tronco de cone.

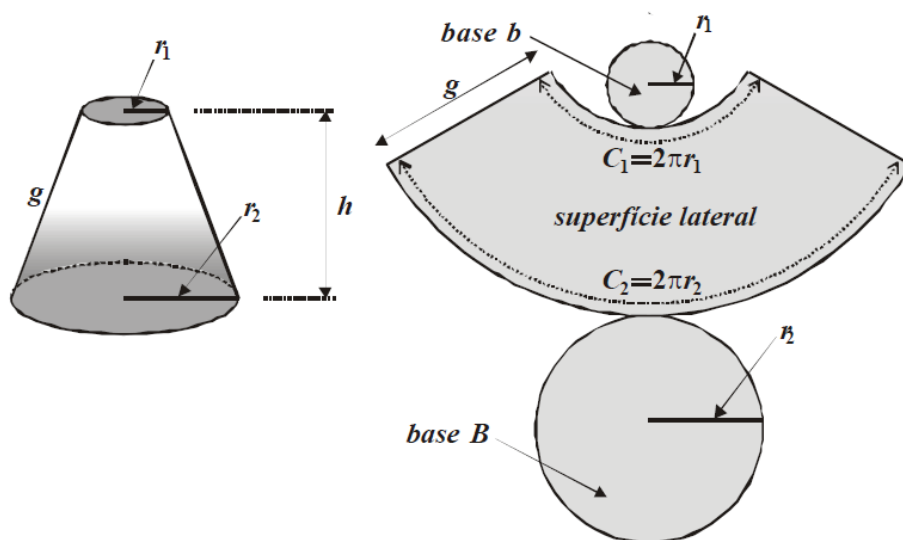


[Fig. 86]: Tronco de cone.

- São 2 bases: base maior B e base menor b .
- Geratriz: g .
- Altura do tronco: $h = h_2 - h_1$ (distância entre as bases).

Tronco regular: caso em que o cone gerador do tronco é regular.

10.2.8.3 Área do tronco de cone regular



[Fig. 87]: Planificação do tronco de cone.

- A superfície lateral do tronco de cone é equivalente a um trapézio de altura g e bases C_1 e C_2 . Então, a área da superfície lateral do tronco (A_l) será:

$$A_l = \frac{g}{2} (C_1 + C_2) \Rightarrow A_l = \frac{g}{2} (2\pi r_1 + 2\pi r_2)$$

$$\Rightarrow A_l = \pi g (r_1 + r_2)$$

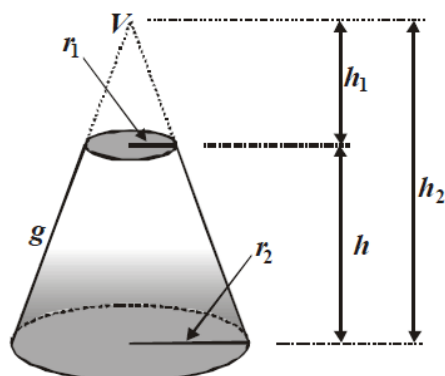
- A área total do tronco A_T :

$$(Eq.72) \quad A_T = A_l + S_b + S_B$$

$$\Rightarrow A_T = \pi g (r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

10.2.8.4 Volume do tronco de cone

Tomando como base o volume do tronco de pirâmide, desenvolve-se, analogamente, o volume do tronco de cone.



$$V = \frac{h}{3} \cdot [S_B + \sqrt{S_B S_b} + S_b]$$

$$V = \frac{h}{3} \cdot [\pi r_2^2 + \sqrt{\pi r_2^2 \cdot \pi r_1^2} + \pi r_1^2]$$

$$V = \frac{h}{3} \cdot [\pi r_2^2 + \pi r_1 r_2 + \pi r_1^2]$$

(Eq.73) $V = \frac{\pi h}{3} \cdot [r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$

Exercício 173 Para o time vencedor em um campeonato de futebol no bairro, o professor de matemática resolveu oferecer um troféu composto pela junção de dois troncos de cones retos mais um cone reto, como pode ser observado na figura. Com base nos dados abaixo, calcular a área total do troféu (menos seus pés) e seu volume.

- Dados: $h_1 = 12$ cm; $g_1 = 13$ cm;

A razão de r_1 para r_2 é de $\frac{5}{13}$;

A razão de h_1 para h_2 é de $\frac{6}{11}$.

⇒ DICAS PARA A RESOLUÇÃO:

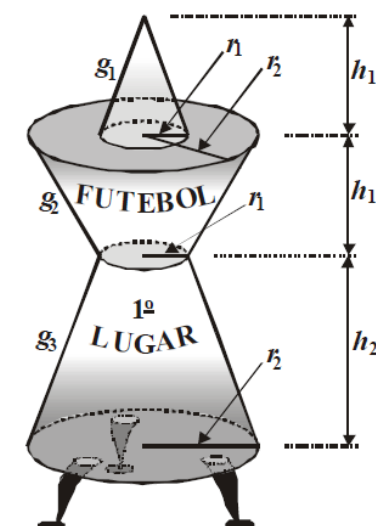
- Cálculo da área, de cima para baixo:

$A = [\text{área lateral do cone } (A_1)] + [\text{área da coroa circular } (A_2)] + [\text{área lateral do tronco de cone 1 } (A_3)] + [\text{área lateral do tronco de cone 2 } (A_4)] + [\text{área do círculo } (A_5)]$

$$\Rightarrow A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

- Volume, de cima para baixo:

$V = [\text{volume do cone } (V_1)] + [\text{volume do tronco de cone 1 } (V_2)] + [\text{volume do tronco de cone 2 } (V_3)]$



$$\Rightarrow V = V_1 + V_2 + V_3$$

Resolução:

$$h^1 = 12 \text{ cm}; g^1 = 13 \text{ cm}.$$

$$r^1 = \dots \text{ cm}; r^2 = \dots \text{ cm}; h^2 = \dots \text{ cm}; g^2 = \dots \text{ cm}; g^3$$

$$= \dots \text{ cm}.$$

$$\bullet A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

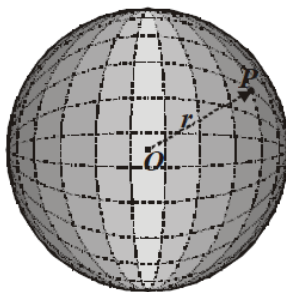
$$\text{Logo, } A = \dots \text{ cm}^2$$

$$\bullet V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$\text{Logo, } V = \dots \text{ cm}^3$$

10.2.9 Esferas

Sejam dados os pontos O , P do espaço e um segmento $\overline{OP}$ de medida r .



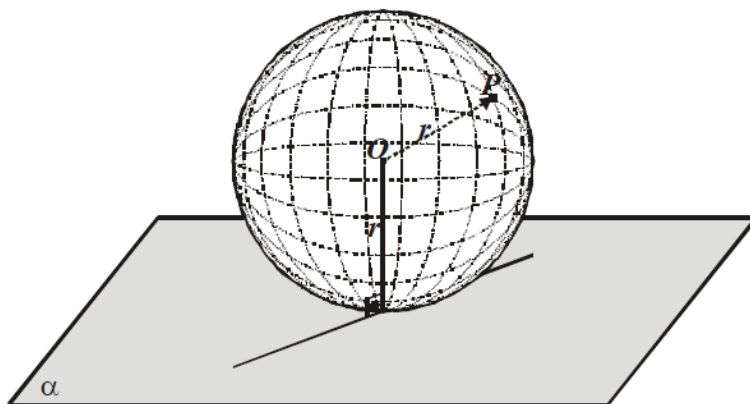
[Fig. 89]: Esfera e superfície esférica.

ESFERA: o conjunto de todos os pontos do espaço, cujas distâncias ao ponto O são menores ou iguais a r , é denominado esfera de centro O e raio r .

SUPERFÍCIE ESFÉRICA: o conjunto de todos os pontos do espaço, cujas distâncias ao ponto O são iguais a r , é denominado superfície esférica de centro O e raio r .

10.2.9.1 Área de uma secção esférica

Na figura seguinte, o plano α é tangente à esfera, ou seja, toca a esfera em um único ponto. Com isso, a distância do plano ao centro da esfera é o próprio raio e o mesmo é perpendicular ao plano.



[Fig. 90]: Plano tangente a uma esfera.

Se considerarmos um plano β paralelo ao plano α , a uma distância d do centro O ($d < r$), a intersecção dele com a esfera gera um círculo de raio r_1 , como mostra a figura.